Journal of Korean
Data & Information Science Society
2005, Vol. 16, No. 2, pp. 271~281

On Asymmeticity for Power Transformed TARCH Model[1)]

Sahm-Yong Kim[2)] · Sung-Duck Lee[3)] · Ae-Ran Jeong[4)]

Abstract

Zokian(1993) and Li and Li(1996) developed TARCH(Threshold ARCH) model, considering the asymmetries in volatility. The models are based on Engle(1982)'s ARCH model and Bollerslev(1986)'s GARCH model. However, two TARCH models can be expressed a common model through Box Cox Power transformation, which was used by Higgins and Bera(1992) for developing NARCH(nonlinear ARCH) model.

This article shows the PTARCH(Power transformation TARCH) model is necessary in some condition, and it checks the fact that PTARCH model has better performance comparing estimates and RMSE(Root Mean Square Error) with those of Zakoian's TARCH model and Li and Li's TARCH model.

PTARCH model would give contribution in asymmetric study as well as heteroscedastic study.

Keywords : 멱변환 TARCH 모형, 모의실험, 비대칭성, 비선형 ARCH 모형, 이분산성 모형

1. 서 론

전통적인 시계열 모형들은 오차항의 등분산성을 가정하였다. 하지만, 등분산성의 가정은 현실 경제 상황을 고려할 때 매우 비현실적이다. 특히 경제의 불황으로 인한 급격한 주가, 이자율, 환율의 변동을 고려하기 힘들었다. 따라서 일반화된 시계열 모형

---

1) 이 논문은 2004년도 충북대학교 학술 연구 지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음
(This work was supported by Chungbuk National Univercity Grant in 2004)
2) 서울 동작구 흑석동 중앙대학교 응용통계학과 부교수
E-mail :sahm@cau.ac.kr
3) 충북 청주시 개신동 충북대학교 정보통계학과 , 기초과학연구소 교수
E-mail : sdlee@chungbuk.ac.kr
4) 충북 청주시 개신동 충북대학교 정보통계학과 박사과정
E-mail : arjeong@netian.com

을 개발하기 위해 오차항의 이분산성을 고려할 필요가 있다. 이러한 오차항의 이분산성을 고려하는 모형을 Engle(1982)이 ARCH(autoregressive conditional heteroscedastic) 모형을 제시하였다. 이 모형은 평균이 0이고 순차적으로 무상관 관계의 과정으로 비조건부 하에서 등분산을 갖지만, 조건부 하에서 과거에 의존하여 나타나는 일정하지 않은 이분산성을 갖는다. 이어 Bollerslev(1985)는 ARCH 모형을 발전시켜 GRACH(generalized autoregressive conditional heteroskedadsic) 모형을 고안하였다.

한편 Engle과 Bollerslev의 모형은 현실 경제 상황에서 호황일 때 보다 불황일 때 급격한 변동을 표현하지 않았다는 단점을 지니고 있다. 보다 깊은 경제 상황의 이해 측면에서 변동의 양(positive)과 음(negative)의 변동을 차별화하여 모형에 고려하는 것이 현실 경제를 표현하는데 타당하다.

이러한 문제를 해결하기 위하여 Geweke(1986)과 Pantula(1986)는 Log ARCH 모형을 제안하였고 Higgins와 Bera(1992)는 Engle의 ARCH 모형과 Geweke와 Pantula의 Log ARCH 모형을 포괄하고 더욱 일반적인 NARCH(Nonlinear ARCH)모형을 제시하였다. Zakoian(1993)은 다른 측면에서 양과 음의 효과를 차별화하는 TARCH(Threshold ARCH) 모형을 제안하였는데 이 모형은 기존의 GARCH 모형과 많은 유사점을 보이면서도, 양과 음의 효과를 가법을 통해 제시함으로써 보다 시각적으로 효과차이를 뚜렷이 하였다. Li 와 Li(1996)는 기존 TARCH 모형에서 분산을 제곱오차의 가법 형식으로 표현함으로써 보다 ARCH모형에서의 분산을 그대로 표현하였다.

본 논문에서는 이 두 모형을 포괄할 수 있는 일반화된 모형을 제안하고, 일반화된 모형의 타당성을 시뮬레이션을 통해 보이고자 한다.

2 .멱변환 TARCH(power transformation) 모형

다음과 같은 가장 간단한 멱변환 TARCH 모형으로서 멱변환 TARCH(1)을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t}\cdot e_t, \quad e_t \sim N(0,1), \quad \varepsilon_t \sim N(0,h_t), \\ h_t &= [\alpha_0 + \alpha_1^+(\varepsilon_{t-1}^+)^{2r} + \alpha_1^-(\varepsilon_{t-1}^-)^{2r},]^{1/r} \\ \theta^* &= \{\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-, r\}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_1^+, \alpha_1^- \ge 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서 $r=1$이라면 위에서 제시된 모형은 Li 와 Li의 TARCH(1) 모형과 일치하며, $r=1/2$라면 Zakoian의 TARCH(1) 모형과 일치하게 된다. 뿐만 아니라 실수 r의 변화에 따라 다양한 TARCH(1) 모형을 만들어 낼 수 있다. 따라서 TARCH 모형을 이용하여 다양하게 주어지는 경제상황을 분석할 때, Zakoian의 모형과 Li 와 Li의 모형 중 한 쪽을 선택하기 보다는 r 값의 추정을 통해 가장 적합한 모형을 만들어 낼 수 있게 된다.

이 모형의 모수들에 대한 추정과정은 제시된 두 TARCH 모형과 동일하다. 다만, 모수 r에 대한 추가적인 추정이 요구된다.

우선 이 모형의 최소제곱 추정치는 위의 Zakoian과 Li 와 Li의 TARCH 모형에서 보여지는 것과 같이 간단하지 않다. 왜냐하면 분산 함수가 선형이 아니라, r 을 포함하는 비선형으로 구성되어 있기 때문이다. 여기서는 r 을 추정하는 것에 초점을 두지 않고, r 의 변화에 따라 모형의 타당성을 고려하고 한다.

멱변환 TARCH 모형의 모수들은 Zakoian의 모형과 Li 와 Li의 모형과 같은 방법으로 추정될 수 있다. r 을 상수로 간주하고, 최대우도 추정치를 고려하여보자.

ε_t 가 정규 분포를 따른다는 가정하면, ε_t 의 결합밀도함수는

$$f(\varepsilon_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot h_t}} \cdot \exp\left[-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right]. \tag{2.2}$$

n 개의 표본에 대해 상수를 제외한 로그 우도 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$l_t = -\frac{1}{2}\log h_t - \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}, \quad l = -\frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\log h_t - \sum_{t=2}^{n}\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}. \tag{2.3}$$

(2.3)에서 제시된 우도함수를 최대로 하는 조건 하에서 모수들의 추정치를 구할 수 있다. 이를 위한 방법으로 앞서 언급한 바와 같이 Newton Raphson 방법을 고려할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \end{pmatrix}_0 + \mathrm{J}^{-1} \cdot E\left[\frac{\partial l_t}{\partial \theta}\right] \tag{2.4}$$

Newton Raphson 방법을 통한 멱변환 TARCH(1) 모형의 모수들은 Kim 과 Hwang(2004)에 의한 정리 3과 같이 일반 조건(regularity conditions) 하에서 점근적 분포를 갖는다는 사실이 입증되어 있다

정리 1.
적절한 조건 하에서 추정되어진 모수들은
다음과 같은 점근적 분포를 갖는다.

$$\theta^* = \{\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-\}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_1^+, \alpha_1^- \ge 0,$$

$\hat{\theta}_n^*$: 표본에서 추정된 최대우도 추정치

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta_n^*) \xrightarrow{d} N(0, \mathrm{J}^{-1}\mathrm{I}^{-1}\mathrm{J}^{-1}) \equiv N(0, \mathrm{J}^{-1})$$

$$\mathrm{I} = E_0\left[\frac{\partial l_t}{\partial \theta^*} \cdot \frac{\partial l_t}{\partial \theta^{*'}}\right] = E_0\left[-\frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta^* \partial \theta^{*'}}\right] = \mathrm{J}$$

I 행렬과 J 행렬은 각각 (2.3)에서 제시된 우도함수의
1차 미분, 2차 미분을 통해 얻은 정보행렬이다.

정리1을 통해 추정된 최대우도 추정치들의 점근적 분포가 정규분포임을 알았다. 앞서와 같이 멱변환 TARCH(1) 모형에 대해 I행렬과 J 행렬이 동일한지 살펴보도록 하자.

예제 1. 멱변환 TARCH(1)

(2.3)에서 제시된 우도함수는 멱변환 TARCH(1) 모형의 오차항이 정규분포를 따른다고 가정하였다. 우선 모수에 대한 1차 미분은 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{\partial l_t}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\frac{1}{h_t}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\frac{1}{h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial \theta}\left[\varepsilon_t^2 - h_t\right]$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} \\ \dfrac{\partial l_t}{\partial \alpha_1^+} \\ \dfrac{\partial l_t}{\partial \alpha_1^-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2h_t^2}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\left[\alpha_0 + \alpha_1^+(\varepsilon_{t-1}^+)^{2r} + \alpha_1^-(\varepsilon_{t-1}^-)^{2r}\right]^{1/r-1}\cdot[\varepsilon_t^2 - h_t^2] \\ \dfrac{1}{2h_t^2}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\left[\alpha_0 + \alpha_1^+(\varepsilon_{t-1}^+)^{2r} + \alpha_1^-(\varepsilon_{t-1}^-)^{2r}\right]^{1/r-1}\cdot(\varepsilon_{t-1}^+)^{2r}\cdot[\varepsilon_t^2 - h_t^2] \\ \dfrac{1}{2h_t^2}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\left[\alpha_0 + \alpha_1^+(\varepsilon_{t-1}^+)^{2r} + \alpha_1^-(\varepsilon_{t-1}^-)^{2r}\right]^{1/r-1}\cdot(\varepsilon_{t-1}^-)^{2r}\cdot[\varepsilon_t^2 - h_t^2] \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

I 행렬은 멱변환 TARCH(1) 모형에서 우도함수의 1차미분값 제곱의 기댓값이다.

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= E_0\left\{\left[-\frac{1}{2h_t}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta}\right]\times\left[-\frac{1}{2h_t}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}E_0\left[\frac{1}{h_t^2}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta'}\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

한편, J 행렬은 멱변환 TARCH(1) 모형에서 우도함수의 2차미분값의 기댓값이다.

$$\mathrm{J} = E_0\left[-\frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'}\right]$$

여기서,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-\frac{1}{2h_t}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta}\right] = \frac{1}{2h_t^2}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta'} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \\ &= E_0\left[\frac{1}{2h_t^2}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial \theta'}\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

위에서 제시된 I 행렬과 J 행렬은 오차항의 정규분포 가정 하에서 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$\frac{E_{t-1}(\varepsilon_t^4)}{[E_{t-1}(\varepsilon_t^2)]^2} = \frac{E_{t-1}(\varepsilon_t^4)}{(h_t)^2} = 3 \tag{2.8}$$

예제 1를 통해 얻은 멱변환 TARCH(1) 모형의 I 행렬과 J 행렬이 일치한다는 사실을 알 수 있다. 따라서 정리 1과 같이 일반 조건 하에서 이 추정치는 일치 추정량이며, 점근적으로 정규분포를 따른다. 각 모수의 분산은 J^{-1} 행렬의 대각원소로 주어진다. 또한 J^{-1}의 대각원소 이외의 원소들은 모수들의 공분산을 나타낸다.

I 행렬과 J 행렬의 세부적인 구성요소는 다음과 같이 이루어진다.

$$\text{I=J} = \frac{1}{2}E_0\left[\frac{1}{h_t^2}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial\theta'}\right]$$

$$= \frac{1}{2}E_0\left[\frac{1}{h_t^2}\begin{pmatrix}\Phi_{t-1}\\ (\varepsilon_{t-1}^+)^2\cdot\Phi_{t-1}\\ (\varepsilon_{t-1}^-)^2\cdot\Phi_{t-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{t-1} & (\varepsilon_{t-1}^+)^2\cdot\Phi_{t-1} & (\varepsilon_{t-1}^-)^2\cdot\Phi_{t-1}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}E_0\begin{bmatrix}\frac{(\Phi_{t-1})^2}{h_t^2} & \frac{(\varepsilon_{t-1}^+)^{2r}\cdot(\Phi_{t-1})^2}{h_t^2} & \frac{(\varepsilon_{t-1}^-)^{2r}\cdot(\Phi_{t-1})^2}{h_t^2}\\ \frac{(\varepsilon_{t-1}^+)^{2r}\cdot(\Phi_{t-1})^2}{h_t^2} & \frac{(\varepsilon_{t-1}^+)^{4r}\cdot(\Phi_{t-1})^2}{h_t^2} & 0\\ \frac{(\varepsilon_{t-1}^-)^{2r}\cdot(\Phi_{t-1})^2}{h_t^2} & 0 & \frac{(\varepsilon_{t-1}^-)^{4r}\cdot(\Phi_{t-1})^2}{h_t^2}\end{bmatrix}$$

여기서,

$$\Phi_{t-1} = \frac{1}{r}\cdot\left[\alpha_0 + \alpha_1^+(\varepsilon_{t-1}^+)^{2r} + \alpha_1^-(\varepsilon_{t-1}^-)^{2r}\right]^{1/r-1} \tag{2.9}$$

3. 시뮬레이션

제시된 멱변환 TARCH 모형의 유용성을 확인하기 위해 다음과 같이 AR(1) TARCH(1) 모형을 고려하여보자.

$$
\begin{aligned}
&y_t = \phi y_{y-1} + \varepsilon_t, \\
&\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \ \ e_t \sim N(0,1), \ \ \varepsilon_t \sim N(0, h_t) \\
&h_t = [\alpha_0 + \alpha_1^+ (\varepsilon_{t-1}^+)^{2r} + \alpha_1^- (\varepsilon_{t-1}^-)^{2r}]^{1/r}, \\
&\theta = \{\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-\}, \quad \alpha_0 > 0, \ \ \alpha_1^+, \alpha_1^- \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

r 값을 0.4에서 1.1까지 0.1 단위로 증가하면서 오차항에 대한 가상 자료를 생성하였다. 이어 고정된 $\phi(=0.5)$를 이용하여 $y_{\underline{t}} = \{y_t, y_{t-1}, \cdots\cdots\}$를 생성하였다.

각각의 가상 자료들에 대해서 r 값이 0.4에서 1.1까지 0.1 단위로 증가하면서 $\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-$을 최대우도 추정법(MLE)을 통해 추정치를 구하였다. 주어진 $\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-$의 값은 각각 0.3, 0.2, 0.4 이다.

만약 가상자료가 생성된 r 값에서 $\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-$에 대한 추정치들이 적절하게 추정된다면, 로 $\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-$ 구성된 분산을 이용하여 일반화 최소제곱법(Generalized Least Square Estimation)을 통해 정확한 ϕ를 구할 수 있다.

$$
\hat{\phi} = \frac{\Sigma \dfrac{y_t y_{t-1}}{h_t}}{\Sigma \dfrac{y_{t-1}^2}{h_t}} \tag{3.2}
$$

우선 표본크기가 3000으로 각각의 모수들을 추정하였다. 표본크기가 3000일 때, α_0를 추정하기 위한 표본크기는 3000이다. 하지만, α_1^+과 α_1^-에 관련된 표본크기는 양(positive)와 음(negative)의 값을 표준정규분포로부터 추출하기 때문에 확률적으로 각각 1500개이다. 또한 각각의 추정치는 100회 반복을 통해 구하였다.

제시된 결과에서 평균제곱오차 제곱근(RMSE : root mean square error)는 다음과 같이 구하였다.

$$
\begin{aligned}
&RMSE = \sqrt{std^2 + bias^2}, \\
&std_\phi = \sqrt{\frac{1}{100}\Sigma(\hat{\phi}_i - \bar{\hat{\phi}})^2}, \ \ bias_\phi = \bar{\hat{\phi}} - \phi \\
&std_\alpha = \sqrt{\frac{1}{100}\Sigma(\hat{\alpha}_i - \bar{\hat{\alpha}})^2}, \ \ bias_\alpha = \bar{\hat{\alpha}} - \alpha
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

아래의 [표1]~[표8]의 결과를 종합하여 보면, 가상자료가 생성된 r 값에서 동일한 r 값을 가진 모형으로 추정된 모형의 추정치 평균들이 주어진 α_0, α_1^+ 에 대해 상대적으로 매우 근사하였다. 또한 상응하는 평균제곱오차 제곱근 역시 상대적으로 매우 낮았다. 반면에 주어진 r 값에서 멀어질수록 각 추정치들의 편차와 평균제곱오차 제곱근이 커졌다. α_1^- 은 r 값이 커짐에 따라 평균제곱오차 제곱근의 크기 역시 커지는 것을 알 수 있다. 하지만, r 값이 커지면, 전체적인 평균제곱오차 제곱근이 줄어든다.

추정된 $\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-$ 에 대해서 일반화 최소제곱법을 통해 얻은 ϕ 는 주어진 0.5보다 과소추정이 되었다. 하지만, 가상 자료를 생성한 r 값에서 ϕ 의 추정치는 주어진 값에 상대적으로 근접하였고, 평균제곱오차 제곱근 역시 작았다. 따라서 최대우도법을 통해 추정된 $\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-$ 를 기반으로 하는 ϕ 추정 역시 적절히 되었다고 결론지을 수 있다.

따라서 r 값의 변화에 따른 멱변환 TARCH 모형을 고려한다면, 현실 경제상황에서 보여지고 있는 이분산성의 문제와 변동 폭의 비대칭성의 문제를 보다 타당한 모형을 제시할 수 있을 것이다.

표1. AR(1) PTARCH(1)의 모수추정 결과 ($r = 0.4$)

	ϕ = 0.5		α_0 = 0.3		α_1^+ = 0.2		α_1^- = 0.4	
	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse
r=0.4	0.488	0.0206	0.2989	0.0081	0.2093	0.0265	0.4020	0.0674
r=0.5	0.4825	0.0257	0.2055	0.0947	0.1999	0.0265	0.4569	0.0652
r=0.6	0.4762	0.0323	0.1611	0.1390	0.1820	0.0320	0.4631	0.0727
r=0.7	0.4771	0.0307	0.1310	0.1691	0.1616	0.0465	0.4742	0.0823
r=0.8	0.4727	0.0365	0.1077	0.1923	0.1564	0.0530	0.5047	0.1167
r=0.9	0.4757	0.0354	0.0859	0.2142	0.1656	0.0498	0.5867	0.1968
r=1.0	0.4778	0.0367	0.0669	0.2332	0.1611	0.0491	0.6269	0.2360
r=1.1	0.4750	0.0373	0.0538	0.2462	0.1558	0.0542	0.6521	0.2608

표2. AR(1) PTARCH(1)의 모수추정 결과 ($r = 0.5$)

	ϕ = 0.5		α_0 = 0.3		α_1^+ = 0.2		α_1^- = 0.4	
	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse
r=0.4	0.4858	0.0224	0.3811	0.0818	0.2591	0.0667	0.4691	0.0797
r=0.5	0.4878	0.0179	0.2701	0.0308	0.2148	0.0323	0.4368	0.0497
r=0.6	0.4825	0.0271	0.2204	0.0799	0.1895	0.0332	0.4410	0.0540
r=0.7	0.4788	0.0285	0.1855	0.1147	0.1789	0.0318	0.4458	0.0614
r=0.8	0.4815	0.0300	0.1582	0.1419	0.1727	0.0405	0.4608	0.0743
r=0.9	0.4829	0.0294	0.1333	0.1667	0.1720	0.0422	0.4720	0.1356
r=1.0	0.4831	0.0296	0.1086	0.1914	0.1736	0.0422	0.5329	0.1449
r=1.1	0.4823	0.0302	0.0902	0.2098	0.1675	0.0491	0.5567	0.1676

표3. AR(1) PTARCH(1)의 모수추정 결과 ($r=0.6$)

	$\phi=0.5$		$\alpha_0=0.3$		$\alpha_1^+=0.2$		$\alpha_1^-=0.4$	
	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse
r=0.4	0.4833	0.0258	0.4521	0.1527	0.2590	0.0674	0.4405	0.0588
r=0.5	0.4906	0.0209	0.3267	0.0281	0.2282	0.0391	0.4238	0.0433
r=0.6	**0.4917**	**0.0196**	**0.2722**	**0.0292**	**0.2049**	**0.0312**	**0.4249**	**0.0499**
r=0.7	0.4871	0.0245	0.2354	0.0651	0.1903	0.0344	0.4268	0.0514
r=0.8	0.4871	0.0259	0.2051	0.0952	0.1899	0.0346	0.4408	0.0550
r=0.9	0.4857	0.0252	0.1797	0.1205	0.1791	0.0380	0.4592	0.0777
r=1.0	0.4883	0.0238	0.1527	0.1474	0.1749	0.0384	0.4699	0.0855
r=1.1	0.4870	0.0244	0.1304	0.1697	0.1701	0.0482	0.4961	0.1116

표4. AR(1) PTARCH(1)의 모수추정 결과 ($r=0.7$)

	$\phi=0.5$		$\alpha_0=0.3$		$\alpha_1^+=0.2$		$\alpha_1^-=0.4$	
	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse
r=0.4	0.4901	0.0232	0.5128	0.2134	0.2580	0.0696	0.4290	0.0513
r=0.5	0.4921	0.0210	0.3792	0.0798	0.2291	0.0411	0.4100	0.0394
r=0.6	0.4889	0.0219	0.3209	0.0233	0.2138	0.0336	0.4008	0.0427
r=0.7	**0.4897**	**0.0206**	**0.2787**	**0.0230**	**0.2055**	**0.0354**	**0.4137**	**0.0454**
r=0.8	0.4893	0.0234	0.2508	0.0501	0.1950	0.0327	0.4188	0.0455
r=0.9	0.4889	0.0244	0.2237	0.0767	0.1800	0.0348	0.4317	0.0569
r=1.0	0.4856	0.0251	0.1927	0.1075	0.1829	0.0376	0.4476	0.0643
r=1.1	0.4870	0.0253	0.1678	0.1324	0.1764	0.0405	0.4580	0.0542

표5. AR(1) PTARCH(1)의 모수추정 결과 ($r=0.8$)

	$\phi=0.5$		$\alpha_0=0.3$		$\alpha_1^+=0.2$		$\alpha_1^-=0.4$	
	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse
r=0.4	0.4915	0.0218	0.5669	0.2674	0.2559	0.0650	0.4063	0.0375
r=0.5	0.4924	0.0219	0.4229	0.1235	0.2385	0.0516	0.3985	0.0378
r=0.6	0.4914	0.0224	0.3600	0.0609	0.2319	0.0444	0.4044	0.0409
r=0.7	0.4930	0.0217	0.3209	0.0239	0.2156	0.0346	0.4054	0.0414
r=0.8	**0.4938**	**0.0203**	**0.2894**	**0.0152**	**0.1989**	**0.0300**	**0.4189**	**0.0440**
r=0.9	0.4911	0.0223	0.2625	0.0385	0.1982	0.0314	0.4091	0.0485
r=1.0	0.4901	0.0245	0.2315	0.0691	0.1945	0.0330	0.4254	0.0508
r=1.1	0.4898	0.0258	0.2057	0.0946	0.1795	0.0394	0.4305	0.0542

표6. AR(1) PTARCH(1)의 모수추정 결과 ($r=0.9$)

	ϕ = 0.5		α_0 = 0.3		α_1^+ = 0.2		α_1^- = 0.4	
	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse
r=0.4	0.4911	0.0223	0.6129	0.3134	0.2636	0.0735	0.3950	0.0377
r=0.5	0.4935	0.0210	0.4615	0.1622	0.2474	0.0569	0.3966	0.0402
r=0.6	0.4897	0.0219	0.3972	0.0979	0.2257	0.0399	0.3964	0.0392
r=0.7	0.4895	0.0241	0.3581	0.0590	0.2171	0.0339	0.3888	0.0392
r=0.8	0.4927	0.0198	0.3288	0.0312	0.2047	0.0316	0.3968	0.0403
r=0.9	0.4960	0.0202	0.3000	0.0111	0.2016	0.0348	0.3964	0.0413
r=1.0	0.4915	0.0204	0.2694	0.0324	0.1919	0.0361	0.4108	0.0487
r=1.1	0.4889	0.0262	0.2405	0.0601	0.1822	0.0360	0.4091	0.0491

표7. AR(1) PTARCH(1)의 모수추정 결과 ($r=1.0$)

	ϕ = 0.5		α_0 = 0.3		α_1^+ = 0.2		α_1^- = 0.4	
	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse
r=0.4	0.4929	0.0235	0.6537	0.3543	0.2614	0.0703	0.3891	0.0451
r=0.5	0.4934	0.0232	0.4927	0.1932	0.2586	0.0675	0.3968	0.0405
r=0.6	0.4943	0.0236	0.4317	0.1324	0.2367	0.0503	0.3931	0.0400
r=0.7	0.4921	0.0229	0.3909	0.0918	0.2267	0.0405	0.3921	0.0394
r=0.8	0.4942	0.0216	0.3602	0.0616	0.2147	0.0371	0.3921	0.0441
r=0.9	0.4946	0.0212	0.3296	0.0315	0.2020	0.0325	0.3957	0.0453
r=1.0	0.4954	0.0196	0.3009	0.0113	0.1972	0.0324	0.4023	0.0461
r=1.1	0.4953	0.0233	0.2714	0.0312	0.1940	0.0340	0.3999	0.0518

표8. AR(1) PTARCH(1)의 모수추정 결과 ($r=1.1$)

	ϕ = 0.5		α_0 = 0.3		α_1^+ = 0.2		α_1^- = 0.4	
	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse	mean	rmse
r=0.4	0.4947	0.0192	0.6871	0.3876	0.2617	0.0713	0.3864	0.0556
r=0.5	0.4915	0.0213	0.5228	0.2234	0.2637	0.0746	0.3946	0.0367
r=0.6	0.4941	0.0219	0.4597	0.1602	0.2405	0.0508	0.3908	0.0374
r=0.7	0.4931	0.0195	0.4235	0.1244	0.2244	0.0420	0.3804	0.0454
r=0.8	0.4959	0.0223	0.3915	0.0924	0.2199	0.0379	0.3848	0.0463
r=0.9	0.4933	0.0225	0.3586	0.0601	0.2160	0.0420	0.4001	0.0442
r=1.0	0.4931	0.0214	0.3303	0.0331	0.2002	0.0350	0.3902	0.0467
r=1.1	0.4968	0.0181	0.2997	0.0118	0.1951	0.0331	0.3950	0.0460

4. 결 론

ARCH 모형에서 시작하여 현재까지 현실에 더 적합한 이분산성 모형들을 개발하여 왔다. 현실적인 문제는 기존 시계열 모형에서 등분산 가정이 필수적인 반면, 현실 경제현상에서는 등분산의 가정을 만족시킬 수 없었다. 이러한 등분산 가정으로 ARCH 모형은 분산을 오차의 제곱 선형식으로 나타냄으로써 이분산을 등분산으로 전환시켜 기존의 방식으로 시계열 예측이 가능하도록 하였다. 하지만, ARCH 모형은 경제변동에서 흔히 발생하는 변동 폭의 비대칭성을 고려하지 않았다. 경제부흥기보다는 경제 침체기에 상대적으로 변동의 폭이 컸다. 이러한 비대칭성을 고려한 연구로 Log ARCH 모형을 비롯하여 Zakoian의 TARCH 모형과 Li 와 Li의TARCH 모형까지 이어져왔다.

여기서 두 가지의 TARCH 모형은 각각 연구가 진행되고 있지만, 일반적인 모형으로 통합이 가능하다. 멱변환 TARCH 모형의 개발은 여러 다른 경제상황에서 Zakoian의 TARCH 모형과 Li 와 Li의 TARCH 모형의 효율을 살펴보기 보다는 r 값을 추정함으로써 각 경제상황을 가장 잘 표현하는 모형을 개발할 수 있다.

본 논문에서 시뮬레이션의 결과를 통해 r 값에 따라 분산 모형의 적합성을 살펴보았다. α_0, α_1^+의 추정치들에 대해 주어진 r 값과 일치하는 멱변환 TARCH 모형에서 가장 적합하게 나타났다. 비록 α_1^-의 추정치에 대해서 평균제곱오차 제곱근이 r 값이 증가함에 따라 증가하게 나타났지만, 모수 추정치들의 비교를 통해 멱변환 TARCH 모형의 필요성을 확인할 수 있었다. 또한 멱변환 TARCH 모형을 바탕으로 구한 ϕ에 대한 검토에서도 r의 추정을 통한 멱변환 TARCH 모형의 필요성을 확인하였다.

따라서 r 값에 따른 다양한 멱변환 TARCH 모형은 Zakoian의 TARCH 모형과 Li 와 Li의 TARCH의 모형의 효율성 비교에 앞서 고려할만한 모형이라 할 수 있다.

멱변환 TARCH 모형에서 우선적으로 고려해야 할 사항은 r 값을 추정하는 방법이다. 하지만, r 값에 대한 추정은 비선형 모수 추정의 방법으로 간단히 최소 제곱법으로 초기치를 추정할 수 없다. 또한 r 값을 최대우도법을 사용하여 추정할 때, 역시 정보행렬이 매우 복잡하게 나타남으로써 공식화하는데 많은 시간과 노력이 필요하다. 만약 r 값에 대한 초기치와 최대 우도법을 통한 추정이 가능하게 된다면, Higgins와 Bera가 Log ARCH 모형과 ARCH 모형을 멱변환시켜 만든 NARCH 모형에 사용되었던 LM 검정을 통해 멱변환 TARCH 모형의 타당성을 논할 수 있을 것이다. 주어진 문제들을 해결한 멱변환 TARCH 모형은 보다 현실적인 모형으로 이분산성의 문제와 비대칭성 문제를 해결하는 연구에 큰 공헌을 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, vol. 31, 307-327.
2. Engle, R.F.(1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of United Kingdom, *Econometrica*, vol 46 1287-1294.
3. Gourieroux, C. and Monfort, A.(1992). Qualitative Threshold ARCH Models, *Journal of Econometrics*, 52, 159-199.
4. Gourieroux, C.(1997). *ARCH Models and Financial Applications*, Springer.
5. Higgins, M.L. and Bera, A.K.(1992). A Class of Nonlinear Arch models, *International Economic Review*, 33.
6. Kim ,S. and Hwang,S.Y.(2005). Binary Random Power Approach To Modeling Asymmetric Conditional Heteroscedasticity. *Journal of the Korean Statistical Society*,34, 61-71.
7. Li, C.W. and Li, W.K.(1996). On A Double Threshould Autoregressive Heteroscedastic Time Series Model, *Journal of Applied Econometrics*, 11, 253-274.
8. Shumway, R.H. and Stoffer, D.S.(2000). *ARCH Models and Financial Applications*, Spinger.
9. Tsay, R.S.(2002). *Analysis of Financial Time Series*, Wiley interscience.
10. Zakoian, J.M.(1993). Threshold Arch Models and Asymmetries in Volatility, *Journal of Applied Econometrics*, 8, 31-49.

[2005년 1월 접수, 2005년 4월 채택]