한국학교수학회논문집 제 8 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 8, Number 4, 423-444, December 2005

초등학교 학생들의 계산 능력과 수감각(Number Sense) 연구[1)]

방정숙[2)]

초등 수학교육에서 수감각을 적절히 활용하는 것이 매우 중요함에도 불구하고 이에 대한 연구는 상대적으로 부족한 실정이다. 이에 본 연구는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 기본적인 계산 능력과 수감각 수행 능력을 분석하였다. 특히, 수감각 연구에 초점을 두어, 수감각의 주요 구성요소별로 다양한 문제 상황에서 자연스럽게 수감각을 활용하는지, 어떤 수감각을 활용하는 지 등을 면밀하게 분석하였고, 이를 토대로 수감각 개발에 관한 시사점을 도출하였다.

주요용어 : 초등수학, 계산 능력, 수감각, 어림, 수와 연산, 기준척도

Ⅰ. 들어가는 말

최근 수학교육에서는 모든 학생들의 수학적 힘(mathematical power)의 개발을 강조하고 있다. 여기서 수학적 힘이란 비정형적인 문제를 해결하는 능력, 논리적으로 탐구하고 추측하며 추론하는 능력, 수학에 대해 그리고 수학을 통해 의사소통하는 능력, 수학의 여러 영역 간에 그리고 다른 지적 활동 간에 아이디어를 연계하는 능력, 자신감과 수학적 성향의 개발 등을 포함하고 있다(교육부, 1997; National Council Teachers of Mathematics[NCTM], 1991, 2000). 이러한 수학적 힘의 개발과 관련하여 초등 수학교육에서 가장 많은 비중을 차지하고 있는 수와 연산 영역에서는 학생들의 수감각 발달을 강조하고 있다.

수감각의 정의나 구성 요소는 학자에 따라서 다양하나, 대개 수에 대한 직관적 느낌과 수의 다양한 사용과 해석 능력, 정확하면서도 효율적으로 계산하고 실수를 감지하며 합리적으로 결과를 인지하는 능력, 수를 이해할 수 있고 일상생활에서 수를 효율적으로 사용할 수 있는 능력 등을 포함한다(Reys, 1992). 또한 NCTM(2000)에서는 수를 자연스럽게 분해하는 능력, 100이나 1/2과 같은 특정한 수를 사용하여 수를 표현하는 능력, 문제를 해결하는 데 있어서 산술적인 연산 간의 관계를 활용하는 능력, 십진 체계를 이해하는 능력, 수를 어림하고 이해하는 능력, 수의 상대적·절대적인 크기를 인지하는 능력 등을 강조하고 있다.

초등학교 학생들이 풍부한 수감각을 기르는 것이 중요함에도 불구하고, 그동안 대부분의 수학교실에서는 수의 읽기나 쓰기, 다소 기계적인 알고리즘이나 계산 능력 등이 상대적으로 강조되어 왔다. 다만, 최근에 제7차 수학과 교육과정의 실행과 더불어 교과서에 여러 가지

1) 이 논문은 한국교원대학교 2004년도 학술연구비 지원에 의해 연구되었음.
2) 한국교원대학교 (jeongsuk@knue.ac.kr)

어림 활동이 첨가되고 문제해결력 측면에서 수감각을 이용한 수학적 과제가 조금이나마 도입된 것은 다행한 일이다.

수감각에 대한 연구는 수감각의 정의나 구성 요소에 관한 연구, 계산 능력과 수감각 수행 능력의 비교, 국제간 수감각 비교분석, 수감각 개발을 위한 교수·학습 프로그램 개발 등으로 이루어져 왔다(Markovits & Pang, 2004; Reys, Reys, McIntosh, Emanuelesson, Johansson, & Yang, 1999). 우리나라에서 수감각에 관한 연구는 부분적이기는 하지만, 최근에 다소 활발하게 전개되고 있는 실정이며, 특정 학년의 학생들을 대상으로 계산 능력과 수감각 수행의 비교 분석, 수감각 실태 조사, 수감각 개발 프로그램 등이 연구되어 왔다(김희선 & 김정효, 2000; 남형채, 1999; 선춘화, 2005; 이점미, 2005). 하지만, 대부분의 연구가 연구대상 학생들의 단편적인 수감각 수행 능력을 분석하거나 평가 문항에 대한 빈도수 및 백분율만을 제시하고 있어서 실제 학생들의 수감각 정도에 대한 상세한 분석이 부족하다. 또한 검사절차나 문항의 특수성으로 인해서 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 자연스럽게 수감각을 사용하는 능력을 측정하기보다는 의도적으로 수감각을 사용해야만 하는 상황에서 수감각 수행 능력을 분석하는 경우가 대부분이다. 이에 본 연구는 초등학교 6학년 학생들의 계산 능력과 수감각을 분석하되 수감각에 보다 초점을 두어, 주어진 문제 상황에서 얼마나 자연스럽게 학생들이 수감각을 활용하는지를 면밀하게 분석하고 이를 토대로 수감각 개발에 관한 시사점을 얻는 데 주요 목적을 둔다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수감각과 수감각의 구성요소

'수감각'이라는 용어는 빈번히 활용되어왔지만, 수감각을 한마디로 정의하기는 어렵다. 학자에 따라 수와 수들 사이의 관계에 대한 직관, 수와 연산 영역과 관련된 전반적인 수학적 지식의 네트워크, 사고방식, 수감각을 지닌 학생들의 특징 등을 각기 강조하여 수감각을 다양하게 정의하여왔다(Markovits, 1989; Sowder & Schappelle, 2002; Trafton, 1991; Van de Walle, 1998). 수감각에는 수에 대한 직관적 느낌, 수들 사이의 관계에 대한 이해, 수와 관련된 문제 상황에서의 다양한 수 사용과 해석, 효율적인 계산 능력 및 어림이나 암산 등의 적절한 선택 등을 포함한다.

'무엇이 수감각인가?'에 대한 논의는 많은 학자들로 하여금 수감각의 구성요소에 관심을 가지게 하였다. McIntosh, Reys와 Reys(1992)는 기존 연구를 종합하여 수감각 체계를 크게 수 개념, 연산, 수와 연산의 응용으로 나누고 각각의 구성 요소를 세분하여 정리하였다. 구체적으로 '수 개념'은 수에 대한 지식과 특성을 다루는 것으로써, 수의 순서 감각, 수에 대한 다양한 표현, 수 크기의 절대적·상대적 감각, 기준척도(benchmarks)[3] 체계를 포함한다. '연산'은 연산에 대한 지식과 특성을 다루는 것으로써 연산 결과에 대한 이해, 수학적 성질의 이해, 연산 사이의 관계 이해를 포함한다. '수와 연산의 응용'은 수와 연산에 대한 지식과 특성을 계산 상황에 적용하는 것으로써, 문제 문맥과 필요한 계산과의 관계

3) 기준척도는 "잘 알지 못하는 수의 값을 찾기 위해서 잘 알고 있는 수의 값을 이용하는 것"(Resnick, 1989, p.36)이다. 예를 들어, 11/12 + 4/9의 어림값을 구하기 위해서 11/12를 1에 가까운 수, 4/9를 1/2에 가까운 수로 생각할 수 있는데, 이 때, 1과 1/2이 기준척도이다.

이해, 다양한 전략의 존재에 대한 인식, 효과적인 방법과 표현을 사용하려는 성향, 자료와 결과를 검토하려는 성향을 포함한다.

이와 같은 구성 요소는 후에 다음과 같이 6가지로 정리되었다: (1) 수의 의미와 크기를 이해하기, (2) 수의 동치 표현(equivalent representations)을 이해하고 활용하기, (3) 연산의 의미와 결과를 이해하기, (4) 동치 식(equivalent expressions)을 이해하고 활용하기, (5) 암산·지필계산·계산기 사용을 위해 융통성 있게 계산하고 세기 전략을 활용하기, (6) 측정 기준척도를 활용하기(Reys, et al., 1999, p.62).

2. 수감각 개발

수감각의 정의나 구성요소에서 드러나듯이, 수감각은 단순한 지식 수준을 넘어서서 주어진 문제 상황에 적합하게 그 지식을 융통성 있고 효과적으로 활용하는 능력이나 태도 등을 포괄적으로 포함하고 있다. 따라서 수감각은 특정 시기에 일회적으로 획득할 수 있는 기능이라기보다는 점차적으로 발달되는 특성을 지닌다. 또한 관련 지식을 획득함으로써 자연스럽게 발달된다기보다는 수감각 육성을 위한 교실 분위기를 토대로 학생들이 수와 연산 관계에 대해서 생각해보고 다양한 접근 방법을 창안하고 비교해 보면서 사고하는 경험을 통하여 발달된다고 볼 수 있다(Reys, 1992).

수감각 개발과 관련하여 빈번히 언급되는 것이 어림과 암산이다. 어림[4]은 수감각과 상호작용을 하는 것으로 수감각이 어림하는 데 도움이 되기도 하고 어림을 통해서 수감각 발달이 가능하기도 하다(강완 외, 1999). 실제 Yang(1995)은 어림을 잘하는 사람들의 특성으로 문제를 전체적으로 개괄하고 필요한 답의 형태를 결정하는 것, 다른 형태의 수를 다루는 데 융통성 있는 암산을 사용하는 것, 적당한 전략을 선택하는 것, 다양한 해결 방법을 인식하는 것, 결과의 합리성을 확인하는 것을 보고했는데, 이와 같은 특성들은 수감각이 있는 학생들의 특성과 상당부분 겹친다(Markovits, 1989). 어림을 효과적으로 하기 위해서는 주어진 수의 구조와 연산의 특성, 수의 크기에 대한 이해, 기준척도의 적절한 활용, 주어진 문제 상황에 알맞은 수와 연산 지식의 적절한 활용 등이 필요하므로 수감각의 주요 측면이 적용된다. 이런 관점에서 어림을 강조하는 것은 수감각 개발에 도움이 된다.

한편, 암산은 표준적인 계산 방법을 단순히 머릿속에서 그대로 수행하는 것이라기보다는 계산을 좀 더 쉽게 하기 위해서 여러 가지 방법을 창안하는 것을 포함한다(배종수, 2002). 즉, 암산의 목적은 모든 학생들이 동일한 문제해결전략을 사용하도록 하는 것이 아니라 학생 개개인에게 의미 있는 전략을 활용하게 하는 것이다(강완 외, 1999). 효과적으로 암산하기 위해서는 자리값 개념, 수 관계 및 수의 동치 표현에 대한 지식, 산술 연산의 결과 이해 등이 필요하므로, 수감각의 주요 측면이 적용된다고 볼 수 있다. 이와 같은 측면에서 암산 기능을 강조하는 것은 수감각 개발에 도움이 된다.

3. 계산 능력과 수감각

학생들의 수감각은 지필 계산 능력보다 대체적으로 낮은 편이다(남형채, 1999; Yang,

---

4) 어림은 상황에 따라 어림수, 어림셈, 어림 측정의 세 영역으로 나눌 수 있는데(Reys, 1992), 본 논문의 특성상 이를 상세히 나누지 않는다.

1995). 예를 들어, Reys와 Yang(1998)의 연구에서 학생들은 12/13 + 7/8에 대해서 63%의 학생들이 정확하게 계산한 반면에, 계산하지 않고 2라고 어림할 수 있었던 학생들은 단지 37%에 불과했다. 오스트레일리아, 스웨덴, 타이완, 미국의 8세에서 14세까지의 다양한 학생들을 대상으로 한 국제간 비교 분석에서도 수행 수준의 차이는 있지만, 대개 일관되게 수감각 수행 정도가 낮다(Reys, et al, 1999). 이러한 연구 결과는 "학생들의 수감각이 계산 기능 향상과 나란히 개발되지 않는다"(Reys, et al., 1999, p.68)는 점을 부각시키며 결과적으로 교사가 수감각의 중요성을 인식하고 수감각 향상을 위해 적절한 역할을 수행하는 것이 필요하다는 것을 드러낸다.

한편, 학생들의 낮은 수감각과 관련하여 빈번히 언급되는 것 중의 하나가 기준척도의 활용이다. 기준척도는 주어진 수의 크기를 빠르게 판단하거나 어림하여 계산할 필요가 있는 경우, 또는 계산 결과의 합리성을 판단하는 데 유용한 도구이나, 학생들은 종종 기준척도를 효과적으로 활용하지 못한다. 상위 수준의 학생들은 적절한 기준 척도를 활용하여 양을 어림하는 데 비해, 중간 수준의 학생들은 어림할 때에도 지필 절차를 적용하려는 경향이 있다(Reys & Yang, 1998). 결국 많은 학생들이 계산과정에서 적절한 기준척도의 사용을 자연스럽게 배우는 것이 아니기 때문에, 수학교육과정에서 명백히 효과적인 기준척도의 사용을 강조할 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상 및 방법

본 연구는 서울, 경기, 대전 소재의 학교 중에서 학생들의 학력수준과 가정의 사회경제적 수준이 중간 정도에 속하는 초등학교 4개교 각각에서 6학년 1개반씩을 연구대상으로 하였다. 해당 학생 139명중에서 답안 작성을 소홀히 한 2명을 제외한 137명을 분석대상으로 하였다.

본 연구는 초등학교 6학년 학생들의 기본적인 계산 능력과 수감각 정도를 분석하기 위해 검사 도구를 통한 조사연구방법을 활용하였다. 선행 연구 결과 학생들의 계산 능력보다 전반적으로 수감각이 낮았기 때문에, 본 연구에서는 계산 능력보다 학생들의 수감각 정도를 상세히 분석하는 데 초점을 두게 되었다. 또한 적절한 계산 능력이나 수감각 없이도 우연히 정답을 맞출 가능성이 있는 선다형 문제 대신에, 단답형 문제를 제시하고 풀이과정을 기술하거나 답에 대한 설명을 쓰게 하였다. 이는 수감각 사용과 오답을 심층적으로 분석하기 위해 몇몇의 학생들만을 대상으로 면담을 하는 방법 대신에, 전체 연구 대상 학생들의 전반적인 경향을 알기 위함이었다.

2. 검사 도구

본 연구에서 사용한 검사는 크게 두 부분으로 이루어져 있다. 앞부분은 기본적인 계산능력을 알아보기 위한 12문제, 뒷부분은 수감각을 알아보기 위한 12문제로 구성하여 전체 24문항으로 이루어졌다. 하지만, 검사지에는 기본계산 능력 검사와 수감각 검사 사이에 특별한 구분을 두지 않고, 1번부터 24번까지 일관되게 제시하였다. 본 검사지는 그동안 수많은 수감

각 연구를 수행해 온 이스라엘의 Zvia Markovits 교수와 공동으로 개발하였고, 초등수학교육을 전공한 교사 7인으로부터 타당성을 검증받았다. 또한 초기에 개발된 검사지를 가지고 예비검사를 거치면서 문항의 진술을 수정하고 40분 검사 시간을 고려하여 난이도와 전체 문항 수를 수정하였다. 이를 보다 구체적으로 기술하면 다음과 같다.

1) 기본 계산 능력 검사

이는 6학년 학생들의 기본적인 계산 능력을 알아보기 위한 것으로, [표 1]에 제시한 바와 같이 자연수 · 분수 · 소수의 사칙연산과 관련된 계산 기능을 조사하였다. 전체 12문제 중 2문제는 수감각 검사에서와 비슷한 실생활 맥락의 문장제 문제로 구성하였고 이에 대해서는 풀이과정과 답을 모두 쓰도록 구성하였다.

[표 1] 기본 계산 능력 검사 문항

항목	평가 내용	문항 수
자연수	· 세 자리 수 이상 자연수의 덧셈과 뺄셈 · 곱셈과 나눗셈	4
분수	· (자연수) - (대분수) · 분모가 다른 대분수끼리의 덧셈 · 분모가 다른 대분수끼리의 뺄셈	3
소수	· 세 소수의 덧셈 ·(소수 둘째 자리) - (소수 셋째 자리)	2
혼합계산	· 대분수와 소수가 섞인 계산	1
실생활	·학교에서 책을 주문하는 상황: (자연수) x (분수) x (자연수) ·문구점에서 연필을 파는 상황: (자연수) x (자연수)	2
계		12

2) 수감각 검사

이는 6학년 학생들의 수감각을 알아보기 위한 것으로, [표 2]에 제시한 바와 같이 연산의 의미와 결과를 이해하기, 기준척도를 활용하기, 다양한 계산 상황에서 수와 연산 지식을 적절히 활용하고 반성하기를 조사하였다. 단순히 정답 여부를 확인하는 것이 아니라 수감각을 적절히 활용하는지의 여부를 심층적으로 분석하기 위해서 모든 문항에는 풀이과정 및 답에 대한 설명 또는 근거를 적도록 구성하였다. 이와 같은 면밀한 분석 계획과 초등학생들에게 적절한 검사 시간의 고려 등으로 인해서 수감각의 다른 구성 요소, 즉, 수의 의미와 크기의 이해, 수의 동치 표현 및 동치 식의 이해는 검사하지 않았다. 한편, 학생들이 필요할 때마다 수와 연산에 대한 지식을 자연스럽고 융통성 있게 활용하는지 알아보기 위해서 다양한 계산 상황과 관련된 문항을 상대적으로 많이 구성하였다..

[표 2] 수감각 검사 문항

구성요소	항목	평가 내용	문항 수
연산의 의미와 결과 이해하기	나눗셈의 결과	· 동일한 피제수를 크기가 다른 제수로 나누는 경우의 연산결과 비교 · (네 자리수)÷(두 자리수)를 기준으로 하여 각각 ① (피제수의 2배)÷(제수의 2배), ② (피제수의 3배)÷(제수의 1/3배), ③ (피제수의 1/2배)÷(제수의 1/2배)의 연산결과와 비교	3 (3)*
	뺄셈의 결과	· 소수 세자리 수 끼리의 뺄셈의 결과 비교	
기준 척도의 활용	(소수)+(분수)	· 기준 척도 1/2을 활용하여 (소수)+(분수)와 자연수의 크기 비교	3
	(소수)×(자연수)	· 기준 척도 1/2을 활용하여 (소수)×(자연수)의 값을 어림	
	크기비교	· 기준 척도 1/2과 1을 활용하여 소수 및 분수의 크기 비교	
지식의 적절한 활용	계산	· 계산 순서를 달리한 자연수의 덧셈 크기 비교 · 적절한 수를 선택한 후 곱해서 특정한 수 만들기 · 여러 개의 대분수와 소수의 혼합계산	6 (2)*
	답의 합리성 검토	· 대분수끼리의 뺄셈 결과 반성	
	실생활	· 서점에서 책을 주문하는 상황 · 성장에 따른 키의 변화	
계			12

* 문제의 특성상 각각 3문제, 2문제의 하위문항을 가진 문제가 1개씩 포함되어 있음.

3. 자료수집 및 분석

개발된 검사지의 적절성을 알아보기 위해 본 연구대상 학교와 비슷한 수준인 경기도 소재의 한 초등학교 6학년 1개반을 선정하여 예비검사를 실시하였다. 예비조사 결과 학생들이 풀이과정이나 답에 대한 설명을 적는 데 시간이 많이 들어서 전체 문항 수를 줄여야 했고, 학생들에게 익숙하지 않은 문항의 경우 (예를 들어, 적절한 수를 선택하여 곱해서 특정한 수를 만드는 문제) 문제 진술이 명확하지 못해서 학생들이 제대로 이해하지 못하는 경우가 있었다. 또한 검사지의 후반부는 수감각을 조사하기 위한 것이었는데, 학생들이 종종 수감각을 활용하지 않고, 직접 계산을 하여 문제를 해결하는 경우가 많았다. 이와 같은 경우, 학생들이 계산에 치중하여 수감각이 부족하다거나 활용하지 않는다고 간단히 분석할 수도 있을 것이다. 하지만, 학생들이 수감각을 활용할 기회를 보다 적극적으로 가졌을 때, 예를 들어, 직접 계산을 하는 대신에 다른 방법으로 문제를 해결해야 한다는 것을 알았을 때, 수감각을 적절히 활용하는지의 여부도 중요하다고 판단되었다. 따라서, 수감각을 묻는 문제 중에 가끔 "직접 계산하지 않고" 문제를 풀라는 진술을 첨가하였다. 모든 문제에 대해 이와 같은 진술을 넣지 않은 이유는 학생들이 주어진 문제 상황에 적합하면서도 자연스럽게 수감각을 활용하는 지의 여부를 알기 위함이었다. 본 검사는 대상 학급 교사들에게 검사 실시상의 유의점을 충분히 설명한 후, 오전 시간을 이용하여 40분 동안 직접 실시하게 하였다. 검사 실시 후

검사지는 우편으로 회수하였다.

검사 분석은 우선 전반적인 기본 계산 능력과 수감각 수행 능력을 알아보기 위해 각각 50점 만점으로 계산하였다. 기본 계산 능력 검사의 경우 10개 문항은 4점씩 할당한 반면에, 풀이과정과 답을 기술해야 하는 문장제 문제는 5점을 할당하였다. 수감각 검사의 경우도 이와 비슷하게 10개 문항은 4점씩 할당한 반면에, 하위문항을 가지고 있는 문제는 5점을 할당하였다. 다만, 수감각 검사의 경우는 수감각의 적절한 활용 여부, 이에 대한 명확한 설명, 정답 여부 등을 종합적으로 고려하여 채점하였다. [표 3]은 수감각 검사 문항의 전반적인 평가 기준이다. 한편, 기본 계산 능력 검사에 대해 정답율과 대표적인 오류 유형을 분석하였다. 수감각 검사에 대해서는 우선 정답에 대해 수감각의 적절한 활용, 직접 계산, 기타, 무응답으로 나누어 백분율을 구하고, 오답에 대해서는 계산상의 오류, 부적절한 수감각, 기타로 나누어 백분율을 구하였다.

[표 3] 수감각 검사 문항의 평가 기준 예

평가기준	평점
수감각이 명확하고 찾아낸 사실을 분명하고 명료하게 설명을 하며 답이 정확하다.	4
수감각이 명확하고 찾아낸 사실을 설명하는 데 있어 사소한 오류를 범하나 답이 정확하다. - 용어 선택 오류, 숫자를 옮겨 적는 과정에서의 오류 등	3
직접계산을 하되, 계산과정과 답이 정확하다. 수감각이 있으며 찾아낸 사실을 명료하게 설명하는 것이 조금 부족하나 답이 정확하다. 수감각이 있으며 찾아낸 사실을 명료하게 설명하나 답이 틀리다.	2
직접계산을 하되, 계산상의 약간의 오류가 보이나 답이 정확하다. 설명이 없거나 이해할 수 없는 설명을 하지만 답이 정확하다. 수감각을 활용하려는 시도가 있으나 설명이 명확하지 않으며 답도 틀리다.	1
설명과 답이 모두 틀리거나 해결을 시도하지 않는다.	0

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 기본적인 계산능력 분석

기본적인 계산능력 검사는 50점 만점에 평균 40.4점(80.8%)이었다. 각 문항별로 빈도수 및 백분율을 계산한 결과 대개 85%이상의 정답율을 보였고, 오답의 경우는 다양한 계산상의 오류가 5%에서 10%정도였다. 간단한 문장제 문제의 경우도 약 89%의 높은 정답율을 보였다. 예외적으로 정답율이 낮았던 두 문항의 분석 결과를 보다 자세히 제시하면 다음과 같다. [표 4]의 경우는 기본 계산 능력 검사 문항 중 가장 낮은 정답율을 보인 문제를 분석한 것이다. 약 24%의 학생들이 계산상의 오류를 보였고, 18%의 학생들은 계산은 바르지만, 연산순서를 잘못 적용하여 오답을 산출하였다. 한편, [표 5]의 경우는 실생활 맥락의 문장제 중 낮은 정답율을 보인 문제를 분석한 것이다. 약 23%의 학생들이 문제 상황에 적합한 식을 세우지 못하여 정답을 구하지 못했으며, 식이나 답을 적지 못한 경우도 약 11%에 달했다.

[표 4] 대분수와 소수의 혼합 계산 문제의 반응 분석

문 제	답	근 거	예	빈도수(%)
$3\frac{3}{4}+12.9-2\frac{1}{2}+3.01$	정답	17.16($17\frac{4}{25}$)		63 (45.99%)
	오답	계산상의 오류	· 연산순서 바르나 계산 틀림 (21명: 15.33%) · 연산순서 틀리며 계산도 틀림 (8명: 5.84%)	33 (24.09%)
		연산 순서 틀려 답은 틀리나 계산은 바름	· +먼저 한 후 -계산 함 16.65-5.51=11.14($11\frac{7}{50}$)	25 (18.25%)
		기타		10 (7.30%)
		무응답		6 (4.38%)

[표 5] 실생활 맥락 문제의 반응 분석

문 제	답	근거	예	빈도수(%)
학교에서 600권의 수학책을 주문했습니다. 주문한 책의 $\frac{2}{5}$는 1학년과 2학년 책입니다. 책 한 권의 무게는 400g입니다. 1학년과 2학년 책의 무게는 모두 얼마입니까? 풀이 과정을 쓰시오.	정답	$600\times\frac{2}{5}\times400=96000$(g)	· 식과 답 모두 맞음 (71명: 51.82%) · 식과 답 중 하나만 맞음 (19명: 13.87%)	90 (65.69%)
	오답	식과 답 모두 틀림	· $600\div\frac{2}{5}\times400$(16명: 11.68%) · $600\times\frac{1}{5}\times400$(3명: 2.19%)	32 (23.36%)
		무응답		15 (10.95%)

2. 수 감각 분석

수감각 검사는 50점 만점에 평균 25점(50%)으로 기본 계산 능력 검사에 비해 전체적으로 현저하게 낮았다. 검사의 목적상 정답은 물론 문제에 적합한 수감각을 활용한 경우에만 높은 점수를 얻도록 채점하였기 때문에, 점수 결과 자체는 그리 놀랄만한 것은 아니다. 보다 중요한 것은 수감각을 활용하여 문제를 쉽고 효율적으로 해결할 수 있는 경우에도 상당수의 학생들이 직접 계산하는 경우가 많았다는 것이다. 이는 정답 여부에 상관없이 공통적으로 드러나는 경향 중의 하나였다. 수감각 검사를 하위 구성요소별로 나누어 주요 문항별로 보다 자세히 살펴보면 다음과 같다.

1) 연산의 의미와 결과 이해하기

[표 6]은 자연수끼리의 나눗셈의 결과를 비교하는 문제에서 학생들이 연산의 의미와 결과

를 이해하는 지 분석한 것이다. 이는 사실 12개의 수감각 검사 문항 중에 학생들이 수감각을 가장 잘 활용하여 문제를 해결한 경우이다. '나누어지는 수가 같은 경우 나누는 수가 적을 수록 값은 크다(또는 나누는 수가 클수록 값은 작다)'라는 근거를 들어 문제를 해결한 학생이 약 80%에 가까우며, 매우 예외적이기는 하나 포함제로서의 나눗셈의 의미를 적용하여 '12456에는 498이 499보다 조금 더 포함된다'는 설명을 제시한 학생도 있었다. 문제에 "직접 계산하지 않고"라는 문구가 있었음에도 불구하고, 정답자 중 약 6%, 오답자 중 약 4%가 계산을 하여 문제를 해결하려고 시도하였다.

[표 6] 피젯수가 같은 나눗셈의 결과를 비교하는 문제의 반응 분석

문 제	답	근 거	예	빈도수(%)
다음 O안에 <, =, > 중 알맞은 것을 넣으시오. 직접 계산하지 않고 이 문제를 풀 수 있습니까? 설명하시오. 12456÷498 O 12456÷499 **설명**:	정답	수감각 활용	· 나누어지는 수가 같은 경우 나누는 수가 적을수록 값은 크다(95명: 69.34%) · 나누어지는 수가 같은 경우 나누는 수가 클수록 값은 작다(10명: 7.30%) · 12456엔 작은수 498이 큰수 499보다 더 조금 포함되니까(1명: 0.73%)	109 (79.56%)
		직접 계산		8 (5.84%)
		기타	· 나누는 수가 서로 달라서(5명: 5.84%) · 1이 더 많으니까(1명: 0.73%) · 12456은 498로 나누어 떨어질것 같은데 499로는 잘 안 떨어질 것 같아서(1명: 0.73%)	9 (6.57%)
		설명 없음		2 (1.46%)
	오답	계산상의 오류	· 계산 결과	5 (3.65%)
		잘못된 수감각	· 499가 더 크니까	2 (1.46%)
		무응답		2 (1.46%)

[표 7] 역시 나눗셈의 결과를 묻는 문제에 관한 분석인데, 앞의 문제와는 다르게 원래 제시된 문제(1008÷36)와 비교하여 피젯수와 제수를 각각 2배(2016÷72), 1/2배(504÷18), 또는 피젯수는 3배하고 제수는 1/3배(3024÷12)했을 경우 몫이 각각 같은지 다른지를 판단하고 이에 대한 설명을 기술하게 하였다. 각각의 하위 문제에 대한 정답율과 답에 대한 설명 유형이 비슷하기 때문에, 세 번째 경우만 제시한다.

학생들에게 다소 익숙하지 않은 문제 유형이라 그런지 약 37%의 학생들만이 적절한 수감각을 활용하여 정답을 구했으나, 학생들의 해결 방법은 다양하게 드러났다. 구체적으로, 약 9%의 학생들은 피젯수와 제수의 변화를 지적하였고, 4%의 학생들은 어림하여 몫의 크기를 비교하였으며, 극히 소수의 학생들은 피젯수와 제수의 변화를 동일하게 하여 앞의 [표 6]에서처럼 동일한 피젯수를 서로 다른 제수로 나누는 경우로 고쳐서 생각하기도 하였다(즉, 1008÷36과 3024÷12를 비교하는 대신에 1008÷36=3024÷108이기 때문에, 3024÷12와 3024÷108

을 비교하는 것). 한편, 문제에 직접 나누기를 하지 말라는 조건이 있었음에도 불구하고, 12%의 학생들이 직접 계산을 통해 답을 찾았다. 또한 정답은 맞췄지만, 이에 대한 근거를 명확하게 설명하지 못한 학생들이 약 23%에 해당했고, 설명을 제시하지 못한 학생들도 16%에 달했다.

[표 7] 피젯수와 제수 변화에 따른 나눗셈의 결과를 비교하는 문제의 반응 분석

문 제	답	근거	예	빈도수(%)
문제 1008 ÷ 36이 있다. 직접 나누기를 해 보지 않고 ①, ②, ③ 각각에 대해서 답이 같은지 또는 같지 않은지 해당되는 곳에 O표 하고 왜 그렇게 생각했는지 설명하시오. ② 3024 ÷ 12 답이 같다/답이 같지 않다 **설명:**	정답	수감각 활용	· 3024는 1008×3이고 12는 36÷3으로 한 것이라서(13명: 9.49%) · 1008÷36은 두 자리 수의 답이 나온다는 것을 알 수 있는데 이 식은 백의 자리에 제수가 들어가서 세 자리 수가 나온다(6명: 4.38%) · 한 쪽은 곱하고 한 쪽은 나누어 주기 때문(5명: 3.65%) · 1008×3=3024, 36×3=108 1008÷36=3024÷108(3명: 2.19%) · 나누어지는 수가 크고 나누는 수가 작아서 위의 문제보다 값이 클 것이다(2명: 1.46%)	51 (37.22%)
		직접 계산	· 직접 계산해 보니 28, 252로 다르다.	16 (11.68%)
		기타	· 전혀 다름	32 (23.36%)
		설명 없음		22 (16.06%)
	오답	잘못된 수감각	· 답이 백의 자리 · 숫자 자리가 같아서	2 (1.46%)
		계산상의 오류	· 직접 계산	2 (1.46%)
		기타	· 12가 3024보다 작아서	8 (5.84%)
		무응답		4 (2.92%)

[표 8]은 소수끼리의 뺄셈 결과를 비교하는 문제에서 학생들이 연산의 의미와 결과를 이해하는지 분석한 것이다. 단지 약 44%의 학생들만이 적절한 수감각을 활용하여 정답을 구할 수 있었던 반면에, 정답자 중 29%, 오답자 중 7%, 전체 36%의 학생들이 수감각을 활용하려고 노력하기보다는 직접 계산해서 답을 구하려는 성향을 보였다. 앞의 두 문제와 다르게 이 문제는 직접 계산하지 말라는 명시적 진술이 없었기 때문에, 학생들이 다른 방법을 생각하기 전에 자연스럽게 계산한 것으로 유추된다.

[표 8] 소수끼리의 뺄셈 결과를 비교하는 문제의 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
다음 O안에 <, =, > 중 알맞은 것을 넣고, 왜 그렇게 생각했는지 설명하시오. 17.014-3.948 O 17.013-3.984 **설명**:	정답	수감각 활용	· 빼지는 수가 크고 빼는 수가 더 작다 3.948<3.984(49명: 35.77%) · 17.014>17.013(9명: 6.57%)	60 (43.78%)
		직접 계산	· 직접 계산해 답을 얻음	40 (29.20%)
		기타	· 더 큰 수에서 작은 수를 나누니까[표현법 오류] (3명: 2.19%)	12 (8.76%)
		설명 없음		6 (4.38%)
	오답	계산상의 오류	· 계산 오류	9 (6.57%)
		기타	· 왼쪽은 소수 셋째 자리가 더 크지만 오른쪽은 소수 둘째 자리가 더 커서-단순 수 비교(4명: 2.92%)	7 (5.11%)
		무응답		3 (2.19%)

2) 기준 척도의 활용

기준 척도의 활용은 선행 연구 결과에서 수감각의 구성요소 중 학생들이 특히 어려워하는 부분으로 일관되게 보고되어 왔다. [표 9]는 (소수)+(분수)와 1의 크기를 비교하는 데 있어서 1/2을 기준 척도로 적절히 활용하는 지 알아보는 문제에 대한 분석이다. 단지 9%의 학생들만이 적절한 수감각을 활용하여 답을 구했을 뿐, 정답자 중 75%와 오답자중 4%의 학생들은 직접 계산을 해서 답을 구하였다. 주어진 문제의 연산이 쉬웠기 때문에 학생들은 문제 상황을 특별히 고려하지 않고 그냥 익숙한 계산을 서둘러 수행한 것으로 판단된다. 이는 학생들이 계산과정에서 자연스럽게 수감각을, 여기서는 특히 기준 척도를 제대로 활용하지 않는다는 것을 극명하게 보여주는 예이기도 하다.

[표 10]은 (소수)x(자연수)의 값을 어림하는 데 있어서 기준척도 1/2(또는 0.5)을 효과적으로 사용하는지를 알아보는 문제에 대한 결과이다. 다른 문제 유형과는 다르게 유일하게 선다형을 제공하였고, 학생들로 하여금 보다 정확하게 어림할 필요를 느끼게 하려고 했다. 하지만 학생들은 세련된 수감각을 활용하기보다는 주어진 문제를 정확하게 계산한 후, 이를 토대로 답을 구하려는 성향이 매우 높았다(정답자의 경우 79%, 오답자의 경우 9%로 전체 88%).

또한 [표 11]은 분수와 소수의 크기 비교에서 적절한 기준 척도를 사용하는지를 알아보기 위한 문제를 분석한 결과이다. 이 문제는 수의 크기에 대한 감각을 요구하기도 하나, 본 연구에서는 기준 척도의 활용으로 분석하였다. 약 37%의 학생들이 적절한 기준 척도 활용, 분자 및 분모의 크기를 고려한 분수 비교 등을 통해 답을 구할 수 있었다. 한편, 정답에 대한 설명을 쓰지 않거나 무응답의 경우도 30%에 달해 학생들에게 쉽지 않은 문제였음을 드러낸다. 문제에서 직접 계산하지 말라는 진술이 있었음에도 불구하고, 약 17%의 학생들이 직접 계산을 하여 크기 비교를 하려고 시도하였다.

[표 9] (소수)+(분수)와 1의 크기를 비교하는 문제의 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
다음 ○안에 < 또는 = 또는 >를 넣고, 왜 그렇게 생각했는지 설명하시오. $0.27 + \frac{3}{4}$ ○ 1 **설명**:	정답	수감각 활용	· $\frac{3}{4}$이 1이 되려면 $\frac{1}{4}$=0.25가 필요한데 0.27이 0.25를 넘으니까(8명: 5.84%) · 0.27+$\frac{3}{4}$은 대분수이므로 1보다 크다(3명: 2.19%)	12 (8.76%)
		직접 계산		103 (75.18%)
		기타	· 소수 둘째 자리에 숫자가 있어서 · 1은 자연수이기 때문에	2 (1.46%)
		설명 없음		1 (0.73%)
	오답	잘못된 수감각	· 소수보다 1이 더 크다(3명: 2.19%) · 분수보다 1이 더 크다(2명: 1.46%)	7 (5.11%)
		계산상의 오류	· 계산 틀림	5 (3.65%)
		기타	· 찍거나 추측	4 (2.92%)
		무응답		3 (2.19%)

[표 10] 기준 척도를 활용하여 (소수)x(자연수)의 값을 어림하는 문제의 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
다음 중 0.52 × 809와 가장 가까운 것은 어느 것입니까? ( ) ① 400 ② 1600 ③ 430 ④ 1700 **설명**:	정답	직접 계산	· 계산 후 420.68은 430에 가장 가까워서	108 (78.83%)
		설명 없음		5 (3.65%)
	오답	수감각 활용	· 809의 $\frac{1}{2}$은 400에 근접	1 (0.73%)
		계산상의 오류	· 계산은 맞으나 답 틀림(2명: 1.46%) · 42066으로 예상해 가장 큰 것으로 선택(2명: 1.46%)	13 (9.49%)
		기타	· 찍었음	4 (2.92%)
		무응답		6 (4.38%)

[표 11] 기준 척도를 활용하여 소수와 분수를 배열하는 문제의 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
직접 계산하지 말고 다음 수를 크기가 작은 것부터 큰 것으로 순서대로 배열하시오. $\frac{9}{10}$, $\frac{20}{39}$, $\frac{19}{40}$, 0.75, $\frac{15}{13}$, $\frac{1}{2}$ __ __ __ __ __ __ 작은 수 큰 수 **설명**:	정답	수감각 활용	· 1 또는 $\frac{1}{2}$ 기준(28명: 20.44%) · 분모가 작을수록 수가 크고, 분모가 클수록 수가 작다(13명: 9.49%)	50 (36.50%)
		직접 계산		16 (11.68%)
		설명 없음		11 (8.03%)
	오답	잘못된 수감각	· 분자와 분모가 별 차이 없어야 한다(7명: 5.11%) · 분자가 작은 것이 더 작다(2명: 1.46%) · 분수가 큰 것이 크다(2명: 1.46%)	12 (8.76%)
		계산상의 오류	· 분수화 · 암산	7 (5.11%)
		기타	· 그냥 그런 듯, 직감(5명: 3.65%)	11 (8.03%)
		무응답		30 (21.90%)

3) 다양한 계산 상황에서 수와 연산 지식의 적절한 활용

수와 연산 지식을 주어진 문제 상황에 적합하게 활용하는 지를 알아보기 위한 문제는 계산, 답의 합리성 검토, 실생활 맥락 세부분에서 알아보았다. 우선 계산과 관련된 상황에서 학생들의 반응을 분석해보면 다음과 같다. [표 12]는 계산 순서만 달리한 네 수의 덧셈의 크기를 비교하는 문제에 대한 분석이다. 이 문제는 전체 검사지에서 수감각을 다루는 첫 번째 문제였고, 지문에서 계산을 하지 말라는 제한을 두지 않았기 때문에, 학생들이 주어진 문제 상황에서 자연스럽게 수감각을 활용하는 지의 여부를 분명하게 알 수 있는 문제였다. 약 67%의 학생들이 적절한 수감각을 활용하여 정답을 구한 반면에, 직접 더해 보아 합이 같다는 것을 안 학생들도 23%에 달했다. 또한 오답율 중에도 잘못된 수감각의 활용보다는 계산상의 오류가 더 많은 비중을 차지했다.

[표 13]은 여러 개의 대분수와 소수의 혼합계산 상황에서 학생들이 반응한 유형을 분석한 것이다. 복잡한 계산을 요하는 문제처럼 보이지만, 사실은 분수와 소수끼리 묶으면 자연수의 연산이 되어 답을 쉽게 구할 수 있는 문제이다. 하지만, 적절한 수감각을 활용하여 효율적으로 계산을 한 학생은 불과 4%였으며, 직접 계산한 학생은 80%에 이르렀다. 이 중 계산이 다소 복잡하여 계산상의 다양한 오류를 보인 학생들이 44%에 이르렀다. 이 문제는 학생들이 평소에 많이 접해볼 수 있는 형태의 혼합계산 문제였음에도 불구하고, 수감각을 거의 활용하지 못한 이유는 그동안 혼합계산 문제를 풀 때마다 직접 계산을 통해서 답을 구했기 때문으로 유추할 수 있다. 사실 혼합 계산을 하는 경우에 수감각을 활용하는 것이 중요하다는 것을 강조하거나 학생들로 하여금 수감각을 활용하도록 격려하는 경우는 매우 드물다.

[표 12] 계산 순서를 달리한 덧셈의 크기를 비교하는 문제의 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
다음 O안에 <, =, > 중 알맞은 것을 넣고, 왜 그렇게 생각했는지 설명하시오. 4926+327+5909+3207 O 327+5909+3207+4926 **설명**:	정답	수감각 활용	· 더하는 수가 순서는 다르지만 같다 (83명: 60.58%) · 똑같은 수들이어서(9명: 6.57%)	92 (67.15%)
		직접 계산	· 더해보았더니 합이 같다	31 (22.63%)
	오답	계산상의 오류	· 더하기를 잘못해 계산결과가 틀림	10 (7.30%)
		잘못된 수감각	· 숫자는 똑같지만 왼쪽 것은 큰 수부터 먼저 했으므로 크다. 또 왼쪽은 작은 수가 맨 앞에 있기 때문이다	1 (0.73%)
		무응답		3 (2.19%)

[표 13] 대분수와 소수의 혼합 계산의 합을 구하는 문제의 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
$4\frac{3}{4}+13.6+7\frac{2}{8}-7.9+4.3$은 얼마입니까? ( ) **설명**:	정답	수감각 활용 (분수끼리 소수끼리 묶음)	· 13.6+4.3-7.9=10이고 $4\frac{3}{4}$과 $7\frac{2}{8}$는 $4\frac{3}{4}$과 $7\frac{1}{4}$이므로 12다. 12+10=22	5 (3.65%)
		직접 계산	· 직접 계산함	49 (35.76%)
		설명 없음		1 (0.73%)
	오답	계산상의 오류	· $4\frac{3}{4}+13.6+7\frac{2}{8}-(7.9+4.3)=13.4$ · 덧셈오류, 소수점오류 · 분수를 소수로 잘못 고침. · 계산과정에서 잘못 옮겨 적음.	60 (43.80%)
		무응답		22 (16.06%)

[표 14]는 주어진 수들 중에서 적절하게 4개 선택한 후, 곱해서 4355를 만드는 문제에 대한 반응을 분석한 것이다. 학생들에게 다소 생소한 형태의 문제이고, 4355를 만들 수 있는 수가 없기 때문에 난이도가 높은 문제로 예상했다. 약 30%의 학생들이 무응답을 한 반면에, 의외로 약 23%의 학생들이 일의 자리를 5로 만드는 수가 없다거나 홀수가 3개이다 등의 수감각을 활용해서 답에 대한 근거를 설명할 수 있었다. 한편, 약 23%의 학생들이 직접 계산하는 과정을 통해서 4355를 만들 수 없다는 것을 알게 되었다.

[표 14] 적절한 수를 선택하여 특정한 수를 만드는 문제의 반응 분석

<table>
<tr><th>문제</th><th>답</th><th>근거</th><th>예</th><th>빈도수(%)</th></tr>
<tr><td rowspan="7">아래와 같이 주어진 수를 한번씩만 사용하여 4개의 수를 곱해서 답이 4355가 되는 수가 있으면 그 수를 골라 O표 하고, 없으면 그 이유를 설명하시오.

14 10 8
15 28 4
9 5 12 2

설명:</td><td rowspan="4">정답</td><td>수감각 활용</td><td>· 일의 자리를 5로 만드는 수가 없다 (15명: 10.95%)
· 홀수가 3개(11명: 8.05%)
· 일의 자리가 0이 됨(3명: 2.19%)</td><td>32 (23.36%)</td></tr>
<tr><td>직접 계산</td><td>· 계산하니 없다(13명: 9.53%)
· 소인수분해 해봤더니 안됨(8명: 5.84%)
· 4355보다 크거나 작다(6명: 4.38%)</td><td>32 (23.36%)</td></tr>
<tr><td>기타</td><td>· 4355가 나오려면 더 큰 수가 필요함
· 큰 수는 10을 곱해야 하는데 10을 곱하면 일의 자리가 5가 안됨
· 더 많은 숫자가 필요함</td><td>5 (3.65%)</td></tr>
<tr><td>설명 없음</td><td></td><td>6 (4.38%)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">오답</td><td>계산상의 오류</td><td>· 2, 14, 15, 28 선택</td><td>4 (2.92%)</td></tr>
<tr><td>기타</td><td>· 있는지 없는지 모름. 없는 것 같다 (9명: 6.57%)
· 문제가 복잡하고 커서 하기 힘들다 (6명: 4.37%)</td><td>17 (12.41%)</td></tr>
<tr><td>무응답</td><td></td><td>41 (29.93%)</td></tr>
</table>

다음은 답의 합리성을 판단하는 데 있어서 수감각을 적절히 활용하는 지를 알아본 것이다. [표 15]를 보면, 대분수의 뺄셈 결과가 틀렸다는 것을 알려주고, 이 답이 틀렸다는 것을 알기 위해서 정확한 계산을 할 필요가 있는지, 아니면 계산 없이 알 수 있는 방법이 있는지 묻는 문제에 대해서 약 64%의 학생들이 정확하게 계산할 필요가 있다고 답했다. 이 중 일부 학생들은 계산한 답을 거꾸로 하여 검산하거나 자연수는 자연수끼리 분수는 분수끼리 계산하는 방법, 암산 등의 방법을 언급하기도 하였으나 모두 공통적으로 계산의 필요성을 주장하였다. 한편, 약 36%의 학생들은 계산이 불필요하다고 판단하였는데, 이 중 28%만 자연수끼리의 뺄셈을 이용한다거나 주어진 두 대분수의 상대적인 크기를 이용하는 등 적절한 수감각을 활용하였다.

마지막으로, 실생활 맥락의 문장제 문제에서 학생들이 수감각을 어떻게 활용하는 지를 알아보는 문제에 대한 반응을 분석하면 다음과 같다. [표 16-1]과 [표 16-2]는 기본 계산 검사에서처럼 책을 주문하는 상황에서 수감각을 적절히 활용하는 지를 알아보는 문제에 대한 반응을 분석한 것이다. 우선 (자연수)×(분수)의 결과를 어림하는 첫 번째 부분의 문제에 대해서 50%의 학생들이 직접 계산을 하여 답을 구하였다([표 16-1]참조). 사실 3/5은 반보다 크고, 600의 반은 300이라는 것을 생각하면, 쉽게 답을 구할 수 있었음에도 불구하고 학생들은 600의 3/5을 계산하여 360은 300보다 크다고 답하였다. 결과적으로 정답율은 약 84%로 매우 높았으나 주어진 문제 상황에 맞게 적절히 수감각을 활용한 비율은 23%정도에 그쳤다.

한편, 두 번째 부분의 문제에 대해서 전체 정답율은 약 58%였으나, 적절한 수감각을 활용한 비율은 10%에 그쳤고, 직접 계산하여 구한 경우도 11%에 달했다([표 16-2]참조). 또한

새로운 문제유형이면서 학생들이 간혹 문제의 의도를 제대로 이해하지 못한 탓으로 정답 여부에 관계없이 상대적으로 다양한 근거로 답을 설명했다.

[표 15] 대분수끼리의 뺄셈 결과를 판단하는 문제의 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
연습문제 $2\frac{1}{4}-1\frac{1}{10}=\frac{19}{20}$에서 답이 틀렸습니다. 답이 틀렸다는 것을 알기 위해서 정확한 계산을 할 필요가 있습니까? 아니면 계산하지 않고 알 수 있는 방법이 있습니까? **설명**:	정답	수감각 활용	· 자연수로 따지면 2-1인데 그것을 계산을 하면 자연수가 나온다. 그런데 $\frac{19}{20}$는 자연수가 없다(23명: 16.78%). · 자연수 빼기에서 2-1=1인데 자연수가 없고, 분자는 $\frac{1}{4}$이 $\frac{1}{10}$보다 크므로 1이상이 남는 것을 알 수 있다(11명: 8.03%).	39 (28.46%)
		기타	· $2\frac{1}{4}$이 $\frac{19}{20}$보다 크다. · 다시 계산하지 않고 풀이과정을 살펴본다.	11 (8.03%)
	오답	계산 필요	· 정확히 계산할 필요가 있다 (51명: 37.23%) · 계산한 답을 거꾸로 계산해 보거나 검산을 한다(8명: 5.83%) · 자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 계산, 분모의 통분 필요(5명: 3.65%)	78 (56.94%)
		기타	· 연습문제이기에 틀려도 괜찮다	1 (0.73%)
		무응답		8 (5.84%)

[표 16-1] 책을 주문하는 상황에서 수감각의 활용에 관한 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
서점에서 새 책 600권을 주문했다. 주인은 주문한 책의 $\frac{3}{5}$을 한 권에 2500원씩 팔았다. ① 서점 주인은 300권보다 많이 팔았습니까? 적게 팔았습니까? (　　　) 그렇게 생각한 이유를 설명해 보시오. **설명:**	정답	수감각 활용	· $\frac{3}{5}$이 반보다 많아서 600권의 $\frac{1}{2}$은 300이고, $\frac{3}{5}$은 $\frac{1}{2}$보다 크기 때문(20명: 14.60%) · $\frac{3}{5}$을 배수하면 $\frac{6}{10}$이기 때문에 $\frac{1}{2}$을 넘었다.(4명: 2.92%)	31 (22.63%)
		직접 계산	· 600÷5×3=360	69 (50.37%)
		기타	· 그냥, 찍었다. ·사람들이 2500원은 싸니까 많이 샀을 것 같다.	9 (6.56%)
		설명 없음		6 (4.38%)
	오답	계산상의 오류	· 600÷$\frac{3}{5}$ 해봤음	1 (0.73%)
		기타	· 300권보다는 적게 100권보다는 많게 판다.	7 (5.11%)
		무응답		14 (10.22%)

[표 16-2] 책을 주문하는 상황에서 수감각의 활용에 관한 반응 분석

문제	답	근거	예	빈도수(%)
서점에서 새 책 600권을 주문했다. 주인은 주문한 책의 $\frac{3}{5}$을 한 권에 2500원씩 팔았다. ② 이 문제의 나머지 수들은 그대로 두고, 주문한 책만 724권으로 바꿀 수 있습니까? (　　　) **설명:**	정답	수감각 활용	· 724의 $\frac{3}{5}$은 없다(7명: 5.11%). · 724권을 5묶음으로 못 나누기 때문(4명: 2.92%)	14 (10.22%)
		직접 계산	· 724권은 $\frac{3}{5}$으로 했을 때 나누어 떨어지지 않는다.	15 (10.95%)
		기타	· 주문한 게 600권이니까(8명: 5.83%) ·바꾸게 되면 답이 달라진다.	40 (29.20%)
		설명 없음		10 (7.30%)
	오답	부적절한 수감각	· 724권의 $\frac{3}{5}$을 한 권에 2500원씩 팔 수 있기 때문에, 말이 되기 때문에 (2명: 1.46%). · 수를 바꾸어 계산할 수 있다 (2명: 1.46%)	7 (5.11%)
		기타	· 책만 724권을 주문하면 된다. ·주문한 책을 724권으로 바꾸어도 300권을 넘게 팔 수 있기 때문.	21 (15.33%)
		무응답		30 (21.89%)

[표 17]은 검사지의 마지막 문제로써 성장에 따른 키의 변화를 예측하는 상황에서 수감각의 활용 정도를 분석한 것이다. 적절한 수감각을 활용하였거나 문제 상황을 고려하여 답을 구한 비율은 35%정도인데 비해, 10살 때 1.5m이므로 20살 때는 3m라고 맹목적인 계산을 활용한 비율이 무려 약 44%였다. 실제 수감각이 필요한 문제 상황이었고, 그다지 난이도가 높은 문제로 간주되지 않았으나, 학생들은 수학과 관련된 검사지에서 계산하는 것에 너무나 익숙한 나머지 이렇듯 실생활에서 일어날 것 같지 않은 키의 변화를 적었다. 이는 주어진 문제 상황을 고려하지 않는, 학생들의 계산 성향을 가장 단편적으로 반영한 예라고 볼 수 있다.

[표 17] 성장에 따른 키의 변화를 예측하는 상황에서 수감각의 활용 정도 분석

<table>
<tr><th>문제</th><th>답</th><th>근거</th><th>예</th><th>빈도수(%)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">10살 소년의 키는 1.5m입니다. 이 소년이 20살이 되었을 때 키가 얼마가 될 것이라고 생각합니까?</td><td rowspan="2">정답</td><td>수감각 활용</td><td>· 1.8m (20명: 14.60%)
· 2m (10명: 7.30%)</td><td>41
(29.93%)</td></tr>
<tr><td>기타</td><td>· 알 수 없다.
· 키가 한창 크다가 갑자기 안 클 수도 있고 어림잡기도 어렵기 때문</td><td>7
(5.11%)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">오답</td><td>맹목적 계산</td><td>· 3m</td><td>60
(43.80%)</td></tr>
<tr><td>기타</td><td>· 1.5m (3명: 2.18%)
· 2.8m, 15m, 30.6m, 150m</td><td>20
(14.60%)</td></tr>
<tr><td>무응답</td><td></td><td>9
(6.56%)</td></tr>
</table>

V. 맺는 말

그동안 우리나라 학생들의 계산 능력은 수학성취도와 관련한 국제 비교 연구에서 상당히 높은 것으로 일관되게 드러났다(Mullis, Martin, Beaton, Gonzalez, Kelly, & Smith, 2000). 하지만, 이러한 탁월한 수학 성취도가 학생들의 순수한 문제해결력을 토대로 한 것인지, 아니면 우리나라 수학과 교육과정에서 전형적으로 강조되어 온 기초 기능이나 계산 능력의 숙달 또는 교사 중심의 수업 방식 등에 기인한 것인지는 의문이다(Pang, 2000). 본 연구는 소규모 연구로써 통계적인 일반화를 논하기는 어렵다. 하지만, 우리나라 학생들을 대상으로 한 수감각 연구가 전반적으로 부족하고, 그나마 단편적인 수감각 수행 능력을 분석하는 데 치중하거나 의도적으로 수감각을 사용해야만 하는 상황에서 실태조사가 실시된 점을 고려해볼 때, 본 연구는 기존의 연구 경향에 새로운 방향을 제시할 수 있고, 여러 가지 결론과 시사점을 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

첫째, 전반적으로 학생들의 수감각 수행 능력은 기본 계산 능력에 비해 상대적으로 낮다. 특히, 수감각 검사 결과를 살펴보면, 상당수의 학생들이 정확한 계산을 통해서 정답을 구한 반면에, 문제와 관련하여 적절한 수감각을 활용하지는 못하였다. 이는 계산 기능이 능숙하다고 해서 자연스럽게 수감각 발달을 이끌지는 않는다는 선행 연구를 지지한다(Yang, 1995). 상황을 이해하고자 하는 욕구로써, 수감각을 수학 교수·학습의 모든 측면에 침투하고 있는 사고방식이라고 정의한다면(Reys, 1992), 단순한 계산 능력과는 완연히 구별된다. 강조

하건대, 수감각은 우연히 개발되는 것이 아니며, 기존의 계산 기능 숙달 위주의 수업이나 수를 단순히 조작하는 경험을 통해서 형성되지는 않는다. 초등 수학교육에서 가장 많은 비중을 차지하고 있는 수와 연산 영역에서 풍부한 수감각의 형성이 주된 목표라면, 이를 학교 수학에서 보다 명시적으로 다루고 학생들이 수감각을 형성할 수 있는 방안을 구체적으로 제시해야 한다.

둘째, 본 연구 전반에 걸쳐 일관되게 드러나는 것은 학생들의 계산 성향이다. 즉, 간단한 수감각만 활용하면 쉽게 답을 구할 수 있는 문제에서 학생들은 정답 여부에 관계없이 계산하여 답을 구하였다(예, 표 9, 10, 12, 13, 15, 16-1, 17). 이러한 경향은 수감각의 주요 구성요소나 주어진 문제 상황에 관계없이 지속적으로 드러나는 현상이었다. 다만, 문제에서 "직접 계산하지 않고", "직접 나누기를 해 보지 않고" 등의 말이 제시된 경우에, 직접 계산하는 비율이 상대적으로 줄었다(예, 표 6, 7, 11). 즉, 학생들은 수학 과목에서 계산하는 데 익숙한 나머지 특별한 지시가 없는 한, 계산이 불필요하거나 비효율적인 상황에서도 직접 계산하는 경우가 많았다. 이는 학생들의 수감각을 개발하기 위해서는 우선 언제 정확한 계산이 요구되는지, 언제 수감각을 활용하는 것이 효율적인지 등을 분별할 수 있는 안목을 길러줄 필요가 있다는 것을 부각시킨다.

셋째, 학생들의 계산 성향은 교과서의 전형적인 계산 문제 유형에 대해서 더욱 분명하게 드러났다. 예를 들어, (소수)+(분수)와 1의 크기 비교(표 9), (소수)x(자연수)의 값을 어림하는 경우(표 10), 대분수와 소수의 혼합계산(표 13), 대분수끼리의 뺄셈(표 15) 등에서 직접 계산한 비율이 매우 높았다. 이는 학생들이 교과서나 익힘책을 통해서 익숙한 문제유형에 대해서는 특히 주어진 문제 상황을 고려하지 않고, 즉각적으로 계산하려는 성향이 높다는 것을 보여준다고 볼 수 있다. 수감각은 학교에서 배운 계산 기능에 많이 의존하기 마련이다. 이를 고려한다면, 학생들의 수감각 개발과 관련하여 특정한 형태의 문제나 교과서의 특정 단원 또는 차시에서만 가르치기보다는 수와 연산 영역의 다양한 계산 상황과 관련하여 학생들이 수감각을 활용하도록 명시적으로 권장할 필요가 있겠다. 예를 들어, (소수)와 (분수)의 덧셈을 공부할 때, 직접 계산하기에 앞서 대략 얼마쯤 될 것인지 어림해 보는 활동 등은 학생들이 정확한 답을 요하는 계산 상황에서도 수감각을 개발할 수 있는 계기가 될 수 있을 것이다.

넷째, 학생들의 수감각 수행 능력을 구성요소별로 비교해볼 때, '연산의 의미와 결과를 이해하기'보다는 '기준 척도의 활용' 부분에서 수행 정도가 상대적으로 낮았다. 특히, 앞에서 언급한 것처럼, (소수)+(분수)와 1의 크기 비교(표 9), (소수)x(자연수)의 값을 어림하는 경우(표 10)에 대부분의 학생들이 계산에 치중하고 1/2, 1/4, 1과 같은 척도를 제대로 사용하지 못하였다. 이는 학생들이 양을 어림하는 데 있어서 기준 척도를 효과적으로 사용하지 못한다는 선행 연구 결과를 지지한다(Yang, 1995). 또한 수감각의 구성 요소 중 '다양한 계산 상황에서 수와 연산 지식의 적절한 활용'과 관련해서는 주어진 문제에 따라 수감각 활용 여부나 다양성 측면에서 많은 차이가 나타났다. 예를 들어, 대분수와 소수의 혼합 계산의 합을 구하는 문제(표 13)에 대해서는 수감각 활용 비율이 매우 낮은 반면에, 계산 순서를 달리한 덧셈의 크기를 비교하는 문제(표 12)에서는 활용 비율이 매우 높았다. 한편, 적절한 수를 선택하여 특정한 수를 만드는 문제(표 14)나 서점에서 팔린 책의 개수를 어림하는 경우(표 16-1)에 대해서는 다른 문제보다 다양한 수감각을 활용하여 답에 대한 근거를 설명하였다.

이는 수감각 개발과 관련하여 우선 구성요소 중에 특히 수감각 활용이 취약한 기준척도의 활용 측면을 학교 수학에서 강조하여 지도할 필요가 있음을 부각시킨다. 또한 학생들

이 주어진 문제 상황에 따라 수감각의 활용 정도가 다르다는 것은 수와 연산 영역 전반에 걸쳐 학생들이 수감각을 개발할 수 있는 기회를 가지지 못했음을 시사하는 것이다. 결과적으로 기존 교육과정에 비해서 현행 교육과정은 수감각을 상대적으로 중요하게 다루고는 있지만 이것으로 충분치 않으므로, 여러 가지 문제 상황에서 학생들이 수와 연산 지식을 자연스럽게 적용할 수 있도록 통합적으로 지도해야 할 것이다.

마지막으로, 본 연구는 소규모연구로써 우리나라 학생들의 수감각 수행 능력을 알아볼 수 있는 문항을 개발하고 적정한 수의 연구대상을 중심으로 다양한 문제 상황에서 수감각의 활용 여부, 수감각 활용 비율과 직접 계산 비율의 대조, 수감각 활용의 다양성 등을 면밀하게 분석하는 데 초점을 두었다. 초등 수학교육에서 수감각의 중요성을 고려한다면, 이에 대한 보다 많은 연구가 필요하며, 특히 본 연구를 하나의 사례 조사의 성격을 지닌 것으로 간주하고, 통계적으로 일반화할 수 있는 대규모의 실태 조사가 필요하다. 또한 우리나라 학생들의 계산 능력 및 수감각 수행능력 정도를 국제적인 측면에서 비교 분석하는 연구도 필요하다고 본다.

참고문헌

강완 외 18인 (공역) (1999). 초등수학 학습지도의 이해. 서울: 양서원.

교육부 (1997). 제7차 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서 주식회사.

김희선, 김정효 (2000). 수감각 발달을 위한 학습 프로그램 개발 연구: 초등학교 1학년을 중심으로. 교과교육학연구, 4, 1-15.

남형채 (1999). 초등학교 학생들의 수감각 개발 학습에 대한 소고. 대구교육대학교 논문집, 34, 147-178.

배종수 (2002). 제7차 교육과정을 중심으로 초등수학교육 내용지도법. 서울: 경문사.

선춘화 (2005). 초등학교 6학년 학생의 수감각 실태 조사.

이점미 (2005). 초등학교 3학년 학생들의 수감각 발달을 위한 프로그램 개발과 적용에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

Markovits, Z. (1989). Reaction to the conference on number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 78-81). San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

Markovits, Z. & Pang, J.S. (2004, July). *Students' ability to cope with routine tasks and with number-sense tasks in Israel and in Korea*. Paper presented at the annual meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway.

Markovits, Z. & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. J., and Reys, R. E. (1992) A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*, 2-8.

Mullis, I. V.S., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T., A. (2000). *TIMSS 1999 international mathematics report. Boston, MA: Boston College.*

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Pang, J.S. (2000, April). *Implementing student-centered instruction in Korean and the U.S. elementary mathematics classrooms*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. New Orleans, LA. [Educational Resources Information Center: **ED441672**]

Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. Sowder & B. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 35-39). San Diego, CA: San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Reys, B. J. (1992). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series, grades 5-8, developing number sense in the middle grades.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 2*(2), 225-227.

Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2), 61-70.

Sowder, J. T., & Schappelle, B. P. (2002). Number sense-making. In D. L. Chambers (Ed.), *Putting research into practice in the elementary grades* (pp.82-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trafton, P. R. (1991). *Using number sense to develop mental computation and computational estimation.* Paper presented at a conference: Challenging children to think when they compute: Developing number sense, mental computation and computational estimation. Brisbane, Australia: Queensland University of Technology Centre for Mathematics and Science Education.

Van de Walle, J. A. (1998). Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics. NY: Macmillan.

Yang, D. (1995). *Number sense performance and strategies possessed by sixth and eigth grade students in Taiwan.* Unpublished doctoral dissertation. The University of Missouri-Columbia.

A Study on the Computation and Number-Sense Ability of Elementary School Students

Pang, JeongSuk[5)]

Abstract

Despite the importance of number sense, computational skills have been emphasized in elementary mathematics curriculum. There is lack of research on number sense. Against this background, this study analyzed the way 137 sixth grade students coped with routine computation problems and with problems requiring number sense. Students performed better on the computation tasks than on the number sense tasks. With regard to the number sense tasks, many students had a tendency to implement direct computation rather than to use number sense appropriate to the given contexts. Students also had difficulties in making use of effective benchmarks or applying the knowledge of number and operation to various problem contexts. An implication is that students should explore multiple tasks requiring number sense as an integral part of their mathematics learning in order to develop number sense.

Key Words : Elementary Mathematics, Computation Skills, Number Sense, Estimation, Number & Operation, Benchmarks.

5) Korea National University of Education (jeongsuk@knue.ac.kr)