

# 완전비선형 Boussinesq 모형의 천수 및 쇄파 특성

윤종태\* · 박승민\*  
\*경성대학교 토목공학과

## Shoaling and Breaking Characteristics of Fully Nonlinear Boussinesq Model

JONG-TAE YOON\*, SEUNG-MIN PARK\*

\*Department of Civil Engineering, Kyungsoong University, Busan, Korea

**KEY WORDS:** Shoaling 천수, Breaking 쇄파, Nonlinear 비선형, Boussinesq Model 부시네스크 모형, Numerical Model 수치모형

**ABSTRACT:** The accuracy of predicting wave transformation in the nearshore is very important to wave hydrodynamics, sediment transport, and design of coastal structures. Numerical experiments are conducted to identify the shoaling and breaking characteristics of a fully nonlinear Boussinesq equation-based model. Simulated shoaling showed good agreement with the Shouto's formula, and the results of the breaking experiment agreed well with experimented data, over several beach profile.

### 1. 서 론

Boussinesq형 방정식들은 파랑변형을 나타내는 수학적 모형의 하나로서 파랑의 비선형성과 분산성이 고려되어, 내제된 가정에 따른 적용범위 내에서는 상당히 정확한 모형이다. Peregrine(1967)은 수면변위와 수심평균 유속을 사용하여 변수심에 대한 식을 발표하였고 Freilich and Guza(1984)와 Elgar and Guza(1985)는 Peregrine의 방정식을 각 주파수에 대한 식으로 나타내어 파랑 스펙트럼의 발달을 연구하였다.

이러한 일반 Boussinesq방정식들은 약분산성(weak dispersion)과 약비선형(weak nonlinearity) 가정 때문에 그 적용대상이 천해역과 비선형 효과가 작은 경우로 제한되었다. 일반 Boussinesq방정식의 분산관계식은 선형 분산관계식과 비교하여 천해에서는 비교적 일치하지만 중간수심에서부터 심해로 갈수록 그 오차가 커져 파랑의 분산성을 제대로 모의할 수가 없다. 이러한 단점을 보완하기 위해 Madsen et al.(1991)과 Nwogu(1993)는 확장형 Boussinesq방정식을 발표하였다. Madsen et al.(1991)은 모형의 정확도 내에서는 영이 되는 항을 사용하여, 운동량 방정식에서 고차항의 정도를 높임으로써 보다 향상된 선형모형을 유도하였다. 이에 비해 Nwogu(1993)는 임의 수심에서의 유속을 새로운 종속변수로 선택하여 새롭게 지배 방정식을 유도하였는데 연속방정식과 Euler 방정식으로부터의 유도과정에 일관성이 잘 유지되고 있다. 유속이 정의되

는 수심은 분산관계식이 가장 정확히 나타나는 값으로 결정한다. 두 방법이 유도과정은 다르지만 분산관계식의 정확도에서는 비슷한 정도를 보여주고 있고, 심해역까지로의 확장은 한계가 있지만, 중간수심 영역에선 일반 Boussinesq 모형에 비해 훨씬 더 향상된 분산성을 보여준다. Wei and Kirby(1995)는 Nwogu의 방정식에 대해 고차의 수치모형을 발표하고 이를 이용해 방정식의 특성을 분석하였다.

확장형 Boussinesq 방정식은 분산성에 있어서는 그 정확도가 많이 향상되었지만 비선형성에 있어서는 여전히 약비선형이라는 가정을 안고 있다. 파가 해안을 향해 전파해 오면 천수 현상에 의해 파고가 증가하게 되고 결국 쇄파가 일어나게 되는데, 파고와 수심비로 나타내어지는 이러한 비선형성이 강하게 나타나는 쇄파대 전후에서의 파랑은 약비선형 모형으로 정확히 모의되지 않는다. 따라서 파형경사가 급해지거나 쇄파가 일어나는 곳에서까지 파랑을 정확히 모의하기 위해서는 비선형성에 대한 모형의 확장이 필요하다. Wei et al.(1995)은 Nwogu의 방정식에서처럼 특정수심에서의 유속을 변수로 선택하여 Boussinesq방정식을 유도하였는데, 자유수면 경계조건인 비선형성을 그대로 유지함으로써 모형의 비선형성을 확장하였다.

한편 Boussinesq 방정식에 쇄파구조를 도입하기 위한 시도가 계속되어 왔는데 Heitner and Housner(1970)는 운동량 보존식에 가상 점성항(artificial viscosity term)을 추가하여 지진해일을 해석하였고, Zelt(1991)는 와점성으로 표현되는 쇄파구조를 사용하여 고립파의 쇄파를 모의하였으나 운동량이 보존되지 못하는 단점이 있었다. Schäffer et al.(1993)과 Madsen et al.(1997)은 롤러 근

제1저자 윤종태 연락처: 부산광역시 남구 대연3동 110-1

051-620-4752 gtyun@star.ks.ac.kr

사(roller-based approximation)를 사용한 쇄파구조를 제안하였고, Kennedy et al.(2000)은 와점성 형태의 쇄파모형에서 쇄파의 시작 및 종료에 대한 기준을 자연현상에 보다 부합되도록 개선하였다.

본 연구에서는 Wei et al.(1995)의 완전비선형 Boussinesq 수치모형을 이용하여 쇄파대를 포함한 천해역에서의 파랑변형을 수치모의 하였다. 스폰지 경계층 및 면 내부조파기법이 사용되었고 쇄파구조는 Kennedy et al.(2000)의 와점성모형이 사용되었다. 수치실험을 통해 비선형 모형의 천수특성을 확인한 후, 일경경사 지형, 사주형 지형 및 계단형 지형에서의 쇄파 변형 모의하고 실험치 및 환경사방정식을 이용한 선형모형의 결과와 비교하였고 이를 통해 쇄파대 파랑변형 모의에서 비선형 모형의 중요성을 검토하였다.

## 2. 모형의 구조

### 2.1 지배방정식

Wei et al.(1995)의 완전비선형 Boussinesq 방정식에 내부조파를 위한 원천항  $f(x, y, t)$ 와 와점성항  $F_{br}$ ,  $G_{br}$  및 스폰지층에서의 감쇄항  $F_{sp}$ ,  $G_{sp}$ 를 추가한 후 정리하면 다음과 같이 연속방정식과 운동량방정식으로 표현된다.

$$\eta_t = E'(\eta, u, v) \quad (1)$$

$$[U(u)]_t = F'(\eta, u, v) + [F_1(v)]_t \quad (2)$$

$$[V(v)]_t = G'(\eta, u, v) + [G_1(u)]_t \quad (3)$$

여기서

$$E' = E(\eta, u, v) + \gamma E_2(\eta, u, v) + f(x, y, t) \quad (4)$$

$$F' = F(\eta, u, v) + \gamma [F_2(\eta, u, v) + F^t(\eta, u_t, v_t)] + F_{br} + F_{sp} \quad (5)$$

$$G' = G(\eta, u, v) + \gamma [G_2(\eta, u, v) + G^t(\eta, u_t, v_t)] + G_{br} + G_{sp} \quad (6)$$

그리고 함수들은 다음과 같다.

$$U = u + h [b_1 h u_{xx} + b_2 (hu)_{xx}] \quad (7)$$

$$V = v + h [b_1 h v_{yy} + b_2 (hv)_{yy}] \quad (8)$$

$$E = -\frac{1}{x} [(Au)_x + (Av)_y] - \frac{1}{2} a_1 h^3 (u_{xx} + v_{yy}) + a_2 h^2 [(hu)_{xx} + (hv)_{yy}] \frac{3}{4} x - \frac{1}{2} a_1 h^3 (u_{yy} + v_{xx}) + a_2 h^2 [(hu)_{yy} + (hv)_{xx}] \frac{3}{4} y \quad (9)$$

$$F = -g\eta_x - (u u_x + u v_y) \quad (10)$$

$$G = -g\eta_y - (v v_x + v u_y) \quad (11)$$

$$F_1 = -h [b_1 h v_{xy} + b_2 (hv)_{xy}] \quad (12)$$

$$G_1 = -h [b_1 h u_{xy} + b_2 (hu)_{xy}] \quad (13)$$

$$E_2 = -\frac{1}{2} [a_1 h^2 \eta + \frac{1}{6} \eta (h^2 - \eta^2)] (u_{xx} + v_{yy}) \frac{3}{4} x - \frac{1}{2} [a_2 h \eta - \frac{1}{2} \eta (h + \eta)] [(hu)_{xx} + (hv)_{yy}] \frac{3}{4} x \quad (14)$$

$$- \frac{1}{2} [a_1 h^2 \eta - \frac{1}{6} \eta (h^2 - \eta^2)] (u_{xy} + v_{yy}) \frac{3}{4} y - \frac{1}{2} [a_2 h \eta - \frac{1}{2} \eta (h + \eta)] [(hu)_{xy} + (hv)_{xy}] \frac{3}{4} y$$

$$F_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) [u (u_x + v_y)_x + v (u_x + v_y)_y] \frac{3}{4} x - \frac{1}{2} (z_\alpha - \eta) [u [(hu)_x + (hv)_y]_x + v [(hu)_x + (hv)_y]_y] \frac{3}{4} x - \frac{1}{2} [(hu)_x + (hv)_y + \eta (u_x + v_y)]^2 \frac{3}{4} x \quad (15)$$

$$G_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) [u (u_x + v_y)_x + v (u_x + v_y)_y] \frac{3}{4} y - \frac{1}{2} (z_\alpha - \eta) [u [(hu)_x + (hv)_y]_x + v [(hu)_x + (hv)_y]_y] \frac{3}{4} y - \frac{1}{2} [(hu)_x + (hv)_y + \eta (u_x + v_y)]^2 \frac{3}{4} y \quad (16)$$

$$F^t = \frac{1}{2} \eta^2 [(u_t)_x + (v_t)_y] + \eta [h (u_t)_x + [h (v_t)]_y] \frac{3}{4} \frac{3}{4} x \quad (17)$$

$$G^t = \frac{1}{2} \eta^2 [(u_t)_x + (v_t)_y] + \eta [h (u_t)]_x + [h (v_t)]_y \frac{3}{4} \frac{3}{4} y \quad (18)$$

여기서  $u$ ,  $v$ 는 평면유속,  $h$ 는 수심,  $\eta$ 는 수면변위이고  $z_\alpha$ 는 유속이 정의되는 수심이다.  $\gamma$ 가 1일 경우 완전 비선형 Boussinesq 방정식이 되고  $\gamma = 0$ 이 되면 Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식이 된다. 그리고  $K = 1$ ,  $\Lambda = h + \eta$  이다.

### 2.2 쇄파구조

쇄파로 인한 파고의 감쇄 뿐만 아니라 부서지는 파의 파형을 제대로 나타내기 위해서는 감쇄구조가 시-공간적으로 제한되게 작용해야 하고 특히 파의 전면에 작용해야 한다. 본 연구에서는 Zelt(1991)의 와점성 모형과 유사하면서 쇄파의 시작 및 종료를 실제 현상에 보다 부합되도록 확장한 Kennedy et al.(2000)의 방법을 사용한다. 운동량의 혼합 개념을 적용한 쇄파식은 다음과 같다.

$$F_{br} = \frac{1}{h + \eta} ([\nu (h + \eta) u_{x\alpha}]_x + \frac{1}{2} [\nu (h + \eta) u_{y\alpha} + \nu (h + \eta) v_{x\alpha}]_y) \quad (19)$$

$$G_{br} = \frac{1}{h + \eta} ([\nu (h + \eta) u_{y\alpha}]_y + \frac{1}{2} [\nu (h + \eta) u_{y\alpha} + \nu (h + \eta) v_{x\alpha}]_x) \quad (20)$$

시간과 위치의 함수인 와점성계수  $\nu$ 는 Zelt(1991)의 공식과 유사한 형태로 주어진다.

$$\nu = B\delta_b^2(h + \eta)\eta_t \quad (21)$$

여기서  $\delta_b$ 는 혼합거리 계수이다. 갑작스러운 감쇄구조의 시작으로 인한 수치적 불안정성을 피하기 위해  $B$ 는 다음과 같이 0과 1 사이에서 점진적으로 변하는 값을 가진다. 와점성계수를 상수로 취급하면 쇄파되는 파랑의 비대칭성을 자연스럽게 모의할 수가 없다.

$$B = \begin{cases} 1 & , \quad \eta_t \geq 2\eta_t^* \\ \frac{\eta_t}{\eta_t^*} - 1 & , \quad \eta_t^* < \eta_t \leq 2\eta_t^* \\ 0 & , \quad \eta_t \leq \eta_t^* \end{cases} \quad (22)$$

매개변수  $\eta_t^*$ 는 쇄파의 시작과 정지를 결정한다.

본 연구에서의 쇄파는  $\eta_t$ 가 어떤 주어진 초기값을 초과할 경우 쇄파가 시작되고 이후엔  $\eta_t$ 가 이 값 아래로 떨어지더라도 쇄파가 계속되는 구조를 취하고 있다. 그러므로  $\eta_t^*$ 는 초기치  $\eta_t^{(I)}$ 에서부터 시간이 지남에 따라 최종값  $\eta_t^{(F)}$ 로 줄어드는 구조를 취하고 있다.

$$\eta_t^* = \begin{cases} \eta_t^{(F)} & , \quad t \geq T^* \\ \eta_t^{(I)} + \frac{t-t_0}{T^*} (\eta_t^{(F)} - \eta_t^{(I)}) & , \quad 0 \leq t-t_0 < T^* \end{cases} \quad (23)$$

여기서  $T^*$ 는 쇄파지속시간,  $t_0$ 는 쇄파의 시작시간 그리고  $t-t_0$ 는 쇄파연령이 된다.  $\eta_t^{(I)}$ ,  $\eta_t^{(F)}$ ,  $T^*$ 의 값들은 각각  $0.35\sqrt{gh} \sim 0.65\sqrt{gh}$ ,  $0.08\sqrt{gh} \sim 0.15\sqrt{gh}$ , 그리고  $2\sqrt{h/g} \sim 5\sqrt{h/g}$ 의 값들을 가진다

### 3. 수치기법

Boussinesq 방정식에서 1계 공간미분항을 2차의 정확도로 차분화하면 방정식의 분산항과 수학적으로 동일한 형태의 차분오차가 발생한다. 대부분의 수치기법들은(Abott et al., 1984; Nwogu, 1993) 이런 오차항을 2차 차분식에 역대입하여 해석해왔다. Wei and Kirby(1995)는 모든 차분오차가 방정식의 분산항들보다는 작아지도록 차분화하여 이런 문제를 피하였다. 즉 1계 공간미분항은 4차의 정확도로 차분화하고 분산항은 2차의 정확도로 차분화한다. 그리고 시간적분에는 4차의 Adams predictor-corrector 기법을 사용하였고 본 연구에서도 동일한 수치기법이 적용되었다.

### 4. 수치실험 및 결과

#### 4.1 천수실험

파랑이 외해에서 육지로 전파해오며 수심이 얕아지면 파고가

커지면서 파동의 비선형성이 중요해지게 된다. 파고의 증가로 나타나는 이러한 천수효과는 상대수심과 심해파형경사의 함수로서 비선형 파랑변형의 하나이다. 경사 1/30의 해안에 대해 심해파형경사에 따른 천수변형을 계산한 결과를 Fig. 1에 나타내었다. 결과는 대부분의 파형경사에 대해 실험치와 잘 일치하는 것으로 알려진 Shuto(1974)의 식과 선형이론으로 계산한 결과치와 비교하였다. 본 모형의 경우 파형경사가 클 때 비교적 큰 천수계수 값을 보여주긴 하지만 전체적으로 Shuto의 비선형 천수식과 양호한 일치를 보여주고 있다. 특히 비선형 효과를 고려함으로써 파형경사에 따른 천수계수의 변화가 뚜렷이 구분됨을 확인할 수 있다. 이에 비해 선형이론은 파형경사에 무관하게 상대수심에 따른 파고변화를 보여주고 있다. Shuto의 식은 다음과 같다.

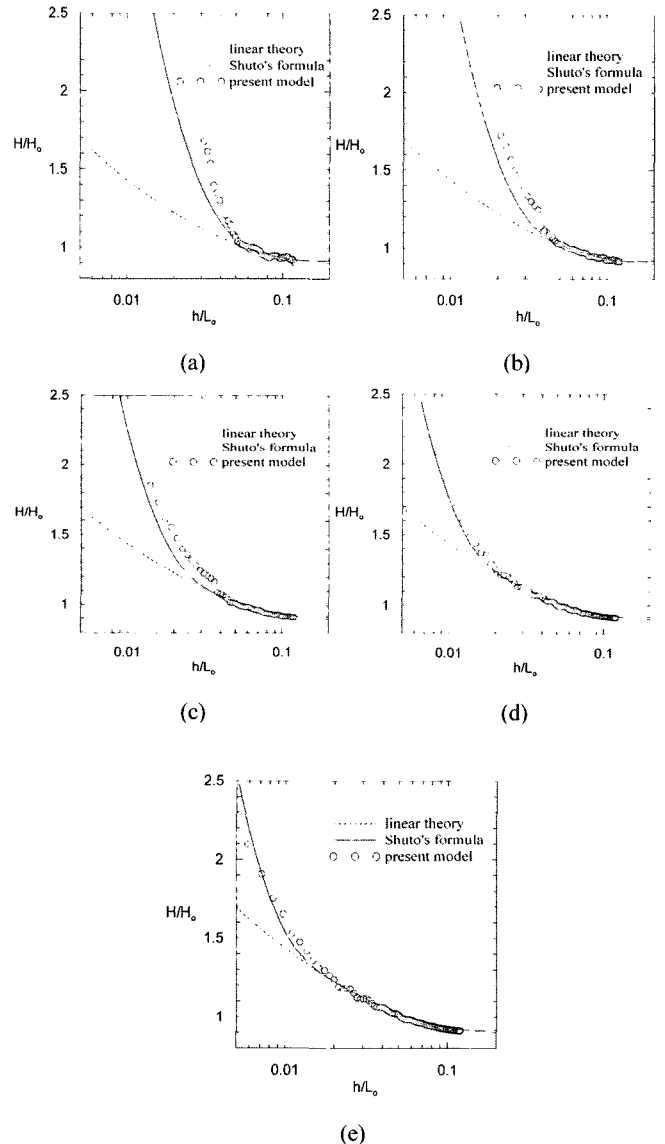


Fig. 1 Shallowing coefficient for (a)  $H_0/L_0=0.02$ , (b)  $H_0/L_0=0.01$ , (c)  $H_0/L_0=0.005$ , (d)  $H_0/L_0=0.002$ , (e)  $H_0/L_0=0.001$

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{1}{2n} \frac{1}{\tanh kh}} \quad , \quad U_r \leq 30$$

$$Hh^{2/7} = \text{const.} \quad , \quad 30 \leq U_r \leq 50$$

$$Hh^{5/2} (\sqrt{U_r} - 2\sqrt{3}) = \text{const.} \quad , \quad 50 \leq U_r$$

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

$$U_r = gHT^2/h^2$$

여기서  $H$ 는 파고,  $k$ 는 파수이다.

4.2 쇄파실험

경사 1/10, 1/20의 일정경사 지형 및 계단형, 사주형의 복합경사 지형에 대해 쇄파대의 파랑변형을 모의하였다. 1/10 경사의 경우 Tsai et al.(1995)의 실험치와, 그리고 1/20의 경사 및 복합경사의 경우 Nagayama(1983)의 실험치와 비교하였고, 전 경우에 대해 환경사방정식을 사용한 Watanabe and Dibajnia(1988)의 선형모형의 결과도 함께 도시하였다(Fig. 2).

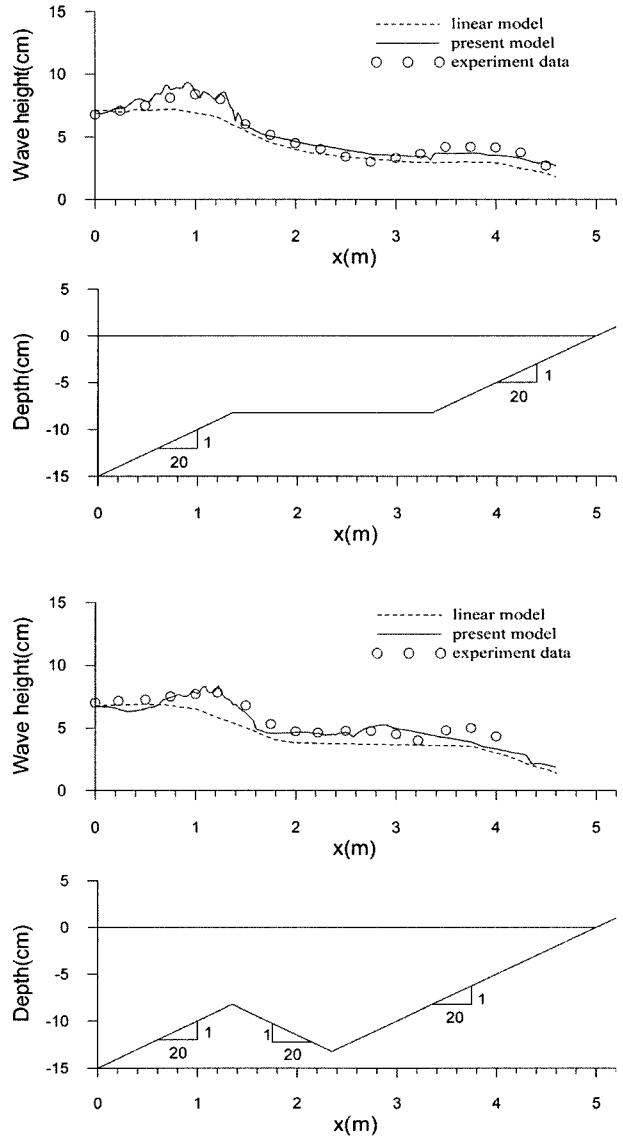
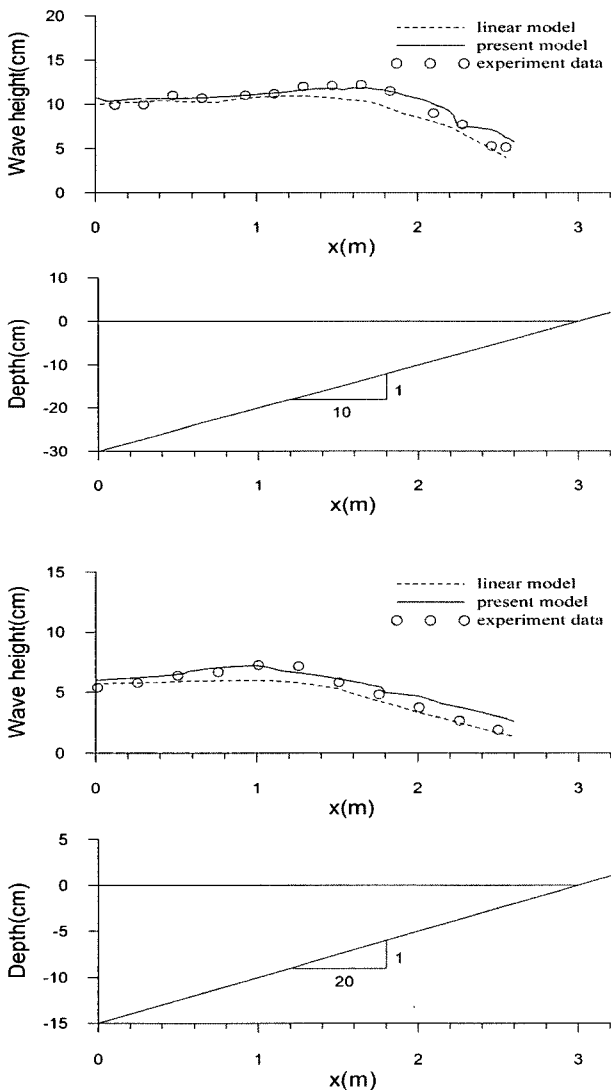


Fig. 2 Wave deformation across the surf zone according to change of slope

일정경사 지형에 대한 실험결과를 보면 본 모형의 결과가 선형 모형에 비해 실험치와 보다 양호한 일치를 보여주고 있다. 특히 비선형 천수효과가 선형 모형에 비해 잘 모의되고 있고 이로 인해 보다 큰 쇄파파고 값을 보여주고 있다.

계단형 지형의 경우 본 모형과 선형모형 모두 해안쪽 경사면에서의 이차 쇄파를 잘 모의하였지만 일차 쇄파 전의 천수현상 모의에서 선형모형은 실험치와 큰 편차를 보여주었다. 사주형 지형은 파랑이 전파해가며 천수, 일차쇄파, 파고감소, 파고증가, 이차쇄파라는 일련의 파랑변형을 겪게되는 경우이다. 선형모형의 경우 일차 쇄파 이후 이차쇄파가 일어나기까지 파고의 변화가 없음에 비해 본 모형의 경우 이차천수현상을 포함한 전체 파랑변형을 모의할 수 있었다. 하지만 이차쇄파가 실험치보다 약 1m 외해에서 발생하였는데 이는 앞 절에서 확인한 비교적 큰 천수계수 값과 쇄파모형의 특성이 복합적으로 작용하여 나타난 결과로 생각된다.

## 5. 결 론

4차의 Adams predictor-corrector 기법으로 차분한 완전비선형 Boussinesq 모형을 사용하여 쇄파대에서의 파랑변형을 모의하였다. 천수실험에서 본 모형의 경우 상대수심과 심해파형 경사에 따른 천수계수의 변화가 잘 모의되었음에 비해, 선형모형의 경우 파형경사에 따른 변화를 모의할 수 없었고 상대수심에 따른 변화도 수심이 작아질수록 비선형 모형의 결과와 큰 차이를 보였다.

일정경사 지형과 사주 및 계단형의 복합경사 지형에서의 파랑변형 모의실험에서 본 모형의 경우 전체적으로 실험치와 양호한 일치율을 보여주었다. 특히 본 모형의 경우 비선형 천수효과를 정확히 구현하므로써 복합지형에서 발생하는 일련의 파랑변형을 잘 모의할 수 있었지만 선형모형은 한계를 보였다. 사주형 지형에 대한 실험에서 이차쇄파의 위치가 실험치보다 약 1m 외해쪽에서 발생하였는데, 비교적 큰 천수계수와 쇄파모형의 특성이 복합적으로 작용하여 나타난 결과로 생각된다.

이상의 실험을 통해 파랑의 비선형성이 강해지는 쇄파대에서 비선형 모형의 중요성을 확인하고, 완전 비선형 Boussinesq 모형의 특성을 확인하였다.

## 후 기

본 연구는 2002학년도 경성대학교 연구년 과제로 수행되었습니다.

## 참 고 문 헌

Abbott, M.B., McCowan, A.D. and Warren, I.R. (1984). "Accuracy of Short Wave Numerical Model", J. Hydr. Engrg., Vol 110, No 2, pp 1287-1301.

Elgar, S. and Guza, R.T. (1985). "Shoaling Gravity Waves : Comparisons between Field Observations, Linear Theory and a Nonlinear Model", J. Fluid Mech., Vol 158, pp 47-70.

Freilich, M.H. and Guza, R.T. (1984). "Nonlinear Effects on Shoaling Surface Gravity Waves", Proc. Roy. Soc. London, A311, pp 1-41.

Heitner, K.L. and Housner, G.W. (1970). "Numerical Model for Tsunami; Run-up", J. Waterways, Ports, Coastal and Ocean Engrg., Vol 96, pp 701-719.

Kennedy, A.B., Chan, Q., Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (2000). "Boussinesq Modelling of Wave Transformation,

Breaking and Runup. I: One Dimension", J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., Vol 126, pp 48-56.

Madsen, P.A., Murray, R. and Sørensen, O.R. (1991). "A New Form of Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics", Coast. Engrg., Vol 15, No 4, pp 371-388.

Madsen, P.A., Sørensen, O.R. and Schäffer, H.A. (1997). "Surf Zone Dynamics Simulated by a Boussinesq-type Model. Part I. Model Description and Cross-shore Motion of Regular Waves", Coastal Engrg., Vol 32, pp 255-287.

Nagayama, S. (1983). Study on the Change of Wave Height and Energy in the Surf Zone, Bachelor Thesis, Yokohama National University, Japan.

Nwogu, O. (1993). "An Alternative Form of the Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation", J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., Vol 119, No 6, pp 618 -638.

Peregrine, D.H. (1967). "Long Wave on a Beach", J. Fluid Mech., Vol 27, pp 815-827.

Schäffer, H.A., Madsen, P.A. and Deigaard, R.A. (1993). "A Boussinesq Model for Waves Breaking in Shallow Water", Coast, Engrg., Vol 20, pp 185-202.

Shuto, N. (1974). "Nonlinear Long Waves in a Channel of Variable Section", Coastal Engineering in Japan, JSCE. Vol 17, pp 1-12.

Tsai, C.P., Chen, H.B., Hsu, H.T. (1995). "Estimation of Wave Height Deformation in Surf Zone", Journal of Harbor Technology, Vol 10, pp 93-111.

Watanabe, A., Dibajnia, H. (1988). "A Numerical Model of Wave Deformation in Surf Zone", Proceedings of the 21st International Conference on Coastal Engineering, ASCE, pp 578-587.

Wei, G. and Kirby, J.T. (1995). "Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations", J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., Vol 121, No 5, pp 251-261.

Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T. and Subramanya, R. (1995). "A Fully Nonlinear Boussinesq Model for Surface Waves. Part I : Highly Nonlinear Unsteady Waves", J. Fluid Mech., Vol 294, pp 71-92.

Zelt, J.A. (1991). "The Run-up of Nonbreaking and Breaking Solitary Waves", Coast. Engrg., Vol 15, pp 1192-1204.

2004년 9월 22일 원고 접수

2005년 3월 31일 최종 수정본 채택