Journal of Korean
Data & Information Science Society
2005, Vol. 16, No. 2, pp. 227 ~ 236

A Simple Chi-Squared Test of Spherical Symmetry

Cheolyong Park[1)]

Abstract

A chi-squared test of spherical symmetry is suggested. This test is easy to apply in practice since it is easy to compute and has a limiting chi-squared distribution under spherical symmetry. The result of Park(1998) can be used to show that it has the limiting chi-squared distribution. A simulation study is conducted to study the accuracy, in finite samples, of the limiting distribution. Finally, a simulation study that compares the power of our test with those of other tests of spherical symmetry is performed.

Keywords : Contingency table, polar coordinates, test of independence

1. 서론

단변량 변수의 대칭성에 대한 연구는 활발하게 진행되어 왔으나 다변량 변수의 대칭성에 대한 연구는 최근까지 그리 활발하지 않았다. 여러 다변량 대칭분포 중 타원형 대칭분포(elliptically symmetric distribution)는 다변량 정규분포를 준모수(semi-parametric) 다변량 분포로 확장한 것으로 다변량 정규분포를 가정한 통계절차보다 로버스트 분석을 행할 수 있는 기초가 되는 분포이다. 구형 대칭분포(spherically symmetric distribution)는 타원형 대칭분포의 특수형태이며 실제 자료 분석에서 타원형 대칭분포보다 적용성이 떨어진다. 그러나 구형 대칭성 검정이 바로 타원형 대칭성 검정으로 변환될 수 있는 이론적 밀접성 때문에 타원형 대칭성 검정과 함께 많이 연구된다. 다시 말해 원자료 대신에 평균벡터가 0이고 공분산행렬이 단위행렬이 되도록 치환된 구형화된 자료(spherized data)에 구형 대칭성 검정을 적용하는 것이 일종의 타원형 대칭성 검정이 될 수 있는 것이다.

최근까지 구형 대칭성 검정으로 사용될 수 있었던 것은 Beran(1979), Romano(1989), Baringhaus(1991), Koltchinskii & Li(1998) 등이다. 그러나 이 연구들은 실제 적용에 있어 많은 어려움을 가지고 있었다. 왜냐하면 각 통계량들이 계산하기 복잡하며 특히 Beran(1979)의 연구를 제외하면 모두 검정통계량의 점근분포를 쉽

1) Associate Professor, Department of Statistics, Keimyung University, Taegu 704-701
E-mail : cypark1@kmu.ac.kr

게 계산할 수 없어 점근적 유의확률을 얻기 힘들기 때문이다.

최근에 발표된 Park(2005)의 구형 대칭성 검정은 이러한 어려움을 극복하고자 제시되었다. 이 검정은 검정통계량을 쉽게 계산할 수 있을 뿐만 아니라 검정통계량의 점근적 유의확률을 쉽게 계산할 수 있다. 이 논문에서 제안하는 검정도 카이제곱 검정법이고 점근분포가 정확한 카이제곱 분포를 따른다는 장점을 가지고 있다. 그러나 두 검정법은 칸(cell)을 구성하는 방법에 차이가 있다. 다시 말해 이 논문에서 제안하는 검정은 원자료에서 계산된 극좌표 값에서 주변값이 (근사적으로) 동일한 분할표를 생성하고 이 분할표의 독립성 검정을 수행한다는 점이 다르다. 구체적인 방법의 차이는 다음 절에서 설명된다.

이 논문은 다음과 같은 순서로 전개된다. 2절에서는 제안된 검정의 절차를 간략히 소개하며, 관찰도수(cell counts) 벡터 및 카이제곱 통계량의 구형 대칭성 가정 하의 점근분포(asymptotic distribution)를 유도하였다. 3절에서는 2절에서 유도한 카이제곱 통계량의 점근분포가 유한표본(finite samples)에서 얼마나 정확한지 살펴보는 모의실험을 수행하였다. 마지막으로 여러 가지 비구형 대칭분포에서 Beran(1979), Baringhaus(1991) 및 Park(2005)과 이 논문에서 제안한 카이제곱 검정통계량의 검정력을 비교하는 모의실험을 수행하였다.

2. 검정통계량과 점근분포

이 논문에서 사용하게 되는 구형 대칭성의 정의는 다음과 같다. 모든 직교행렬(orthogonal matrix) Γ에 대해 ΓX와 X의 분포가 같으면 X를 구형대칭이라 한다. 평균이 0 공분산행렬이 $\sigma^2 I$인 다변량 정규분포, 다변량 t분포 등이 잘 알려진 구형대칭분포이다. 다음 절의 모의실험에서는 구형대칭인 분포족으로서 Ernst(1998)의 다변량 일반화 라플라스 분포(multivariate generalized Laplace distribution)를 고려하는데 다변량 정규분포와 다차원 공(ball)에서의 균일분포 등이 포함되어 있다.

구체적인 검정통계량의 모양을 알아보기 전에 필요한 표기법을 정의한다. 우선 p차원 다변량 분포 $f(x)$에서의 확률표본을 $X_1, X_2, \cdots, X_n$으로 나타낸다. 단, 여기서 $X_i = (X_{i1}, \cdots, X_{ip})^t \; (i = 1, \cdots, n)$이다. 이 때 우리가 검정하고자 하는 가설은

$$H_0 : f(x)\text{는 구형대칭이다.}$$

이 원자료 $X_i (i = 1, \cdots, n)$로부터 극좌표 값 $Y_i = (Y_{i1}, \cdots, Y_{ip})^t$를 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned}
Y_{ip} &= \sqrt{X_i^t X_i} \\
X_{i1} &= Y_{ip} \cos(Y_{i1}) \\
&\;\vdots \\
X_{i(p-1)} &= Y_{ip} \sin(Y_{i1}) \cdots \sin(Y_{i(p-2)}) \cos(Y_{i(p-1)}) \\
X_{ip} &= Y_{ip} \sin(Y_{i1}) \cdots \sin(Y_{i(p-2)}) \sin(Y_{i(p-1)})
\end{aligned}$$

구형 대칭성이 만족되면 극좌표 값 $Y_i(i=1,\cdots,n)$의 각 변수는 서로 독립이 된다 (Muirhead (1982)의 정리 1.5.5 참조). 따라서 각 변수의 독립성을 검정하는 적절한 검정을 사용하면 구형 대칭성 검정으로 사용될 수 있는 것이다.

이 논문에서는 Park(1998)에서 제안한 방법을 사용하도록 하겠다. 이 절차는 다음과 같이 간단히 요약될 수 있다. 우선 극좌표 값에서 각 범주에 속하는 관찰치의 수가 (최소한 근사적으로) 동일한 범주형 변수 $T_i=(T_{i1},\cdots,T_{ip})^t$를 계산한다. 구체적으로 i번째 변수의 범주수를 d_i라고 놓으면 범주형 변수는 다음과 같이 계산된다.

$$(k-1)n/d_i < \operatorname{rank}(Y_{ij}) \le kn/d_i \text{이면 } T_{ij}=k\text{이다 } (k=1,\cdots,d_i)$$

여기서 $\operatorname{rank}(Y_{ij})$는 $Y_{1j},\cdots,Y_{nj}$ 중 Y_{ij}의 순위이다. 따라서 n이 d_i의 배수이면 각 범주에 속하는 관찰치의 수, 즉 $\sum_{i=1}^{n} I(T_{ij}=k)$가 정확히 n/d_i개가 되며, n이 d_i의 배수가 아니더라도 최소한 근사적으로 관계가 성립한다. 단, 여기서 사용된 함수 $I(\cdot)$는 표시함수(indicator function)이다.

여기서 잠시 Park(2005)에서 제안된 방법과의 차이점을 살펴보도록 하자. 이 연구에서는 Muirhead(1982)의 정리 1.5.5에 의해 $Y_{ij}(j=1,\cdots,p-1)$의 확률밀도함수가 $\sin^{p-1-j} y_{ij}$에 비례하게 된다는 사실을 이용하였다. 다시 말해 Y_{ip}에 대해서는 앞에서와 마찬가지로 순위통계량에 근거한 확률구간(random interval)을 구성하지만 $Y_{ij}(j=1,\cdots,p-1)$에는 앞의 알려진 확률밀도함수에 근거하여 고정구간을 구성하여 (근사적으로) 동일확률을 가지는 칸(cell)을 생성하였다. 그러나 이 논문에서 제안한 방법에서는 모든 변수에 대해 순위통계량에 근거한 확률구간을 구성하여 칸을 생성시킨 점이 차이가 있다.

이 범주형 자료로부터 p차원 분할표(contingency table)를 구성할 수 있다. 이 분할표는 $K\equiv\prod_{i=1}^{p} d_i$개의 총 가능한 칸을 가지며 n개의 범주형 벡터가 K개의 칸에 분배되는 것이다. 특정 칸을 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_p)$라고 나타낼 때 이 칸에 속하는 관찰도수는

$$u_\pi=\sum_{i=1}^{n} I(T_i=\pi)$$

가 된다. 여기서 물론 모든 π_i는 1과 d_i 사이의 자연수 값을 취하게 된다. 이 관찰도수에 근거하여 피어슨-피셔(Pearson-Fisher) 카이제곱 통계량

$$X^2=\sum_{\pi}\frac{(u_\pi-n/K)^2}{n/K} \tag{2-1}$$

을 계산하여 구형 대칭성 검정으로 사용하게 된다.

이제 관찰도수 벡터의 점근분포와 카이제곱 통계량의 점근분포를 나타내는데 필요한 표기법을 정의하자. 우선 단위행렬(identity matrix), 영벡터(vector of zeros), 일벡터(vector of ones)를 각각 I, 0, e라고 나타내며 차원을 나타낼 필요가 있으면 첨자로서 나타낸다. 또한 $U_n=(u_\pi)$은 $K\times 1$ 관찰도수 벡터이다. 결과를 좀 더 용이하게 나타내기 위해 U_n이 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_p)$의 표준순서에 의해 나열되어 있다고 가정한다. 다시 말해 π_1이 가장 먼저 1에서 d_1까지 변하고, π_2가 두 번째 빨리 변하고 π_p가 가장 나중에 변하는 순서이다. 이 표기법에 근거했을 때 U_n과 X^2의 점근분포는 다음과 같다.

정리 1. $X_1,X_2,\cdots,X_n$이 구형 대칭인 분포에서의 확률표본일 때 $n\to\infty$이면

$$\{n/K\}^{-1/2}(U_n-en/K)\ \xrightarrow{d}\ N(0,A)$$

와

$$X^2\ \xrightarrow{d}\ \chi^2\Big(K-1-\sum_{i=1}^{p}(d_i-1)\Big)$$

가 성립한다. 여기서

$$A=I+(p-1)ee^t/K-\sum_{i=1}^{p}\Big(E^{(i)}\{E^{(i)}\}^t/\prod_{j\neq i}d_j\Big)$$

이며

$$E^{(i)}=e_{d_1}\otimes\cdots\otimes I_{d_i}\otimes\cdots\otimes e_{d_p}$$

는 i번째 크로네커 곱(Kronecker product) 위치에 단위행렬 I_{d_i}가 있는 행렬이다.

증명: 식 (2-1)의 통계량은 모든 주변값이 주어진 다차원 분할표에서의 독립성을 검정하는 카이제곱 통계량이다. 따라서 Park(1998)의 결과를 그대로 적용할 수 있다. 구체적으로 Park(1998)의 Theorem 2.1과 Corollary 2.1에서

$$\mathrm{p}_n=\mathrm{q}=e/K,\quad \mathrm{q}^{(i)}=e_{d_i}/d_i\,(i=1,\cdots,p)$$

를 대입하면 쉽게 결과가 나온다. □

3. 모의실험

우선 구형 대칭성 가정 하에서 카이제곱 검정통계량의 점근분포가 유한표본에서 얼

마나 정확한지 알아보는 모의실험을 수행하였다. 이 때 사용하는 구형대칭 분포족은 Ernst(1998)에서 제시한 다변량 일반화 라플라스 분포(multivariate generalized Laplace distribution)이다. 그 다음에는 구형 대칭에서 벗어나는 여러 형태의 비구형 대칭분포에서 검정력을 비교하는 모의실험을 수행하였다. 여기에 포함되는 분포는 두 변수끼리의 상관계수가 거의 0에 가까우면서 주변 분포는 거의 대칭에 가까운 분포들이었다.

다변량 일반화 라플라스 분포는 타원형 대칭인 분포로서 Ernst(1998)가 난수생성 알고리즘을 제시하였는데 이 논문에서는 구형 대칭분포만 사용하였다. 구체적으로 구형대칭인 다변량 일반화 라플라스 분포는 다음과 같은 확률밀도함수를 가지며 이 분포를 $MGL(\lambda)$라고 나타내도록 한다.

$$f(x;\lambda)=\frac{\lambda\Gamma(p/2)}{2\pi^{p/2}\Gamma(p/\lambda)}\exp\{-(x^t x)^{\lambda/2}\}$$

다변량 일반화 라플라스 분포는 λ가 작으면 꼬리가 긴 분포가 되며 λ가 커지게 되면 꼬리가 짧은 분포가 되는데 구체적으로 $\lambda=2$이면 다변량 정규분포, $\lambda=1$이면 라플라스 분포형태이며 $\lambda\to\infty$이면 다차원 공(ball)에서의 균일분포에 수렴하게 되어 다양한 형태의 구형 대칭분포를 포함하게 된다. 다차원 공에서의 균일분포를 $MGL(\infty)$라고 나타내도록 한다.

다음으로 이 모의실험에서 사용될 Beran(1979), Baringhaus(1991)와 Park(2005)의 검정통계량을 간단하게 소개한다. Beran(1979)의 검정통계량은 다음과 같다.

$$S_n=\sum_{k=1}^{K_n}\sum_{m=1}^{M_n}\left[n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}a_k(A_i)b_k(B_i)\right]^2$$

여기서 $A_i=\text{rank}(Y_{ip})/(n+1)$, $B_i=(Y_{i1},\cdots,Y_{i(p-1)})$, a_k는 $[0,1]$에 정의된 르베그 측도(Lebesgue measure)와 상수 함수에 직교인 직교정규함수이며, b_k는 $[0,\pi]^{p-2}\times[0,2\pi]$에 정의된 르베그 측도와 상수함수에 직교인 직교정규함수이다. 이 검정통계량은 구형 대칭성과 간단한 다른 정칙조건(regularity conditions) 하에서 $n\to\infty$일 때 $\lim K_n=\lim M_n=\infty$이면 평균이 K_nM_n이고 분산이 $2K_nM_n$인 정규분포로 수렴하게 된다. 이 모의실험에서는 a_k에 5차까지의 직교다항함수(orthogonal polynomial function)를 사용하며, b_k에 이것 대신에 $Z_i=(Z_{i1},\cdots,Z_{ip})^t=X_i/R_i$에 정의되는 2^p-1개의 함수 b_k'를 사용한다. 이 함수의 구체적인 모양은 $k=1,\cdots,2^p-1$의 이진법 전개(binary expansion)를 $(l_1,\cdots,l_p)$라고 나타날 때

$$b_k'(Z_i)=3^{\sum_{j=1}^{p}l_j/2^{p+1}}\prod_{j=1}^{p}Z_{ij}^{l_j}$$

가 된다. 다음으로 Baringhaus(1991)의 검정통계량은 다음과 같다.

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} h(Z_i^t Z_j) \min\left(1 - \frac{\text{rank}(Y_{ip}) - 1}{n}, 1 - \frac{\text{rank}(Y_{jp}) - 1}{n}\right)$$

이 모의실험에서 우리는

$$h(t) = 1 + 4(\pi p)^{-1}[\Gamma((p+1)/2)/\Gamma(p/2)]^2 - 2\pi^{-1}[\arccos t + (1-t^2)^{1/2}], -1 \le t \le 1$$

함수를 사용한다. 이 검정통계량의 점근분포는 복잡하여 직접 사용하기 어렵기 때문에 모의실험을 통해 근사적 분포를 생성시켜 사용하였다. 근사적 분포는 다변량 표준정규분포에서 표본을 100만 개 뽑아 각각 T_n을 계산하고 이 100만 개의 순서 통계량에 근거하여 근사적으로 $i/10000, i=1,\cdots,9999$ 위치에 해당되는 값들을 뽑아 근사적 분위수 값으로 사용하였다.

마지막으로 Park(2005)에서 제안된 카이제곱 검정통계량을 모의실험에서 사용하게 되는데 구체적인 설명은 생략하고 이 검정통계량을 W_n로 나타내기로 한다. 이 검정통계량이 이 논문에서 사용한 범주수와 동일한 $d_1, \cdots, d_p$를 사용하게 되면 점근분포가 $\chi^2(\prod_{i=1}^{p} d_i - d_p)$가 된다.

구형대칭인 다변량 일반화 라플라스 분포 $MGL(\lambda)$에서의 모의실험은 다음과 같이 실행되었다. 고려된 λ는 1, 2, 5와 ∞, 고려된 표본크기 n은 100과 200이며 고려된 차원 p는 2, 3과 4이다. 해당 $MGL(\lambda)$에서 차원이 p인 표본크기 n인 표본을 1000개 뽑아 X^2 통계량들과 이 검정통계량의 점근 유의확률을 계산하였다. 이 때 $p=2$일 때는 $d_1=6, d_2=4$, $p=3$일 때는 $d_1=2, d_2=4, d_3=3$, $p=4$일 때는 $d_1=d_2=d_4=2, d_3=4$를 사용하여 각 칸의 기대도수가 $n=100$일 때 4.16, 4.16, 3.13으로 너무 작지 않게 만들었다. 여기서 $p=3,4$인 경우 $d_{p-1}=2d_1$를 사용한 이유는 $Y_{i(p-1)}$가 취하는 범위 $[0, 2\pi]$가 Y_{i1}이 취하는 범위 $[0,\pi]$보다 두 배 넓기 때문이다. 유의수준이 $\alpha=.01,.05,.1$일 때 1000개의 표본 중 귀무가설 기각율을 정리한 것이 <표 1>이다. 이 표를 살펴보면 관측된 기각율이 명목상의 유의수준과 전체적으로 잘 부합하고 있음을 알 수 있다.

<표 1> 1000개 표본 중 귀무가설 기각율

		$n=100$			$n=200$		
p	λ	$\alpha=.01$	$\alpha=.05$	$\alpha=.1$	$\alpha=.01$	$\alpha=.05$	$\alpha=.1$
2	1	.007	.048	.095	.008	.054	.102
	2	.009	.043	.095	.010	.045	.094
	5	.006	.048	.100	.011	.054	.103
	∞	.013	.057	.104	.007	.040	.099
3	1	.009	.044	.094	.013	.045	.100
	2	.007	.047	.099	.012	.052	.093
	5	.009	.039	.093	.006	.049	.101
	∞	.008	.045	.089	.006	.054	.107
4	1	.011	.035	.096	.009	.048	.091
	2	.008	.046	.113	.009	.052	.095
	5	.005	.043	.101	.010	.045	.092
	∞	.011	.053	.110	.015	.049	.098

다음으로 여러 가지 비구형 대칭분포에서 검정력을 비교하는 모의실험을 수행하였다. 처음으로 고려된 분포는 나선형(spiral) 분포이다. 모수가 b인 나선형 분포의 확률밀도함수는

$$f(x_1, x_2; b) = \frac{1}{2\pi}\{1+\cos[2(\theta - b \cdot r)]\}\exp(-r^2/2) \tag{3-1}$$

인데 여기서 r과 θ는 (x_1, x_2)의 극좌표 값인 반지름과 각도이다. 이 분포의 산포도는 대칭인 두 개의 나선형을 이루는데 b가 커짐에 따라 꼬리가 길어진다. 이 모의실험에서는 $b=2$를 사용하였는데 이 때 4차 적률까지 이변량 표준정규분포와 아주 비슷하게 되기 때문이다. X^2, W_n에서 $d_1=6, d_2=4$를 사용하고 500개의 표본에서 계산된 네 가지 통계량의 검정력을 요약한 것이 <표 2>이다. 이 표에 의하면 Beran(1979)의 검정력이 가장 뛰어나고 두 카이제곱 검정통계량의 검정력도 뛰어나지만 Baringhaus(1991)의 검정력은 상당히 뒤처지는 것을 알 수 있다.

<표 2> 분포 (3-1)에서 500개 표본 중 검정력

	$n=100$			$n=200$		
stat	$\alpha=.01$	$\alpha=.05$	$\alpha=.1$	$\alpha=.01$	$\alpha=.05$	$\alpha=.1$
X^2	.528	.776	.888	.982	.996	.998
W_n	.516	.770	.852	.976	.992	.994
S_n	.842	.938	.960	.998	1.00	1.00
T_n	.022	.140	.224	.044	.176	.332

다음으로 고려된 비구형 대칭분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x_1, \cdots, x_4) = \frac{1}{2\pi^2} \exp(-\sum_{i=1}^{4} x_i^2/2)\ I(x_1x_2x_3x_4 > 0) \tag{3-2}$$

이 분포는 사차원 다변량 확률변수가 취하는 영역 R^4 중 $x_1x_2x_3x_4>0$을 만족하는 영역만 취하도록 조정된 분포이다. X^2, W_n 에서 $d_1=d_2=d_4=2, d_3=4$를 적용하고 500개 표본에서 계산된 검정력을 요약한 것이 <표 3>이다. 이 분포에 대해 S_n은 검정력이 유의수준보다 결코 높지 않고 X^2, W_n, T_n은 다소간의 검정력을 가지지만 두 카이제곱 검정통계량의 검정력이 좀더 높다. 이 모의실험에서는 랜덤하게 회전된 자료에 대해 X^2, W_n이 계산되었는데 회전되지 않은 자료에 적용하면 검정력이 1이 되는 것은 자명하다.

<표 3> 분포 (3-2)에서 500개 표본 중 검정력

	$n=100$			$n=200$		
stat	$\alpha=.01$	$\alpha=.05$	$\alpha=.1$	$\alpha=.01$	$\alpha=.05$	$\alpha=.1$
X^2	.030	.102	.200	.084	.194	.278
W_n	.042	.140	.208	.088	.182	.282
S_n	.012	.036	.060	.002	.028	.068
T_n	.016	.082	.146	.018	.094	.188

마지막으로 고려된 분포는 여러 개의 군집으로 구성되는 분포이다. 구체적으로 이 분포는 표본크기가 10의 배수인 경우에 적용될 수 있는데

$$\mu_1, \cdots, \mu_{n/10} \sim iid\, N(0, I_4)$$

에 의해 4차원 공간에서의 군집중심을 뽑고

$$X_{10(i-1)+1}, \cdots, X_{10i} \sim iid\, N(\mu_i, I_4) \ \ (i=1, \cdots, n/10)$$

에 의해 각 군집중심에서 10개의 확률표본을 뽑아 전체 표본을 구성하는 방법이다. X^2, W_n 에서 $d_1=d_2=d_4=2, d_3=4$를 적용하고 500개 표본에서 계산된 검정력을 요약한 것이 <표 4>이다. 이 표에 의하면 S_n, T_n이 다소간의 검정력을 보이지만 X^2, W_n에 비해 검정력이 많이 떨어지는 것을 알 수 있다. 이 분포의 경우 전체 표본평균이 0에서 많이 이탈하는 경우가 있기 때문에 표본평균이 0이 되도록 조정된 자료에 대해 적용되었으며, 두 카이제곱 검정통계량은 랜덤하게 회전된 자료에 대해 적용되었다.

<표 4> 사차원 군집분포에서 500개 표본 중 검정력

	$n=100$			$n=200$		
stat	$\alpha=.01$	$\alpha=.05$	$\alpha=.1$	$\alpha=.01$	$\alpha=.05$	$\alpha=.1$
X^2	.098	.196	.326	.260	.416	.526
W_n	.054	.170	.244	.264	.428	.530
S_n	.064	.136	.196	.206	.340	.410
T_n	.006	.054	.094	.074	.220	.318

앞의 모의실험의 결과를 다음의 두 가지로 요약할 수 있을 것 같다. 우선 두 개의 카이제곱 검정통계량은 비록 다른 칸을 사용하지만 구형 대칭분포뿐만 아니라 고려된 비구형 대칭분포에서 거의 비슷한 결과를 보였다. 다음으로 고려된 비구형 대칭분포에서 이 두 가지 검정통계량이 기존의 검정인 Beran(1979)과 Barinhaus(1991)에 비해 결코 검정력이 떨어지지 않았다.

참고문헌

1. Baringhaus, L. (1991). Testing for spherical symmetry of a multivariate distribution. *Annals of Statistics*, 19, 899-917.
2. Beran, R. (1979). Testing for ellipsoidal symmetry of a multivariate density. *Annals of Statistics*, 7, 150-162.
3. Ernst, M.D. (1998). A multivariate generalized Laplace distribution. *Computational Statistics*, 13, 227-232.
4. Koltchinskii, V.I., and Li, L. (1998). Testing for spherical symmetry of a multivariate distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 65, 228-244.
5. Muirhead, R.J. (1982). *Aspects of multivariate statistical theory*. John Wiley & Sons, New York

6. Park, C. (1998). The chi-squared test of independence for a multi-way contingency table with all margins fixed. *Journal of the Korean Statistical Society,* 27, 197-203.
7. Park, C. (2005). A test for spherical symmetry. *The Korean Journal of Applied Statistics,* 18, 99-113.
8. Romano, J.P. (1989). Bootstrap and randomization tests of some nonparametric hypotheses. *Annals of Statistics*, 17, 141-159.

[2005년 2월 접수, 2005년 4월 채택]