

자유-자유보의 동적해석에 대한 섭동법의 적용

Application of Perturbation Method to the Dynamic Analysis of Free-free Beam

곽 문 규†

Moon K. Kwak

(2004년 10월 6일 접수 ; 2004년 12월 15일 심사완료)

Key Words : Dynamic Analysis(동적 해석), Free-free Beam(자유-자유보), Perturbation Method(섭동법)

ABSTRACT

This paper is concerned with the application of perturbation method to the dynamic analysis of free-free beam. In general, the rigid-body motions and elastic vibrations are analyzed separately. However, the rigid-body motions cause vibrations and elastic vibrations also affect rigid-body motions in turn, which indicates that the rigid-body motions and elastic vibrations are coupled in nature. The resulting equations of motion are hybrid and nonlinear. We can discretize the equations of motion by means of admissible functions but still we have to cope with nonlinear equations. In this paper, we propose the use of perturbation method to the coupled equations of motion. The resulting equations consist of zero-order equations of motion which depict the rigid-body motions and first-order equations of motion which depict the perturbed rigid-body motions and elastic vibrations. Numerical results show the efficacy of the proposed method.

1. 서 론

항공기나 우주구조물, 선박, 잠수함과 같은 구조물은 지지되어 있지 않기 때문에 보로 간주했을 경우 양단 자유의 보로 볼 수 있다.⁽¹⁾ 자유-자유보의 동적 해석은 일반적으로 보를 강체로 볼 것인가 아니면 탄성체로 볼 것인가에 따라 해석이 다르게 된다. 또한 강체 운동과 탄성 진동이 서로 간섭하지 않는다는 가정 하에서는 강체운동에 대한 해석과 탄성진동에 대한 해석을 분리하여 수행할 수 있다.⁽¹⁾ 특히 양단이 자유인 보의 경우에 대해 자유진동해석을 수행하였을 경우 진동수가 0인 강체 모드에 대해서는 그런 모드가 있다고 추정하게 된다. 그러나 강체 진동 해석을

수행할 경우 이들 강체 모드는 무시하고 오직 탄성 고유모드만을 고려하여 응답을 계산한다. 물론 이와 같은 응답계산이 강체운동과 탄성진동간의 연성 효과가 적은 경우에는 타당하다고 말할 수 있다.

구조물이 강체운동과 탄성진동을 모두 경험하게 된다면 구조물에 대한 운동방정식은 Hybrid, 즉 상미분방정식과 편미분방정식이 조합된 형태로 나타나게 된다.⁽²⁾ 또한 강체운동의 영향으로 운동방정식은 비선형이다. 상미분방정식과 편미분방정식이 뒤섞인 형태를 수치적으로 계산한다는 것은 용이하지 않기 때문에 일반적으로 편미분방정식의 변수인 탄성변위를 허용함수와 가정모드법을 도입하여 이산화한다.⁽³⁾ 이렇게 이산화하였을 경우 운동방정식은 비선형의 상미분방정식 형태를 가지게 된다.^(4,5) 비선형 운동방정식은 구조물의 조종(manuevering) 또는 제어기 설계에 적합하지 못하다. 그래서 섭동법을 적용하여 비선형의 강체운동방정식과 섭동된 강체운동과 탄성진동이 연성된 선형 운동방정식으로 분리하여 해석하는 시도가

† 책임저자 : 정희원, 동국대학교 기계공학과
E-mail : kwakm@dgu.ac.kr
Tel : (02) 2260-3705, Fax : (02) 2263-9379

있어왔다.⁽¹⁻⁶⁾ Meirovitch and Tuzcu⁽⁶⁾는 항공기를 이와 같은 방법을 이용해 응답을 계산하였는데, 이 방법의 타당성에 대해서 아직 인식이 되어 있지 않아 본 연구에서는 좀더 쉬운 문제를 대상으로 이 방법의 타당성을 입증하고자 시도하였다.

이 연구에서는 2차원 평면상에서 강체운동과 탄성진동을 동시에 경험하는 보를 대상으로 섭동법을 이용하여 동적 해석을 수행하는 과정을 집중적으로 조사하였다. 이 과정에서 이론 전개 과정을 자세히 설명하고 수치해석 결과를 바탕으로 이 방법의 장점을 토의하였다.

2. 운동방정식

다음 그림은 2차원 평면상에서 강체운동과 탄성진동을 동시에 경험하는 자유-자유보를 나타낸다.

여기서 X 와 Y 는 절대 좌표를 의미하며 x, y 는 자유-자유보의 국부좌표를 나타낸다. \vec{R} 은 절대좌표계의 원점 O 로부터 자유-자유보의 국부좌표원점 o 까지의 위치벡터를 나타내며, θ 는 절대좌표계에 대한 국부좌표계의 강체회전을 나타낸다. $u(x, t)$ 는 y 방향으로의 탄성변위를 가리킨다.

동적에너지를 구하기 위해서는 보의 임의의 점에서의 속도벡터를 구해야한다. 임의의 점, P 에서의 위치벡터를 구해보면 다음과 같다.

$$\vec{R}_p = (R_x + xc\theta - us\theta)\vec{i} + (R_y + xs\theta + uc\theta)\vec{j} \quad (1)$$

여기서 i, j 는 절대좌표계의 단위벡터를 나타내며 $s\theta = \sin\theta, c\theta = \cos\theta$ 를 각각 나타낸다. 이 위치벡터를 시간에 대해 미분하면 임의의 위치에서의 속도벡

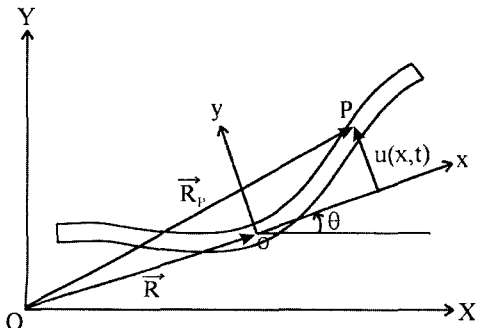


Fig. 1 Free-free flexible beam

터가 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_p = & (\dot{R}_x - x\dot{\theta}s\theta - u\dot{s}\theta - u\dot{\theta}c\theta)\vec{i} \\ & + (\dot{R}_y + x\dot{\theta}c\theta + u\dot{c}\theta - u\dot{\theta}s\theta)\vec{j} \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 운동에너지는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int \bar{m} \dot{\vec{R}}_p \cdot \dot{\vec{R}}_p dx \\ = & \frac{1}{2} m (\dot{R}_x^2 + \dot{R}_y^2) + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int \bar{m} \dot{u}^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \int \bar{m} u^2 dx + \dot{\theta} \int \bar{m} x u dx - S_o \dot{R}_x \dot{\theta} s\theta \\ & - \dot{R}_x s\theta \int \bar{m} u dx - \dot{R}_x \dot{\theta} c\theta \int \bar{m} u dx + S_o \dot{R}_y \dot{\theta} c\theta \\ & + \dot{R}_y c\theta \int \bar{m} u dx - \dot{R}_y \dot{\theta} s\theta \int \bar{m} u dx \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 \bar{m} 은 단위길이당 질량이며 따라서 m 은 보의 전체 질량이 된다. 또한

$$S_o = \int \bar{m} x dx, I_o = \int \bar{m} x^2 dx \quad (4)$$

이다. S_o 와 I_o 는 일차와 이차의 질량관성모멘트를 나타내는데 만일 국부좌표계의 원점 o 가 질량 중심에 위치한다면 $S_o = 0$ 가 된다.

허용함수를 이용하여 탄성변위를 이산화하면 다음과 같이 쓸수 있다.

$$u(x, t) = \Phi(x)q(t) \quad (5)$$

여기서 $\Phi(x) = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n]$ 이고 $q = [q_1 q_2 \dots q_n]^T$ 이다.

식 (5)를 식 (3)에 대입하면 운동에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m (\dot{R}_x^2 + \dot{R}_y^2) + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 q^T M q + \dot{\theta} \dot{\bar{\Phi}} \bar{q} - S_o s\theta \dot{R}_x \dot{\theta} - \dot{R}_x s\theta \dot{\bar{\Phi}} \bar{q} \\ & - \dot{R}_x \dot{\theta} c\theta \bar{\Phi} \bar{q} + S_o c\theta \dot{R}_y \dot{\theta} + \dot{R}_y c\theta \dot{\bar{\Phi}} \bar{q} - \dot{R}_y \dot{\theta} s\theta \bar{\Phi} \bar{q} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} M = & \int \bar{m} \Phi^T \Phi dx, \bar{\Phi} = \int \bar{m} \Phi dx, \\ \dot{\bar{\Phi}} = & \int \bar{m} x \dot{\Phi} dx \end{aligned} \quad (7)$$

또한 탄성에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$V = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} q^T K q \quad (8)$$

여기서

$$K = \int EI \Phi''^T \Phi'' dx \quad (9)$$

이다. 병진운동과 각운동, 그리고 탄성진동에 대한 라그랑지 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial R_x} &= F_x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}_y} \right) - \frac{\partial L}{\partial R_y} = F_y \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= M_o, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $L = T - V$ 이다. 식 (6)과 (8)을 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 운동방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} m\ddot{R}_x + S_o s \ddot{\theta} - S_o c \theta^2 + s \theta \ddot{\Phi} q - c \theta \dot{\Phi} \dot{q} \\ - \ddot{\theta} c \theta \Phi q + \dot{\theta}^2 s \theta \Phi q - \dot{\theta} c \theta \dot{\Phi} q &= F_x \\ m\ddot{R}_y + S_o c \ddot{\theta} - S_o s \theta^2 + c \theta \ddot{\Phi} q - s \theta \dot{\Phi} \dot{q} \\ - \ddot{\theta} s \theta \Phi q - \dot{\theta}^2 c \theta \Phi q - \dot{\theta} s \theta \dot{\Phi} q &= F_y \quad (11) \\ I_o \ddot{\theta} + \ddot{\Phi} q - S_o s \theta \dot{R}_x - \dot{R}_x c \theta \Phi q + S_o c \theta \dot{R}_y \\ - \dot{R}_y s \theta \dot{\Phi} q &= M_o \\ M \dot{q} + \ddot{\Phi}^T \theta - \ddot{\Phi}^T s \theta \dot{R}_x + \ddot{\Phi}^T c \theta \dot{R}_y - \dot{\theta}^2 M q + K q &= Q \end{aligned}$$

식 (11)에서 알 수 있듯이 운동방정식은 고차의 연립 비선형 상미분방정식이다.

다음으로 가상일을 구해보자. 만일 분포된 힘 f_x , f_y 와 모멘트 m_z 가 보의 축을 따라 작용하고 있다면 가상일은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta \bar{W} = \int (f_x \vec{i} + f_y \vec{j}) \cdot \delta \vec{R} dx + \int m_z \delta \theta^* dx \quad (12)$$

여기서 \vec{R} 는 임의의 점에서의 위치 벡터이며 $\delta \theta^*$ 는 임의의 점에서의 위치와 각도 벡터인데 강체 각운동과 탄성변위로 인한 각을 모두 포함한다. 변위벡터와 각도에 대한 표현식을 대입하면 가상일은 다음과 같이 유도된다.

$$\delta \bar{W} = \int f_x dx \delta R_x + \int f_y dx \delta R_y + \int m_z dx \delta \theta$$

$$\begin{aligned} + \left[\int f_x (-x s \theta - u c \theta) dx + \int f_y (x c \theta - u s \theta) dx \right] \delta \theta \\ + (-s \theta \int f_x \phi dx + c \theta \int f_y \phi dx + \int m_z \phi' dx) \delta q \end{aligned} \quad (13)$$

이 가상일은 다시 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta \bar{W} = F_x \delta R_x + F_y \delta R_y + M_z \delta \theta + Q^T \delta q \quad (14)$$

따라서 식 (10)의 우편에 있는 일반력과 일반모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F_x &= \int f_x dx, \quad F_y = \int f_y dx \\ M_o &= \int f_x (-x s \theta - u c \theta) dx \\ &+ \int f_y (x c \theta - u s \theta) dx + \int m_z dx \quad (15) \\ Q &= -s \theta \int \phi^T f_x dx + c \theta \int \phi^T f_y dx + \int \phi^T m_z dx \end{aligned}$$

식 (15)는 분포된 힘과 모멘트에 의해 표현되는 일반력과 일반 모멘트를 나타낸다.

3. 섭동법의 적용

식 (11)로 주어진 운동방정식은 수치해석과 제어기 설계에 적합하지 못하다. 이 연구에서는 참고문헌 (4)에서 고려한 섭동법을 적용하여 문제를 영차의 강제운동과 일차의 연성 강제운동 탄성진동으로 구분하였다. 섭동법을 이용해 강제 병진운동과 각운동에 관한 항들을 다음과 같이 분리해보자.

$$\begin{aligned} R_x &= R_{x0} + R_{x1}, \quad R_y = R_y^0 + R_y^1, \quad \theta = \theta_0 + \theta_1 \\ f_x &= f_{x0} + f_{x1}, \quad f_y = f_{y0} + f_{y1}, \quad m_z = m_{z0} + m_{z1} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 탄성변위를 나타내는 일반변위벡터, q 는 본질상 일차의 양으로 가정하였다.

식 (16)을 운동방정식 (11)과 일반력과 일반모멘트식 (15)에 대입하면 다음과 같은 영차의 운동방정식과 일차의 운동방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} m\ddot{R}_{x0} + S_o s \theta_0 \ddot{\theta}_0 - S_o c \theta_0 \dot{\theta}_0^2 &= F_{x0} \\ m\ddot{R}_{y0} + S_o c \theta_0 \ddot{\theta}_0 - S_o s \theta_0 \dot{\theta}_0^2 &= F_{y0} \\ - S_o s \theta_0 \dot{R}_{x0} + S_o c \theta_0 \dot{R}_{y0} + I_o \ddot{\theta}_0 &= M_{o0} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{R}_{x1} - S_o s\theta_0 \ddot{\theta} - s\theta_0 \ddot{\Phi} \ddot{q} + 2S_o c\theta_0 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \\
 & - 2c\theta_0 \dot{\theta}_0 \ddot{\Phi} \dot{q} + S_o (-c\theta_0 \ddot{\theta}_0 + s\theta_0 \dot{\theta}_0^2) \theta_1 \\
 & + (\dot{\theta}_0^2 s\theta_o - \ddot{\theta}_0 c\theta_0) \ddot{\Phi} q = F_{x1} \\
 & m\ddot{R}_{y1} + S_o c\theta_0 \ddot{\theta}_1 - S_o s\theta_0 \ddot{\theta}_0 \theta_1 - 2S_o s\theta_0 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \\
 & - S_o c\theta_0 \dot{\theta}_0^2 \theta_1 + c\theta_0 \ddot{\Phi} \ddot{q} - 2\dot{\theta}_0 s\theta_0 \ddot{\Phi} \dot{q} \\
 & - (\ddot{\theta}_0 s\theta_0 + \dot{\theta}_0^2 c\theta_0) \ddot{\Phi} q = F_{y1} \tag{18} \\
 & S_o s\theta_0 \ddot{R}_{x1} + S_o c\theta_0 \ddot{R}_{y1} + I_o \ddot{\theta}_1 + \ddot{\Phi} \ddot{q} \\
 & + [\bar{M}_{x0} - S_o (c\theta_0 \ddot{R}_{x0} + s\theta_0 \ddot{R}_{y0})] \theta_1 \\
 & + [\bar{M}_{y0} - (\ddot{R}_{x0} c\theta_0 + \ddot{R}_{y0} s\theta_0) \ddot{\Phi}] q = M_{o1} \\
 & - \ddot{\Phi}^T s\theta_0 \ddot{R}_{x1} + \ddot{\Phi}^T c\theta_0 \ddot{R}_{y1} + \ddot{\Phi}^T \ddot{\theta}_1 + M \ddot{q} \\
 & + (\bar{Q} - \ddot{\Phi}^T c\theta_0 \ddot{R}_{x0} - \ddot{\Phi}^T s\theta_0 \ddot{R}_{y0}) \theta_1 \\
 & + (K - \dot{\theta}_0^2 M) q = \\
 & + Q_1 + Q_0 - \ddot{\Phi}^T \ddot{\theta}_0 + \ddot{\Phi}^T \ddot{\theta}_0 \\
 & + \ddot{\Phi}^T s\theta_0 \ddot{R}_{x0} - \ddot{\Phi}^T c\theta_0 \ddot{R}_{y0}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 F_{xi} &= \int f_{xi} dx, \quad F_{yi} = \int f_{yi} dx \quad i = 0, 1 \\
 M_{oi} &= \int (-s\theta_0 f_{xi} + c\theta_0 f_{yi}) x dx \\
 &+ \int m_z dx, \quad i = 0, 1 \\
 Q_i &= \int \phi^T \int (-s\theta_0 f_{xi} + c\theta_0 f_{yi}) dx \\
 &+ \int \phi^T m_z dx, \quad i = 0, 1 \\
 \bar{Q} &= \int \phi^T (c\theta_0 f_{x0} + s\theta_0 f_{y0}) dx \\
 \bar{M}_{x0} &= \int (f_{x0} c\theta_0 + f_{y0} s\theta_0) x dx \\
 \bar{M}_{y0} &= \int (f_{x0} s\theta_0 - f_{y0} c\theta_0) \phi dx \tag{19}
 \end{aligned}$$

식 (17)은 탄성 진동 부분이 제거된 강체운동을 나타내며 저차의 비선형 상미분방정식이다. 반면에 식 (18)은 영차의 강체 운동이 시간에 따라 변하는 계수로 삽입된 고차의 선형 상미분방정식이다. 식 (18)에서 알 수 있듯이 탄성진동과 섭동된 강체운동은 연성되어 있다. 이 말은 구조물이 진동하는 경우 강체 운동에 영향을 미친다는 것을 의미한다. 또한 반대로 강체 운동이 일어나면 이로 인해 진동이 발생한다는 말도 의미한다. 만일 구조물을 강체로 가정하

고 조종제어를 수행한다면 강체 운동에 의해 진동이 발생하고 이로 인해 강체 운동에도 변화가 일어난다. 또한 진동제어가 탄성진동만을 고려하여 수행될 수 없음을 의미한다. 따라서 구조물의 조종과 진동제어를 동시에 수행하고자 할 경우 식 (17)과 (18)이 매우 유용하다. 식 (17)과 (18)은 Meirovitch and Tuzcu⁽³⁾가 유도한 난해한 3차원 운동방정식을 물리적인 현상을 좀더 쉽게 설명하기 위해 2차원에 대해 유도한 식이라고 말할 수 있다. 그러나 이 연구에서는 Meirovitch and Tuzcu⁽⁴⁾가 언급하지 않았던 물리적인 의미와 허용함수의 선택방법 그리고 일반적인 진동해석과의 비교 분석을 수행하였다.

4. 허용함수의 선택

수치해석을 수행하는 경우 제일 먼저 선택하여야 할 사항은 탄성변위의 이산화과정에서 사용되었던 허용함수이다. 이 연구의 정식화 과정은 탄성변위는 구조물의 국부좌표 원점에서 영의 변위와 기울기를 가져야 함을 요구한다. 이 연구에서는 수치해석을 위해 균일보를 선택하고 균일보의 국부좌표 원점을 질량중심, 즉 가운데를 선택하였다. 이 경우에 대해 이 연구에서는 원점의 좌우를 분리하여 허용함수를 개발하였다. 먼저 $0 < x < L/2$ 구간에 대해 영의 변위와 기울기를 가져야 한다는 조건을 고려해 이 구간에 대해 외팔보의 고유모드를 적용하고, $-L/2 < x < 0$ 구간에 대해서도 외팔보의 고유모드를 적용하였다. 좌우 구간에 적용된 외팔보의 고유모드를 조합하여 다음 그림

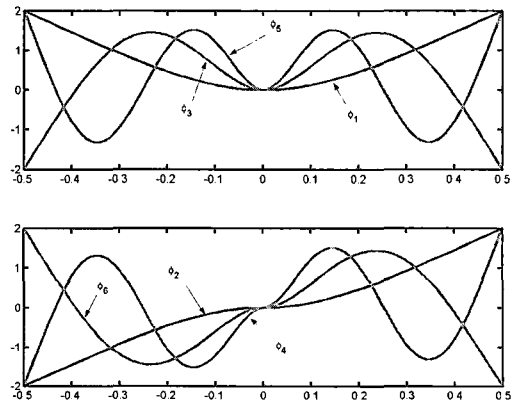


Fig. 2 Admissible functions

과 같은 허용함수를 개발하였다.

Fig. 2의 첫 번째 그림은 홀수차의 허용함수를 나타내며 두 번째 그림은 짝수차의 허용함수를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 홀수차의 허용함수는 원점을 기준으로 대칭이며 짝수차의 허용함수는 원점을 기준으로 역대칭임을 알 수 있다. 그리고 모든 허용함수들이 원점에서 변위와 변위각이 영이 됨을 알 수 있다.

5. 자유진동해석

영차의 강체 운동이 없는 경우 일차의 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{matrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & \bar{\Phi} \\ 0 & 0 & I_o & \bar{\Phi} \\ 0 & \bar{\Phi}^T & \bar{\Phi}^T & M \end{matrix} \begin{Bmatrix} \ddot{R}_{x1} \\ \ddot{R}_{y1} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{matrix} \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ \theta \\ q \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Table 1 Natural frequencies(Hz)

| Mode | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|--------|--------|---------|---------|
| NOA | | | | |
| 2 | 4.7550 | 9.0634 | | |
| 4 | 4.7311 | 7.8575 | 11.1471 | 17.2083 |
| 6 | 4.7302 | 7.8534 | 11.0120 | 14.1601 |
| 8 | 4.7301 | 7.8532 | 10.9995 | 14.1401 |
| 10 | 4.7300 | 7.8532 | 10.9944 | 14.1340 |
| Exact | 4.7300 | 7.8532 | 10.9956 | 14.9226 |

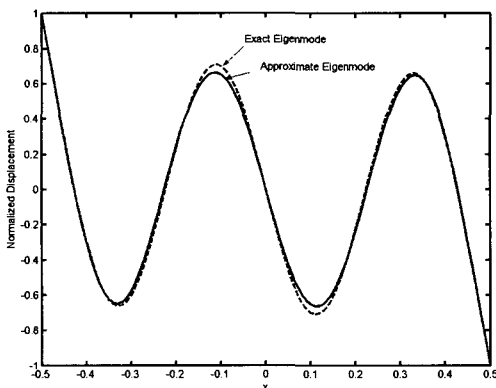


Fig. 3 The fourth natural mode shape

균일보에 대해 이 식을 가지고 자유진동해석을 수행하면 일반 균일보에 대해 이미 알고 있는 해석적인 자유진동해석 결과⁽⁸⁾와 동일한 결과를 얻어야 한다. 이를 위해 길이 $L=1\text{ m}$, 질량 $m=1\text{ kg}$, 굽힘강성 $EI=1\text{ Nm}^2$ 인 균일보를 고려하여 위 식의 고유치 문제를 풀었다. 그 결과를 요약한 것이 Table 1이다.

Table 1에서 알 수 있듯이 허용함수의 개수가 증가하면서 고유진동수가 엄밀해에 접근함을 알 수 있다. 엄밀해와 약간 차이가 나는 것은 행렬안에 들어가는 계수값을 계산하는데 있어 수치 적분을 사용하였기 때문인 것으로 판단된다. Fig. 3은 허용함수를 6개 사용하여 구한 고유 모드가 엄밀한 고유 모드에 근접하고 있음을 보여준다. 따라서 이 연구에서 선택한 허용함수가 유효하다고 말할 수 있다.

6. 강제 운동 해석

수치해석상의 안정성을 위해 진동변위와 관련된 아주 적은양의 감쇠를 운동방정식에 삽입하였다. 앞에서 채택한 균일보의 중앙에 다음과 같은 y 방향의 힘이 작용한다고 가정하고 그 응답을 계산하였다.

$$F_y = \begin{cases} +1\text{ N} & 0 \leq t < 0.5\text{ s} \\ -1\text{ N} & 0.5\text{ s} \leq t \leq 1.0\text{ s} \end{cases}$$

이 힘은 영차의 힘으로 간주되어 영차의 강체 운동 방정식을 먼저 수치모사하고 그 결과를 바탕으로 일차의 강체-탄성 연성 방정식을 수치모사하는 방식으로 수행되었다. 강체 병진운동과 각운동의 경우에는 영차와 일차의 응답값을 합하여 원래값을 산정하였다. 따라서 Fig. 4는 강체운동과 진동의 영향이 합해

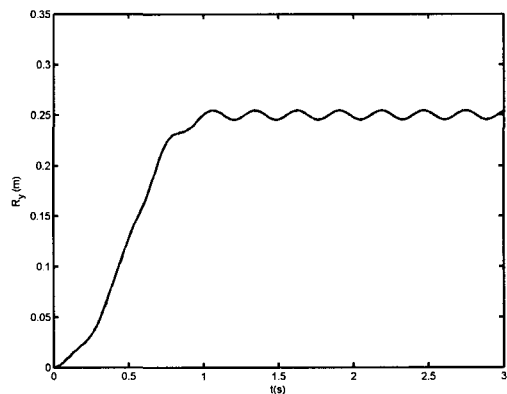


Fig. 4 Time histories of rigid-body translation

진 결과를 보여주고 있다. 이와 같은 결과는 강제운동과 탄성진동을 분리하여 얻어질 수 없는 결과이다.

힘이 y 방향으로 균일보의 중심에 작용하기 때문에 x 방향 운동과 각운동은 나타나지 않게 된다. Fig. 4는

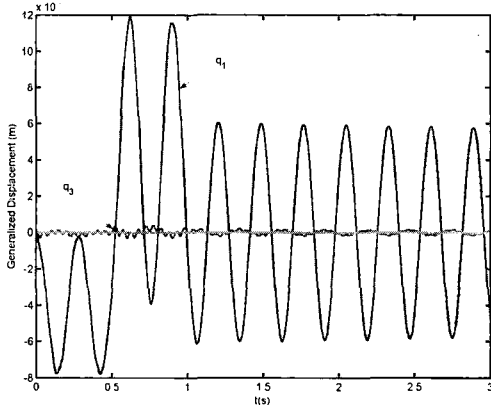


Fig. 5 Time histories of generalized displacements

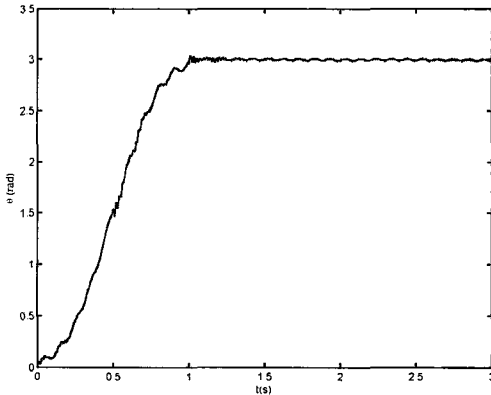


Fig. 6 Time histories of rigid-body rotation

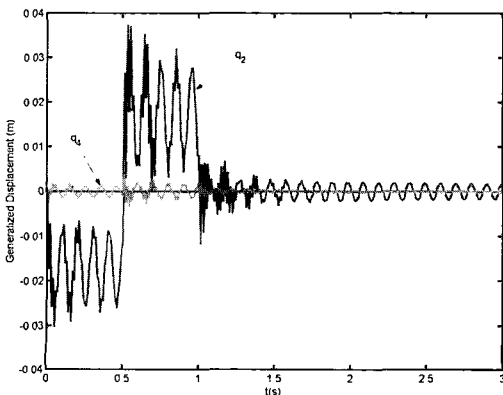


Fig. 7 Time histories of generalized displacements

y 방향의 강제운동을 나타내며 Fig. 5는 탄성 진동과 관련된 일반변위의 시간응답을 나타내고 있다. Fig. 5에서 작용한 힘의 특성상 대칭 모드만이 가진됨을 알 수 있다.

두 번째 수치해석으로 균일보의 중심에 다음과 같은 모멘트가 작용한다고 가정하고 그 응답을 계산하였다.

$$M_z = \begin{cases} +1 Nm & 0 \leq t < 0.5 s \\ -1 Nm & 0.5 s \leq t \leq 1.0 s \end{cases}$$

이 모멘트로 인해 병진운동은 발생하지 않으며 오직 회전 각운동만이 발생하게 된다. Fig. 6은 각운동 응답을 나타내며 Fig. 7은 탄성변위와 관련된 일반변위의 시간응답을 나타낸다. 가해진 모멘트의 특성상 오직 역대칭 모드만이 가진됨을 알 수 있다. 또한 수치해석상에 도입된 감쇠의 영향으로 고차 성분이 빠르게 소멸됨을 알 수 있다.

7. 토의 및 결론

이 논문에서는 자유-자유보의 운동하는 경우에 동시에 나타나는 강제운동과 탄성진동을 해석하기 위해 운동방정식 유도 방법과 이산화 과정, 그리고 섭동법의 적용에 대해 논의하였다.

운동방정식의 유도를 위해 임의의 점에서의 위치 벡터 표현식을 유도하고 이를 이용해 운동에너지를 유도하였다. 허용함수를 이용하는 가정모드 방법을 이용해 탄성변위를 이산화하고 라그랑지 방정식을 이용해 운동방정식을 유도하였다. 이렇게 유도된 운동방정식은 그 형태가 제어기 설계 및 수치해석에 적합하지 않아 섭동법을 적용해 영차의 강제운동방정식과 일차의 강제-진동 연성 운동방정식을 유도하였다. 영차의 강제 운동방정식은 병진운동과 각운동에 관한 진동이 배제된 저차의 운동방정식이기 때문에 이를 이용해 조종 제어를 용이하게 설계할 수 있다. 반면에 일차의 강제-진동 연성 운동방정식은 허용함수의 개수가 자유도에 포함되어 고차의 행렬 미분 방정식으로 표현된다. 그러나 행렬의 계수만이 시간에 따라 변하는 선형 미분 방정식이기 때문에 수치해석을 쉽게 수행할 수 있으며 제어기 설계도 용이하다.

이 연구에서 제안한 방법의 타당성을 보이기 위해 균일보를 선택하여 허용함수의 선택방법을 소개하였으며 자유진동해석 결과를 임밀해와 비교하여 접근방

법의 타당성을 입증하였다. 또한 자유-자유보에 힘 또는 모멘트가 작용하는 경우에 강제 운동과 탄성 진동이 어떻게 연성되어 나타나는지 수치해석을 수행하였으며 그 결과를 통해 유도된 방정식의 유효성을 입증하였다. 이 연구에서 제시한 운동방정식은 항공기, 선박, 우주구조물과 같이 부양 상태에 있는 구조물의 강제운동 및 진동해석에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 연구는 2003학년도 동국대학교 연구년 지원에 의하여 이루어졌다. 관계자 여러분께 감사드린다.

참 고 문 헌

- (1) 손충열, 1999, "유체력을 고려한 보-유추 선체진동해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 9 권, 제 1 호, pp. 206~213.
- (2) Meirovitch, L., 1991, "Hybrid State Equations for Flexible Bodies in Terms of Quasi-Coordinates," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 14, No. 5, pp. 1008~1013.
- (3) Meirovitch, L., 1980, Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands.
- (4) Meirovitch, L. and Kwak, M. K., 1990, "Dynamics and Control of a Spacecraft with Retargeting Flexible Antennas," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 13, No. 2, pp. 241~248.
- (5) Kwak, M.K. and Meirovitch, L., 1992, "New Approach to the Maneuvering and Control of Flexible Multibody Systems," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, No. 6, Dec. pp. 1342~1353.
- (6) Kwak, M. K., 1993, "Perturbation Method for the Eigenvalue Problem of Lightly Damped System," Journal of Sound and Vibration, Vol. 160, No. 2, Jan. pp. 351~357.
- (7) Meirovitch, L. and Tuzcu, I., 2003, Integrated Approach to the Dynamics and Control of Maneuvering Flexible Aircraft, NASA/CR-2003-211748.
- (8) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold, New York.