Journal of Korean
Data & Information Science Society
2005, Vol. 16, No. 1, pp. 33~40

An Estimating Function Approach for Threshold-ARCH Models

Sahm Yeong Kim[1) ・ Tae Su Chong[2)

Abstract

The estimating function method was proposed by Godambe(1985) for parameter estimation under unknown distributions for errors in the models. Threshold Autoregressive Heteroscedastic (Threshold-ARCH) models have been developed by Zakoian(1994) and Li and Li(1996) for explaining the asymmetric properties in the financial time series data. In this paper, we apply the estimating function method to the Threshold-ARCH model and show that the proposed estimators perform better than the MLE under the heavy-tailed distributions.

Keywords : Estimating Function, MLE, Threshold-ARCH

1. 서 론

대부분의 시계열 모형 이론에서 동일한 정규분포를 따르면서 시간에 관계없이 분산이 일정하다는 등 분산 가정 모형들이 많이 활용되었다. 그러나 실제자료들을 사용할 경우 안정적인 정규분포를 따르지 않는 동시에 분산 역시 시간에 따라 변동하고 있는 것이 현실이다.

Engle(1982)이 잔차의 이분산성을 고려한 논문을 발표한 이래 비선형 시계열 모형에 대한 연구가 매우 활발하게 진행되어져 왔다. 그러나 이러한 모형의 잔차항에 대한 가정이 대부분 정규분포를 가정하고 있었으나 Engle and Gonzalez-Rivera (1991)의 결과에 따르면 우리가 잔차항의 정확한 분포를 알고 있지 못한 상태에서 ARCH모형 형태에 정규성을 가정한 ML 추정법을 사용할 경우 심각한 효율성의 감소현상이 발생하고, 특히나 잔차항이 비대칭적인 분포이거나 첨도수치가 3보다 상당히 큰 분포를 따를 경우 그 감소폭이 매우 크게 나타난다는 것이다. 자료의 기저 분포가 알려져 있지 않을 때에 일반적으로 준모수적인 방법을 사용하는데 Li and Turtle(2000)은

1) 제1저자 : 서울특별시 동작구 흑석동 221번지 중앙대학교 통계학과 부교수
E-mail : sahm@cau.ac.kr
2) 서울특별시 동작구 흑석동 221번지 중앙대학교 통계학과
E-mail : jriano@cau.ac.kr

Godambe(1985, 1991)가 제안한 준모수적인 방법인 Estimating Function(EF) 추정방법을 이용하여 정규분포가 아니 경우에 있어 추정치의 MSE(Mean Squared Error)를 줄여줄 수 있는 결과를 ARCH 모델에 대해 보였다. EF추정방법은 점근적 정규성을 가정한 ML추정법과 같이 대규모 표본을 필요로 하지 않고 소표본에도 적용가능하다는 장점과 잔차항의 분포가 비정규분포인 경우 Engle and Gonzalez-Rivera (1991)가 제안한 준모수적 추정치에 비해 효율성이 더 증대된다는 사실을 입증하였다.

여기에 추가적으로 비선형 시계열 모형의 경우를 살펴보면, 기존의 ARCH, GARCH의 모형은 오차항에 대해 제곱 합들의 합을 이용하여 표현하였기 때문에 양(positive)의 값으로만 나타내었다. 즉, 변동의 양(positive)과 음(negative)크기의 상이함을 인정하지 않았다. 이러한 관점에서 Engle과 Bollerslev의 모형은 예를 들어 주식시장에서 호황일 때 보다 불황일 때 급격한 변동을 설명하지 못하고 있다는 단점을 지니고 있다. 실물 경제상황의 이해와 적용측면에서 잔차항이 가지고 있는 변동의 양(positive)과 음(negative)을 차별화하여 모형에 적시키는 것이 현실 경제자료를 수치적으로 표현하는데 더 적합할 것이다. 이에 Geweke (1986)은 log-ARCH 모형을 제안하였는데, 이 모형은 ARCH모형에서 설명하지 못했던, 변동의 양과 음의 차이를 나타내는 모형이었다. 뿐만 아니라 log-ARCH 모형의 로그 우도 함수의 추정이 상대적으로 쉬워지게 되는 결과를 얻게 되었다. 여기에 추가적으로 Zakoian (1994)은 다른 측면에서 양과 음의 효과를 차별화하는 Threshold-ARCH 모형을 제안하였다. Treshold-ARCH 모형은 기존의 GARCH 모형과 많은 유사점을 보이면서도, 양과 음의 효과를 가법성 방식을 통해 제시함으로써 감소추세에 있는 자료들에 대해 보다 시각적으로 효과차이를 뚜렷이 하였다. 본 논문에서는 기존의 이분산성 모형이 가지고 있는 문제점들을 실제 경제상황에 최적화하기 위하여, Zakoian(1994)이 제안한 Threshold-ARCH모형에 EF추정법을 적용하여 EF 방정식의 해인 추정치의 성능을 MLE와 비교하여 보았다.

2. Threshold-ARCH 모형

일반적으로 실물경기 자료의 경우 시장이 하락세에 있을 때 시장에서 음(-)의 영향력이 동일한 크기의 양(+)의 영향력에 비해 분산 변동성에 훨씬 큰 영향을 미친다. 그러나 앞 절에서 제시한 ARCH형태 모형은 조건부 분산의 값이 항상 양의 값을 갖게 하기 위하여 모수에 일정한 제약조건을 가하고 있는데, 이 제약조건에 의해 현재의 변동성과 미래의 변동성간의 음(-)의 상관관계를 고려하고 있지 있다. 따라서 이러한 문제들을 해소해 보기 위해 Threshold-ARCH 모형을 살펴보도록 하자.

Threshold-ARCH 모형은 Zakoian(1994)과 Li and Li(1996)에 의해 제안되었는데, 자료가 가지고 있는 정보의 영향력이 양(+)과 음(-)형태에 대해 비대칭적 효과가 존재하는지 여부를 분석하기 위하여 제안되었다.

$$
\begin{aligned}
&y_t = \phi y_{t-1} + e_t \quad t = ,1,2,\ldots \\
&e_t = \sigma_t h_t, \qquad \sigma_t \sim iid.N(0,1) \\
&e_t | \Phi_t \sim (0, h_t)
\end{aligned}
$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i^+ e_{t-i}^+ - \alpha_i^- e_{t-i}^-)$$
$$e_t^+ = max(e_t, 0),$$
$$e_t^- = min(e_t, 0) \quad (1)$$

우선, MLE를 구하기 위해서 Threshod- ARCH(1)모형에 대한 로그 우도 추정치를 구한다. σ_t는 정규분포를 가정하고 있으므로 다음과 우도함수를 갖는다.

$$l = -\sum_{t=2}^{n} \log h_t - \sum_{t=2}^{n} \frac{e_t^2}{2h_t^2} \quad , \quad \theta = (\phi, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_q) \quad (2)$$

모수 θ에 대한 최대 우도 추정치 $\hat{\theta}_T$는 우측 연속 미분 가능한 함수에 기반한 추정치의 특별한 경우이다.

정리2.1 (Gourieroux ,1997)

적절한 조건 하에서 이 $\hat{\theta}_t$는 일치 추정량이며, 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_T) \xrightarrow{d} N(0, J^{-1} I \, J^{-1})$$
$$J = E_0 [\frac{\partial l_t}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial l_t}{\partial \theta'}], \; E_0[-\frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'}] = I \quad (3)$$

여기서 분포의 정규성을 가정하면 두 행렬 $J = I$ 이 성립함을 알 수 있다. 뉴튼-랩슨 방법을 사용하여 모수(α_0, α_1^+, α_1^-)에 대한 최대우도 추정치를 구할 수 있다. 초기치는 최소제곱 추정치로 하며, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \end{pmatrix}_0 + J^{-1} \cdot E[\frac{\partial l_t}{\partial \theta}] \quad (4)$$

EF 추정을 위해 다음과 같은 정리가 필요하다.

정리2.2
Threshold- ARCH(1)모형에서 EF 추정방정식의 해는 다음과 같다.

$$l_0^* = -\sum_{t=1}^{T}\frac{\frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0}}{h_t^2(\gamma_{2t}+2-\gamma_{1t}^2)}\,g_{2t}$$
$$l_1^* = -\sum_{t=1}^{T}\frac{\frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1^+}}{h_t^2(\gamma_{2t}+2-\gamma_{1t}^2)}\,g_{2t}$$
$$l_2^* = -\sum_{t=1}^{T}\frac{\frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1^-}}{h_t^2(\gamma_{2t}+2-\gamma_{1t}^2)}\,g_{2t} \tag{5}$$

여기서,

$$g_{1t} = y_t - x_t\beta,\quad g_{2t} = (y_t - x_t\beta)^2 - h_t - \gamma_{1t}h_t^{1/2}\,(y_t - x_t\beta)\ ,$$
$$\gamma_{1t} = \frac{E[(y_t - x_t\beta)^3 \mid \Phi_{t-1}]}{h_t^{3/2}},\ \gamma_{2t} = \frac{E[(y_t - x_t\beta)^4 \mid \Phi_{t-1}]}{h_t^2} - 3 \tag{6}$$

증명: Li and Turtle(2000) 과 Godambe and Thompson(1986) 참조.

위의 선형 결합식들을 이용하여 정규분포와 t분포에서 EF 추정방식의 효율성을 알아보기 위한 모의실험을 하기 위해서 추정하고자 하는 모수 α_0, α_1^+, α_1^-에 관한 분산-공분산 행렬은 다음과 같다.

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기서, 각 행렬원소들은 다음과 같이 주어진다.

$$V_{11} = E(\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_0} \mid \Phi_{t-1}),\quad V_{12} = V_{21} = E(\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_1^+}\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_1^+} \mid \Phi_{t-1})$$
$$V_{22} = E((\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_1^+}\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_1^+})^2 \mid \Phi_{t-1})$$
$$V_{13} = V_{31} = E(\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_1^-}\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_1^-} \mid \Phi_{t-1}),\quad V_{33} = E((\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_1^-}\frac{\partial l_1^*}{\partial \alpha_1^-})^2 \mid \Phi_{t-1}) \tag{8}$$

MLE 추정방식에서와는 달리 $V \neq I$ 이 되어 각 행렬에 대하여 각각 미분한 값을 통해 다음의 추정식을 구성한다. 그리고, 구성된 행렬식들을 이용하여 뉴턴랩슨 방법을 사용하여 모수(α_0, α_1^+, α_1^-)에 대한 최대우도 추정치를 구할 수 있다. 초기치는 최소제곱 추정치로 하며, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$V = E_0\left[\frac{\partial l_t^*}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial l_t^*}{\partial \theta'}\right], \quad I = E_0\left[-\frac{\partial^2 l_t^*}{\partial \theta \partial \theta'}\right]$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1^+ \\ \alpha_1^- \end{pmatrix}_0 + V^{-1} I^{-1} V^{-1} \tag{9}$$

3. 모의실험

모의실험 방식은 기존의 ML추정법에 비해 EF추정법이 가지고 있는 효율성을 알아보고자 정규분포, T분포를 사용하였으며, 여기서 두터운 꼬리성향을 가지게 되는 경우 나타나는 효율성과 Threshold-ARCH형태에서 보여주는 잔차항들의 비대칭적 성향을 가지게 되는 경우 나타나는 추정량들의 효율성을 볼 수 있다. 추정방식의 비교는 기본적으로 각 추정방식에서 얻어진 추정치에 대한 Bias와 Root Mean Squared Error($RMSE = \sqrt{bias^2 + (\text{표준오차})^2}$) 를 비교하였다. 또한 분산 추정치에 대한 efficiency를 다음과 같이 정의한다.

$$RE_\theta = \frac{var(\widehat{\theta_{ML}})}{var(\widehat{\theta_{EF}})} \tag{10}$$

다음으로 Threshold-ARCH(1) 모형에 대해 모수들($\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-$)을 MLE방법과 EF방법을 통해 추정치를 구하였다. 추정을 위하여 주어진 모수 $\alpha_0, \alpha_1^+, \alpha_1^-$ 의 값은 각각 0.3, 0.2, 0.4 이며, 뉴튼 렙슨방법의 초기 추정값은 최소제곱추정치를 사용하였다. 그리고, 표본의 크기는 2000으로 각각의 모수들을 추정하였다. 하지만, α_1^+ 과 α_1^- 에 관련된 표본크기는 양(positive)와 음(negative)의 값을 하나의 분포에서 추출하기 때문에 확률적으로 각각 1000개씩이다. 추가적으로 각각의 추정치는 100회 반복을 통해 구하였다.

잔차항 분포의 특성에 대한 추정방식의 비교를 위하여 정규분포와 이보다 꼬리 부분이 두터운 자유도가 5인 T분포(T(5)분포)를 통해 모의실험을 실시하였고 그 결과값은 다음의 표와 같다.

[표4.1] e_t=iid $N(0,1)$, $\phi=0.3$, α_0=0.3, α_1^+=0.2, α_1^-=0.4

		평균	표준오차	Bias	RMSE	RE
$\hat{\phi}$	MLE	0.3017	0.0291	0.0017	0.0291	0.94
	EF	0.2924	0.0309	−0.0076	0.0319	
$\widehat{\alpha_0}$	MLE	0.3000	0.0147	0.0000	0.0147	1.00
	EF	0.3001	0.0148	0.0001	0.0148	
$\widehat{\alpha_1^+}$	MLE	0.1960	0.0346	−0.0040	0.0348	0.89
	EF	0.2049	0.0389	0.0049	0.0392	
$\widehat{\alpha_1^-}$	MLE	0.3963	0.0625	−0.0037	0.0626	1.07
	EF	0.3927	0.0585	−0.0073	0.0589	

[표4.2] e_t=iid $N(0,1)$, $\phi=0.5$, α_0=0.3, α_1^+=0.2, α_1^-=0.4

		평균	표준오차	Bias	RMSE	RE
$\hat{\phi}$	MLE	0.4962	0.0268	−0.0038	0.0271	1.06
	EF	0.4904	0.0253	0.1904	0.1921	
$\widehat{\alpha_1^+}$	MLE	0.2991	0.0141	−0.0009	0.0141	1.04
	EF	0.3000	0.0136	0.0000	0.0136	
$\widehat{\alpha_1^+}$	MLE	0.1978	0.0456	−0.0022	0.0457	1.12
	EF	0.2023	0.0409	0.0023	0.0409	
$\widehat{\alpha_1^-}$	MLE	0.3959	0.0568	−0.0041	0.0569	0.90
	EF	0.3949	0.0629	−0.0051	0.0631	

[표4.3] e_t=iid $T(5)$, $\phi=0.3$, α_0=0.3, α_1^+=0.2, α_1^-=0.4

		평균	표준오차	Bias	RMSE	RE
$\hat{\phi}$	MLE	0.2984	0.0293	−0.0016	0.0294	1.05
	EF	0.2934	0.0278	−0.0066	0.0286	
$\widehat{\alpha_0}$	MLE	0.3117	0.0167	0.0117	0.0204	1.08
	EF	0.3125	0.0154	0.0125	0.0198	
$\widehat{\alpha_1^+}$	MLE	0.2038	0.0493	0.0038	0.0494	1.04
	EF	0.2024	0.0475	0.0024	0.0476	
$\widehat{\alpha_1^-}$	MLE	0.4019	0.0802	0.0019	0.0802	1.25
	EF	0.4029	0.0643	0.0029	0.0644	

[표4.4] e_t=iid $T(5)$, $\phi=0.5$, α_0=0.3, α_1^+=0.2, α_1^-=0.4

		평균	표준오차	Bias	RMSE	RE
$\hat{\phi}$	MLE	0.4930	0.0221	-0.0070	0.0231	1.08
	EF	0.4970	0.0205	-0.0030	0.0207	
$\widehat{\alpha_0}$	MLE	0.3088	0.0190	0.0088	0.0209	1.07
	EF	0.3118	0.0178	0.0118	0.0213	
$\widehat{\alpha_1^+}$	MLE	0.1986	0.0544	-0.0014	0.0544	1.07
	EF	0.2050	0.0508	0.0050	0.0511	
$\widehat{\alpha_1^-}$	MLE	0.4230	0.0686	0.0230	0.0723	1.64
	EF	0.4408	0.0418	0.0408	0.0584	

[표4.1]에서 [표4.4]까지에서 ARE값을 통해 살펴보면, 정규분포에서는 ML 추정치가 효과적인 경우가 있음을 확인할 수 있지만, 두터운 꼬리를 보여주는 T(5)분포에서 MLE 추정치보다 EF 추정치가 모수의 초기값 변화에 상관없이 분산이 작음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 Threshold-ARCH 이분산 모형을 이용하여 모의실험 결과 bias, RMSE 비교와 각 추정량들의 RE 비교를 통해서 정규분포에서는 MLE추정이 모수추정에 적합한 경우를 발견할 수 있었으나 정규분포에 비해 두터운 꼬리형태를 보이고 있는 T(5)분포에서는 모수의 초기값에 상관없이 EF추정이 적합하다고 할 수 있다.

위의 내용을 종합할 때 오차항의 분포가 꼬리가 두터운 분포일 경우에 EF 추정치가 ML 추정치보다 성능이 우수함을 알 수 있으며, 분산의 변동성이 커지는 시계열 자료에서 ML 추정방법보다는 EF 추정방법이 효과적으로 시장분석에 사용될 수 있음을 알 수 있다.

참고문헌

1. Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
2. Bollerslev, T. and Wooldridge, J. M. (1988), “Quasi-Maximum likelihood Estimation of Dynamic Models with Time Varying Covariance", *Econometric Reviews*, 11, pp. 143-172.
3. Chandra, S. A. and Taniguchi, M. (2001), "Estimating Function for Nonlinear Time Series Models", *The Institute of Statistical Mathematics*, 53, pp. 125-141.

4. Desmond, A. F. (1997), "Optimal estimating functions, quasi-likelihood and statistical modeling", *Journal of Statistical Planning and Inference,* 60, pp. 77-121.
5. Drost, F. C. and Klassen, C. A. J. (1997), "Efficient Estimation in Semi-parametric GARCH Models", *Journal of Econometrics*, 81, pp. 193-221.
6. Engle, R. F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 50, pp. 987-1008.
7. Engle, R. F. and Bollerslev, T. (1986),"Modeling the Persistence of Conditional Variances", *Econometric Reviews*, 5, pp. 81-87.
8. Engle, R. F. and Gonalez-Rivera, G. (1991), "Semi-parametric ARCH Models", *Journal of Business & Economic Statistics*, 9, No. 4, pp. 345-359.
9. Geweke, J. (1986), "Comment on Modeling the Persistence of Conditional Variances", *Journal of Financial Economics*, 19, pp. 3-29.
10. Godambe, V. P. (1991), *"Estimating Functions"*, Oxford University Press.
11. Godambe, V. P. (1985), "The Foundation of Finite Sample Estimation in Stochastic Processes", *Biometrika*, 72, pp. 419-428.
12. Godambe, V. P. and Heyde, C. C. (1987), "Quasi-likelihood and Optimal Estimation", *International Statistical Review*, 55, pp. 231-244.
13. Godambe, V. P. and Thompson, M. E. (1989), "An Extension of Quasi-likelihood Estimation", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 22, pp. 137-172.
14. Gourieroux, C. (1997), *"ARCH Models and Financial Applications"*, Springer.
15. Heyde, C. C. (1989), "Quasi-likelihood and Optimality of Estimating Function :Some Current Unifying Themes", *Bulletin of the International Statistical Institute*, Book 1, pp. 19-29.
16. Li, D.X. and Turtle, H. J. (2000), "Semi-parametric ARCH Models: An Estimating Function Approach", *Journal of Business and Economic Statistics*, 2. pp. 174-186.
17. Zakoian, J. M. (1994), "Threshold Heteroscedastic Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18. pp. 931-956.

[2004년 10월 접수, 2005년 1월 채택]