Journal of Korean
Data & Information Science Society
2005, Vol. 16, No. 1, pp. 1~11

Bounds for Network Reliability[1)]

Mi Ok Jeong[2)] · Kyung Eun Lim[3)] · Eui Yong Lee[4)]

Abstract

A network consisting of a set of N nodes and a set of links is considered. The nodes are assumed to be perfect and the states of links to be binary and associated to each other. After defining a network structure function, which represents the state of network as a function of the states of links, we obtain some lower and upper bounds on the network reliability by adopting minmax principle and minimal path and cut set arguments. These bounds are given as functions of the reliabilities of links. The bridge network is considered as an example.

Keywords : Associate, Minimal path and cut set arguments, Minmax principle, Network reliability

1. 서 론

인터넷 사용자의 급속한 증가와 이에 따른 인터넷 트래픽의 증가에 따라 네트워크의 신뢰도는 중요한 문제로 부각되고, 이에 대한 연구도 활발히 진행되고 있다. Brecht과 Colbourn(1989), Brown, Colbourn과 Devitt(1993), Liu, Cheng과 Liu(2000) 등은 나름대로 네트워크의 신뢰도를 정의하고, 이들의 상한 및 하한을 제시하고 있다. 그러나 대부분의 기존 연구에서는 네트워크를 구성하는 노드나 링크들이 서로 독립적으로 작동한다는 가정 하에 분석이 이루어지고 있다.

본 논문에서는 네트워크를 구성하는 요소 중 노드는 완전하다고 가정하고, 링크들의 작동여부가 서로 연관되어 있는 네트워크를 연구한다. 링크들의 상태로부터 네트워크의 상태를 나타내는 구조함수를 정의하고, 네트워크 신뢰도를 링크들의 신뢰도를

---

1) This Research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2003.

2) First Author : Dept. of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742, Korea.

3) Dept. of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742, Korea.

4) Corresponding Author : Professor, Dept. of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742, Korea.
E-mail : eylee@sookmyung.ac.kr

통해 정의한다. 시스템의 신뢰도 연구에서는 부품들의 작동여부가 서로 독립이 아니고 서로 연관되어 있는 경우, 시스템 신뢰도를 부품의 신뢰도로부터 바로 구하는 것이 불가능하므로 기존의 시스템 신뢰성 연구를 기초하여 네트워크 신뢰도의 여러 상한 및 하한을 구한다. [Brown과 Proschan(1981) pp. 20-39 참조] 또한 브릿지 네트워크를 예로 들어 신뢰도의 여러 바운드를 구하고, 이들을 서로 비교해본다.

2. 네트워크의 구조함수 및 신뢰도

네트워크는 노드와 서로 다른 두 노드를 잇는 링크로 구성된다. 이 때 노드들의 집합을 $V=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N\}$이라 하고, 임의의 서로 다른 두 노드 i와 j를 잇는 링크 (i,j)들의 집합을 A라 하자. 이러한 링크들의 상태를 다음과 같은 이항 지시변수로 정의 할 수 있다.

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{링크 } (i,j)\text{가 작동할 경우}\\ 0, & \text{그렇지 않을 경우}\end{cases}$$

또한 모든 노드들은 고장이 나지 않고 완벽하다고 가정한다. 즉, 노드들의 고장은 링크들의 고장에 포함될 수 있고, 네트워크의 상태는 단지 링크들의 상태에 의해서만 결정된다. 이는 네트워크의 연구에서 많이 사용되는 가정이며, Liu, Cheng and Liu(2000)는 반대로 링크가 완전하고 노드가 불완전한 경우를 다루었다.

네트워크의 상태는 링크들의 상태에 의해서만 결정되므로, 특정한 두 노드 사이의 통신 상태를 나타내는 i와 j 사이의 구조함수 ϕ_{ij}를 다음과 같이 정의한다.

$$\phi_{ij}(x)=\begin{cases}1, & \text{노드 } i\text{와 노드 } j \text{ 사이에 통신이 가능할 경우}\\ 0, & \text{그렇지 않을 경우}\end{cases}$$

여기서, $x=\{x_{ij}\mid (i,j)\in A\}$는 링크들의 상태 벡터이며, 두 노드 사이에 작동하는 링크들로 구성된 경로가 최소한 하나 있으면 두 노드는 통신이 가능하다고 한다.

네트워크 내의 특정한 두 노드들 사이에서의 최소경로(minimal path)와 차단(cut)은 시스템의 구조함수 연구에서와 같이 정의할 수 있다. 즉, 노드 i와 j 사이에 통신이 가능하게 하는 최소의 링크들의 집합을 i와 j 사이의 최소경로집합이라 하며, B_{ij}^{l}, $1\le i< j\le N$, $l=1,\cdots,p_{ij}$로 나타낸다. 또한 노드 i와 j 사이에 통신이 단절되게 하는 최소의 링크들의 집합을 i와 j 사이의 최소차단집합이라 하며, C_{ij}^{l}, $1\le i< j\le N$, $l=1,\cdots,k_{ij}$로 나타낸다.

노드 i와 j 사이의 구조함수는 시스템 신뢰도 이론의 구조함수 이론을 활용하면

$$\phi_{ij}(x) = \coprod_{1 \le l \le p_{ij}} \prod_{(m,n) \in B_{ij}^{l}} x_{mn} = \prod_{1 \le l \le k_{ij}} \coprod_{(m,n) \in C_{ij}^{l}} x_{mn}$$

로 정의된다. 여기서, $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$이다. 또한, 링크들의 상태를 네트워크 전체의 상태로 연결시켜 주는 네트워크의 구조함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{모든 노드들 사이에 통신이 가능할 경우} \\ 0, & \text{그렇지 않을 경우} \end{cases}$$

네트워크가 통신이 가능하려면 모든 노드들 사이에 통신이 가능해야 하므로, 네트워크 전체의 구조함수는 다음과 같이 노드 i와 j의 구조함수들의 최소값으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \min_{1 \le i < j \le N} \phi_{ij}(x) \\ &= \min_{1 \le i < j \le N} \{ \coprod_{1 \le l \le p_{ij}} \prod_{(m,n) \in B_{ij}^{l}} x_{mn} \} \\ &= \min_{1 \le i < j \le N} \{ \prod_{1 \le l \le k_{ij}} \coprod_{(m,n) \in C_{ij}^{l}} x_{mn} \} \end{aligned}$$

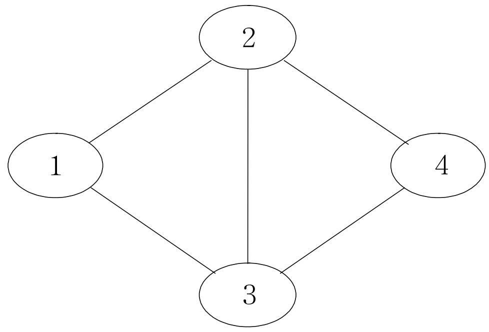
또한, 이러한 네트워크의 구조함수를 네트워크 전체에 대한 최소경로와 차단을 이용하여서도 표현할 수 있다. 네트워크 전체에 대한 최소경로집합을 $P_l,\ l = 1, \cdots, p$로, 네트워크 전체에 대한 최소차단집합을 $K_l,\ l = 1, \cdots, k$로 나타내면, 네트워크의 구조함수는 다음과 같다.

$$\phi(x) = \coprod_{1 \le l \le p} \prod_{(m,n) \in P_l} x_{mn} = \prod_{1 \le l \le k} \coprod_{(m,n) \in K_l} x_{mn}$$

위에서 정의한 네트워크의 네 가지 구조함수는 모두 동일한 구조함수를 나타내게 된다.

예. 브릿지 네트워크의 구조함수

브릿지 네트워크는 <그림 1>과 같은 형태를 가진다.



<그림 1>브릿지 네트워크

브릿지 네트워크 전체에 대한 최소경로집합은 {(1,2), (2,4), (3,4)}, {(2,4), (3,4), (1,3)}, {(3,4), (1,3), (1,2)}, {(1,3), (1,2), (2,4)}, {(1,2, (2,3), (3,4)}, {(1,3), (2,3), (2,4)}, {(1,2), (2,3), (2,4)}, {(1,3), (2,3), (3,4)}이 되고, 최소차단집합은 {(1,2), (1,3)}, {(2,4), (3,4)}, {(1,2, (2,3), (3,4)}, {(1,3), (2,3), (2,4)}, {(1,2), (2,4), (2,3)}, {(1,3), (2,3), (3,4)}이 된다. 이를 통해 구조함수를 구해보면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\phi(x) = & \coprod_{1 \le l \le p} \prod_{(m,n) \in P_l} x_{mn} = \prod_{1 \le l \le k} \coprod_{(m,n) \in K_l} x_{mn} \\
= & \; x_{12}x_{13}x_{34} + x_{12}x_{24}x_{34} + x_{12}x_{23}x_{34} + x_{12}x_{23}x_{24} + x_{12}x_{13}x_{24} \\
& + x_{13}x_{23}x_{24} + x_{13}x_{23}x_{34} + x_{13}x_{24}x_{34} - 2x_{12}x_{13}x_{23}x_{24} \\
& - 2x_{12}x_{23}x_{24}x_{34} - 2x_{12}x_{13}x_{23}x_{34} - 2x_{13}x_{23}x_{24}x_{34x} \\
& - 3x_{12}x_{13}x_{24}x_{34} + 4x_{12}x_{13}x_{23}x_{24}x_{34}
\end{aligned}
$$

만약 네트워크가 복잡해지면 노드 i와 j 사이의 최소경로집합이나 최소차단집합을 찾아서 구조함수를 구하는 것이 좀 더 수월하리라 생각된다. 예를 들어, 노드 1과 2 사이의 최소경로집합은 {(1,2)}, {(1,3), (2,3)}, {(1,3), (3,4), (2,4)}이고, 노드 2와 3 사이는 {(2,3)}, {(1,2), (1,3)}, {(2,4), (3,4)}이며, 노드 1과 4 사이는 {(1,2), (2,4)}, {(1,3), (3,4)}, {(1,2), (2,3), (3,4)}, {(1,3), (2,3), (2,4)}이다. 또, 노드 1과 2 사이의 최소차단집합은 {(1,2), (1,3)}, {(1,2), (2,3), (2,4)}, {(1,2), (2,3), (3,4)}이고, 노드 2와 3 사이는 {(1,2), (2,3), (2,4)}, {(1,2), (2,3), (3,4)}, {(1,3), (2,3), (2,4)}, {(1,3), (2,3), (3,4)}이며, 노드 1과 4 사이는 {(1,2), (1,3)}, {(2,4), (3,4)}, {(1,2), (2,3), (3,4)}, {(1,3), (2,3), (2,4)}이다. ■

링크 (i,j)의 상태를 이항 확률변수 X_{ij}로 놓을 때, 이 링크의 작동할 확률 $p_{ij} = E(X_{ij})$를 링크 (i,j)의 신뢰도라 한다. 네트워크의 신뢰도는

$$P\{\phi(X)=1\} = h(p) = E[\phi(X)]$$

로 정의된다. 여기서, $X=\{X_{ij} \mid (i,j)\in A\}$, $p=\{p_{ij} \mid (i,j)\in A\}$이다. 링크들의 작동여부가 서로 독립일 때는 구조함수를 이용하여 링크들의 신뢰도로부터 시스템의 신뢰도를 구하는 것이 가능하다. 그러나 링크들의 상태가 서로 연관되어 있는 경우는 직접 구하는 것이 불가능해지며, 이 경우 우리는 네트워크 신뢰도의 상한 및 하한을 구하게 된다. 네트워크 신뢰도의 바운드에 관한 연구는 Brecht과 Colbourn(1989), Brown, Colbourn와 Devitt(1993) 등이 있다.

확률변수들 $X_1,\cdots,X_n$이 모든 증가함수 Γ, Δ에 대해

$$cov[\Gamma(T),\ \Delta(T)] \geq 0$$

이면 서로 연관되어 있다(associated)고 한다. [Barlow and Proschan(1981) p.29 참조] 만약 확률변수들이 연관되어 있다면, 다음의 부등식이 성립된다.

$$P[\prod_{i=1}^{n} X_i=1] \geq \prod_{i=1}^{n} P[X_i=1]$$
$$P[\coprod_{i=1}^{n} X_i=1] \leq \coprod_{i=1}^{n} P[X_i=1]$$

위의 두 부등식은 네트워크 신뢰도의 상한 및 하한을 구하는데 기초가 되는 중요한 부등식이 된다.

3. 네트워크 신뢰도의 여러 바운드

3.1. i와 j 사이의 최소경로(차단)을 이용한 접근방법

이 절에서는 노드 i와 j 사이의 최소경로(차단)을 이용하여 네트워크 신뢰도의 상한 및 하한을 구한다. 이를 위해 $P\{\phi(X)=1\}$와 $P\{\phi_{ij}(X)=1\}$ 사이의 관계에 대해 먼저 살펴보자. 우선, X가 연관되어 있을 때, 이들의 증가함수들도 서로 연관이 되게 된다. [Brown과 Proschan(1981) p.30 참조] ϕ_{ij}들은 모두 증가함수이므로

$$P\{\phi(X)=1\} = P\left\{\min_{1\leq i<j\leq N} \phi_{ij}(X)=1\right\} \geq \prod_{1\leq i<j\leq N} P\{\phi_{ij}(X)=1\}$$

이 성립한다. 또, $\phi(X) = \min_{1 \le i < j \le N} \phi_{ij}(X)$이므로

$$\phi(x) \le \phi_{ij}(x) \qquad \textit{for all} \quad 1 \le i < j \le N$$

$$\Rightarrow P\{\phi(X)=1\} \le P\{\phi_{ij}(X)=1\} \qquad \textit{for all} \quad 1 \le i < j \le N$$

$$\Rightarrow P\{\phi(X)=1\} \le \min_{1 \le i < j \le N} P\{\phi_{ij}(X)=1\}$$

이다. 따라서,

$$\prod_{1 \le i < j \le N} P\{\phi_{ij}(X)=1\} \le P\{\phi(X)=1\} \le \min_{1 \le i < j \le N} P\{\phi_{ij}(X)=1\} \tag{1}$$

이 성립한다. 이를 활용하면, $P\{\phi_{ij}(X)=1\}$의 바운드를 시스템 신뢰도 이론에 기초하여 구한 후, 전체 네트워크의 바운드를 구할 수 있다.

(i) Trivial Bounds

두 노드 사이의 네트워크는 같은 수의 링크를 갖는 시리즈(series) 네트워크보다는 신뢰도가 높고 병렬(parallel) 네트워크보다는 신뢰도가 낮다는 사실과 부등식 (1)을 이용하면

$$\prod_{1 \le i < j \le N} \{ \prod_{(i,j) \in A} p_{ij} \} \le h(p) \le \min_{1 \le i < j \le N} \{ \coprod_{(i,j) \in A} p_{ij} \}$$

을 얻을 수 있다.

예. 브릿지 네트워크 ($p_{12} = p_{13} = p_{23} = p_{24} = p_{34} = p$인 경우)

$$p^{30} \le h(p) \le 1-(1-p)^5$$

(ii) Minmax Bounds

시스템 신뢰도 이론의 minmax 원리를 두 노드 i와 j 사이에 응용하면

$$\max_{1 \le l \le p_{ij}} P\left\{ \min_{(m,n) \in B_{ij}^l} X_{mn} = 1 \right\} \le P\{\phi_{ij}(X)=1\} \le \min_{1 \le l \le k_{ij}} P\left\{ \max_{(m,n) \in C_{ij}^l} X_{mn} = 1 \right\}$$

이 되고, 따라서 부등식 (1)에 의해,

$$\prod_{1\le i<j\le N}\left\{\max_{1\le l\le p_{ij}} P\left[\min_{(m,n)\in B_{ij}^l} X_{mn}=1\right]\right\} \le h(p)$$
$$\le \min_{1\le i<j\le N}\left\{\min_{1\le l\le k_{ij}} P\left[\max_{(m,n)\in C_{ij}^l} X_{mn}=1\right]\right\}$$

이 된다. 만약, 링크들이 연관되어 있다면

$$\max_{1\le l\le p_{ij}} \prod_{(m,n)\in B_{ij}^l} p_{mn} \le P\{\phi_{ij}(X)=1\} \le \min_{1\le l\le k_{ij}} \coprod_{(m,n)\in C_{ij}^l} p_{mn}$$

이 되고, 따라서 부등식 (1)에 의해,

$$l_m'(p)=\prod_{1\le i<j\le N}\left\{\max_{1\le l\le p_{ij}} \prod_{(m,n)\in B_{ij}^l} p_{mn}\right\} \le h(p)$$
$$\le \min_{1\le i<j\le N}\left\{\min_{1\le l\le k_{ij}} \coprod_{(m,n)\in C_{ij}^l} p_{mn}\right\}=u_m'(p)$$

을 얻을 수 있다.

예. 브릿지 네트워크 ($p_{12}=p_{13}=p_{23}=p_{24}=p_{34}=p$인 경우)

$$p^7 \le h(p) \le 1-(1-p)^2$$

(iii) 최소경로(차단)집합을 이용한 Bounds

시스템 신뢰도의 최소경로(차단)집합을 이용한 바운드 이론을 두 노드 i와 j 사이에 응용하면

$$\prod_{1\le l\le k_{ij}} P\{\coprod_{(m,n)\in C_{ij}^l} X_{mn}=1\} \le P\{\phi_{ij}(X)=1\} \le \coprod_{1\le l\le p_{ij}} P\{\prod_{(m,n)\in B_{ij}^l} X_{mn}=1\}$$

이 되고, 따라서 부등식 (1)에 의해,

$$\prod_{1\le i<j\le N}\{\prod_{1\le l\le k_{ij}} P[\coprod_{(m,n)\in C_{ij}^l} X_{mn}=1]\} \le h(p) \le \min_{1\le i<j\le N}\{\coprod_{1\le l\le p_{ij}} P[\prod_{(m,n)\in B_{ij}^l} X_{mn}=1]\}$$

을 얻을 수 있다. 만약, 링크들이 독립이면

$$\prod_{1\le l\le k_{ij}} \coprod_{(m,n)\in C_{ij}^{l}} p_{mn} \le P\{\phi_{ij}(X)=1\} \le \coprod_{1\le l\le p_{ij}} \prod_{(m,n)\in B_{ij}^{l}} p_{mn}$$

이 됨으로, 부등식 (1)에 의해 아래와 같이 구할 수 있다.

$$l'(p) = \prod_{1\le i<j\le N} \{ \prod_{1\le l\le k_{ij}} \coprod_{(m,n)\in C_{ij}^{l}} p_{mn} \} \le h(p) \le \min_{1\le i<j\le N} \{ \coprod_{1\le l\le p_{ij}} \prod_{(m,n)\in B_{ij}^{l}} p_{mn} \} = u'(p)$$

예. 브릿지 네트워크 ($p_{12}=p_{13}=p_{23}=p_{24}=p_{34}=p$인 경우)

$$(1-(1-p)^2)^6(1-(1-p)^3\ )^{14} \le h(p) \le \{(1-(1-p^2)^2(1-p^3)^2\}$$

3.2. 전체 네트워크의 최소경로(차단)을 이용한 접근방법

이 절에서는 네트워크 신뢰도의 바운드를 전체 네트워크의 최소경로(차단)을 이용하여 4.1절에서 같은 방법으로 3가지 바운드를 구한다.

(i) Trivial Bounds

$$\prod_{(i,j)\in A} p_{ij} \le h(p) \le \coprod_{(i,j)\in A} p_{ij}$$

예. 브릿지 네트워크 ($p_{12}=p_{13}=p_{23}=p_{24}=p_{34}=p$인 경우)

$$p^5 \le h(p) \le 1-(1-p)^5$$

(ii) Minmax Bounds

$$\max_{1\le l\le p} P\left\{ \min_{(i,j)\in P_l} X_{ij}=1 \right\} \le h(p) \le \min_{1\le l\le k} P\left\{ \max_{(i,j)\in K_l} X_{ij}=1 \right\}$$

만약, 링크들이 연관되어 있다면, 다음과 같다.

$$l_m(p) = \max_{1\le l\le p} \prod_{(i,j)\in P_l} p_{ij} \le h(p) \le \min_{1\le l\le k} \coprod_{(i,j)\in K_l} p_{ij} = u_m(p)$$

예. 브릿지 네트워크 ($p_{12}=p_{13}=p_{23}=p_{24}=p_{34}=p$인 경우)

$$p^3 \leq h(p) \leq 1-(1-p)^2$$

(iii) 최소경로(차단)집합을 이용한 Bounds

$$\prod_{l=1}^{k} P\{\coprod_{(i,j)\in K_l} X_{ij}=1\} \leq h(p) \leq \coprod_{l=1}^{p} P\{\prod_{(i,j)\in P_l} X_{ij}=1\}$$

만약, 링크들이 독립이라면 아래와 같이 주어진다.

$$l(p)= \prod_{l=1}^{k} \coprod_{(i,j)\in K_l} p_{ij} \leq h(p) \leq \coprod_{l=1}^{p} \prod_{(i,j)\in P_l} p_{ij}=u(p)$$

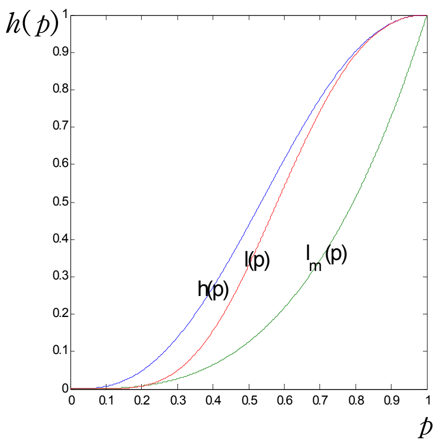
예. 브릿지 네트워크 ($p_{12}=p_{13}=p_{23}=p_{24}=p_{34}=p$인 경우)

$$\{1-(1-p)^2\}^2\{1-(1-p)^3\}^4 \leq h(p) \leq 1-(1-p^3)^8$$

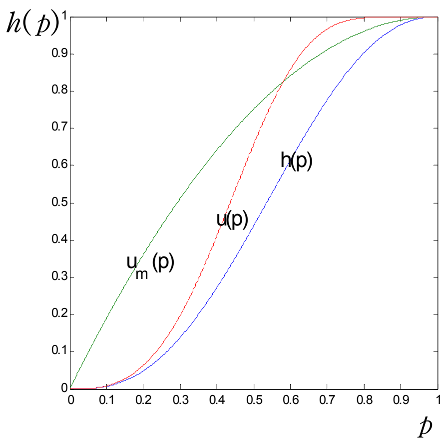
4. 브릿지 네트워크에서 신뢰도의 바운드 비교

지금까지 네트워크 신뢰도의 여러 상한 및 하한을 구해보았다. 이들을 일반적으로 상호 비교하는 것은 불가능하며 시스템 신뢰도 이론에서도 미해결 문제로 남아 있다. 이 절에서는 브릿지 네트워크를 예로 들어 링크들이 서로 독립인 경우에 3절에서 구한 여러 바운드들을 비교한다.

(i) 전체 네트워크의 최소경로(차단)을 이용한 접근방법



<그림 2> $h(p)$의 lower bounds

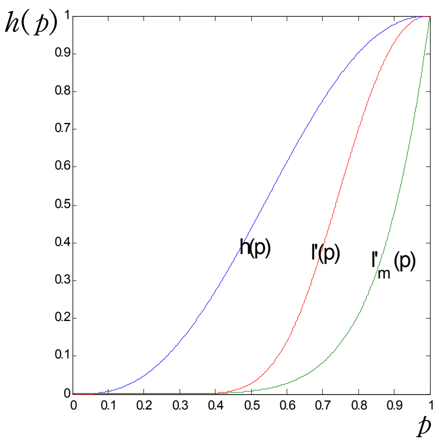


<그림 3> $h(p)$의 upper bounds

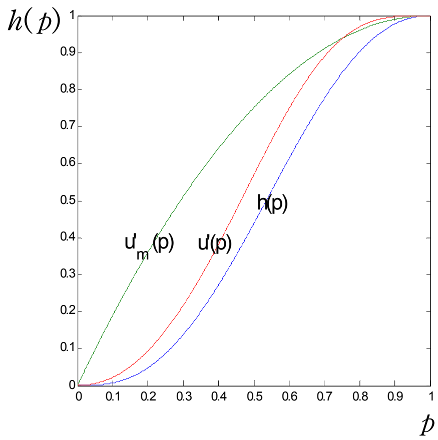
여기서, $h(p)$는 브릿지 네트워크의 실제 신뢰도 함수이며, $l(p)$와 $u(p)$는 전체 네트워크의 최소경로(차단)집합을 이용한 바운드이고, $l_m(p)$와 $u_m(p)$는 전체 네트워크의 minnmax 바운드이다.

<그림 2>와 <그림 3>을 보면, 하한은 최소차단집합을 이용한 바운드가 더 좋은 바운드임을 알 수 있으며, 상한은 p가 약 0.6이하에서는 최소경로집합을 이용한 바운드가, p가 0.6보다 큰 값일 때는 minmax 바운드가 더 좋은 바운드임을 알 수 있다.

(ⅱ) i와 j 사이의 최소경로(차단)을 이용한 접근방법



<그림 4> $h(p)$의 lower bounds



<그림 5> $h(p)$의 upper bounds

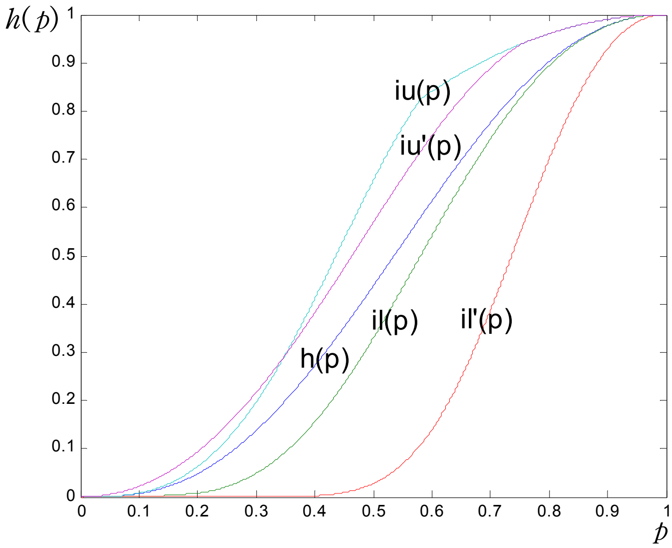
여기서, $h(p)$는 브릿지 네트워크의 실제 신뢰도 함수이며, $l'(p)$와 $u'(p)$는 노드 i와 j 사이의 최소경로(차단)집합을 이용한 바운드이고, $l'_m(p)$와 $u'_m(p)$는 노드 i와 j 사이의 minnmax 바운드이다.

<그림 4>와 <그림 5>를 보면, 하한은 최소차단집합을 이용한 바운드가 더 좋은 바운드임을 알 수 있으며, 상한은 p가 약 0.75이하에서는 최소경로집합을 이용한 바운드가, p가 0.75보다 큰 값일 때는 minmax 바운드가 더 좋은 바운드임을 알 수 있다.

(ⅲ) 개선된 바운드

<그림 6>은 <그림 2>~<그림 4>에서 선택된 좋은 바운드를 함께 나타낸 것으로 p에 따른 개선된 바운드를 구할 수 있다. 이 때 선택된 좋은 바운드는 하한의 경우 두 바운드 중 최대값이 되고, 상한의 경우는 두 바운드 중 최소값이 된다. <그림 6>을 살펴보면, 하한의 경우 전체 네트워크의 최소경로(차단)을 이용한 접근방법으로 구한 바운드가 더 좋음을 알 수 있으며, 상한의 경우는 p가 약 0.35 이상이면 노드 i와 j 사이의 최소경로(차단)을 이용한 접근방법으로 구한 바운드가 더 좋고 0.35 미만이

면 전체 네트워크의 최소경로(차단)집합을 이용한 바운드가 더 좋음을 알 수 있다.



<그림 6> $h(p)$의 개선된 바운드

참고문헌

1. Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981), Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Holt, Rienehart and Winston, New York.
2. Barlow, R. E. and Proschan, F. (1965), Mathematical Theory of Reliability, John Wiley and Sons, New York.
3. Brecht, T. B. and Colbourn, C. J. (1989), Multiplicative improvements in network reliability bounds, Networks, 19, pp.521-529.
4. Brown, J. I., Colbourn, C. J. and Devitt, J. S. (1993), Network transformations and bounding network reliability, Networks, 23, pp.1-17.
5. Liu, S., Cheng, K. and Liu, X. (2000), Network reliability with node failures, Networks, 35, pp.109-117.

[2004년 10월 접수, 2004년 12월 채택]