

Dynamic Elastica에 의한 유연매체의 거동해석

Analysis of Flexible Media Behavior by Dynamic Elastica

홍성권† · 지중근* · 장용훈** · 박노철*** · 박영필****

Sung-Kwon Hong, Jung-Geun Jee, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park
and Young-Pil Park

(2004년 10월 15일 접수 : 2005년 1월 3일 심사완료)

Key Words : Deformation Potential(변형 포텐셜), Parametric Cubic Curve, FDM(Finite Difference Method), Stick(고착), Forward Slip(전방 미끄럼), Backward Slip(후방 미끄럼), Separation(분리)

ABSTRACT

In many machines handling lightweight and flexible media, such as magnetic tape drives, xerographic copiers and sewing machines, the media must transit an open space. It is important to predict the static and dynamic behavior of the sheets with a high degree of reliability. The nonlinear theory of the dynamic elastica has often been used to a nonlinear dynamic deflection model. In this paper, the governing equation is derived and simulated by the finite difference method. The parametric cubic curve is applied for defining the guide shape. The dynamic contact conditions suggested by Klarbring is used to predict the direction of the flexible media according to the initial velocity and the friction coefficient. The analysis is also compared to the conventional model, showing that after contacting a 45° wall, the directions of flexible media of two models are different.

1. 서 론

복사기, 팩시밀리, 프린터, 카메라, ATM 등에는 매체 전송 시스템이 적용된다. 이러한 기기들의 소형화, 고속화에 따라서 매체의 정확한 거동해석이 필요하고 최적의 설계조건을 찾는 것이 피딩 시스템 설계에 있어 중요한 인자가 되고 있다. 기존의 거동해석 방법으로는 매체를 스프링-질량-보로 이산화하여 정·동적 거동을 해석하거나^(1,9) Dynamic Elastica

이론을 적용하여 유연매체의 거동을 해석하고 있다.⁽²⁾ 이 논문에서는 유연매체가 좁은 채널로부터 빠져나와 가이드와 충돌이 발생하는 경우 Dynamic Elastica 이론으로 시뮬레이션을 수행하고, 매체가 가이드와 접촉이 일어날 때 가이드의 형상을 파라미터릭 큐빅 커브로 나타내고 반복적인 방법을 통하여 접촉점에서의 반발력을 계산한다. 그리고 Klarbring 모델을 적용하여 매체의 정확한 진행방향을 예측할 수 있는 방법을 제시한다.

2. 매체의 모델링

2.1 Dynamic Elastica 이론

(1) 지배방정식

Fig. 1은 유연매체가 채널로부터 빠져 나올 때의 형상을 나타낸 그림이다. g 는 중력가속도를 나타내

† 책임저자 : 정희원, 연세대학교 기계공학과
E-mail : h11010@yonsei.ac.kr

Tel : (02) 2123-4677, Fax : (02) 353-8460

* 연세대학교 기계공학과

** 연세대학교 기계공학과

*** 정희원, 연세대학교 정보저장기기협동과정

**** 정희원, 연세대학교 기계공학과

고 f_x, f_y 는 질점에 작용하는 관성력이다. F_N, F_T 는 매체가 가이드와 충돌할 때 가이드에서 받는 수직방향과 접선방향의 반력을 나타내고, α 는 채널 출구의 각도를 나타낸다. ϕ 는 매체질점이 x 축과 이루는 각도이다. x', y' 축은 전체 지배좌표를 나타내고, x, y 는 종이의 진행방향에 따른 국부좌표를 나타낸다.

비선형 elastica 이론⁽⁴⁾을 이용하여 매체를 평판이라 가정하고 굽힘 강성 D 를 정의하여 지배방정식을 세우면 식 (1)과 같다.

$$D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = mg(L-s) (\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) - m \int_s^L \ddot{x} \sin \phi d\bar{s} + m \int_s^L \ddot{y} \cos \phi d\bar{s} + \sin \phi \int_s^L \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} \delta(\bar{s} - s_K) d\bar{s} - \cos \phi \int_s^L \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} \delta(\bar{s} - s_K) d\bar{s} \quad (1)$$

변형 포텐셜을 정의하면⁽⁵⁾ 식 (2), (3)과 같다.

$$u = \int_s^L x d\bar{s} \quad (2)$$

$$v = \int_s^L y d\bar{s} \quad (3)$$

식 (2), (3)을 시간에 관하여 두 번 미분하면 식 (4), (5)와 같이 된다.

$$\ddot{u} = \int_s^L \ddot{x} d\bar{s} \quad (4)$$

$$\ddot{v} = \int_s^L \ddot{y} d\bar{s} \quad (5)$$

식 (4), (5)을 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

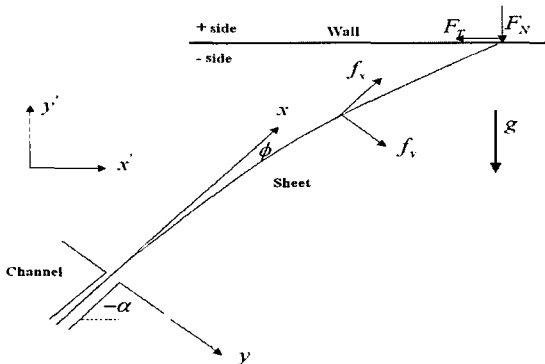


Fig. 1 Geometry of feeding system

$$D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = -m \ddot{u} \sin \phi + m \ddot{v} \cos \phi + mg(L-s) (\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) + \sin \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} H(\bar{s} - s_K) - \cos \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} H(\bar{s} - s_K) \quad (6)$$

식 (6)에서 H 는 Heaviside 함수⁽⁶⁾을 나타낸다.

$$H(s - s_K) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < s_K \\ \frac{1}{2} & \text{if } s = s_K \\ 1 & \text{if } s > s_K \end{cases}$$

채널 밖에서의 매체의 절점의 위치를 s 에 관하여 두 번 편미분 하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = -\cos \phi \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = -\sin \phi \quad (8)$$

식 (6)~(8)의 2차 편미분 방정식의 해는 각각의 시간에 대한 매체의 변형형상을 결정 할 수 있다. 미분 방정식의 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi(c) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial s}(c) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial s}(c) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(L) = K_0 \quad u(L) = 0 \quad v(L) = 0$$

K_0 는 매체의 곡률을 나타낸다.

(2) 가이드의 형상

Fig. 2는 매체의 변형 형상과 가이드의 형상을 나타낸다. 이 가이드의 형상을 정의하는 과정과 가이드와 매체내의 절점 사이의 거리를 구하는 과정은 다음과 같이 알려져 있다.⁽⁷⁾

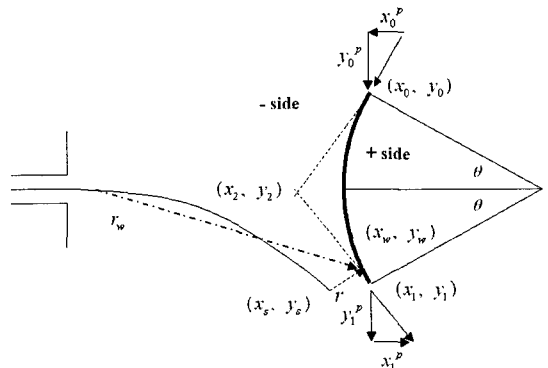


Fig. 2 Schematic diagram of sheet and constraining surface

(x_0, y_0) , (x_1, y_1) 는 가이드의 시작점과 끝점을 나타내고, 이 가이드의 형상은 파라메트릭 큐빅 커브로 정의된다. 이 커브에 대한 2차원에서의 파라미터 식은 식 (9)와 같다.

$$\begin{aligned} x(p) &= a_{3x}p^3 + a_{2x}p^2 + a_{1x}p + a_{0x} \\ y(p) &= a_{3y}p^3 + a_{2y}p^2 + a_{1y}p + a_{0y} \end{aligned} \quad (9)$$

위 식에서 p 는 가이드의 시작점에서 0, 끝점에서 1이된다. (x_2, y_2) 는 시작점과 끝점에서의 접선벡터의 교차점을 나타낸다. 시작점과 끝점의 접선좌표는 (x_0^p, y_0^p) , (x_1^p, y_1^p) 로 표현되고, 이것들은 (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 와 식 (10)의 관계가 있다.

$$\begin{aligned} x_0^p &= 4\rho(x_2 - x_0) \quad y_0^p = 4\rho(y_2 - y_0) \\ x_1^p &= 4\rho(x_1 - x_2) \quad y_1^p = 4\rho(y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서 ρ 는 다음 식으로 정의되고 그것에 의하여 커브의 타입이 결정된다.

$$\rho = \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$\rho < 0.5$: 타원형 곡선
 $\rho = 0.5$: 포물선
 $0.5 < \rho \leq 1$: 쌍곡선

식 (9)에서의 계수들을 구하여 정리하면

$$\begin{aligned} a_{0x} &= x_0 \\ a_{1x} &= x_0^p \\ a_{2x} &= -3x_0 + 3x_1 - 2x_0^p - x_1^p \\ a_{3x} &= 2x_0 - 2x_1 + x_0^p + x_1^p \end{aligned} \quad (11)$$

$y(p)$ 의 계수도 동일한 방법으로 구해진다.

p 에 관한 미분방정식은 커브의 접선을 나타낸다.

$$\begin{aligned} x^p &= \frac{dx}{dp} = 3a_{3x}p^2 + 2a_{2x}p + a_{1x} \\ y^p &= \frac{dy}{dp} = 3a_{3y}p^2 + 2a_{2y}p + a_{1y} \end{aligned} \quad (12)$$

매체의 절점과 가이드의 수직거리를 계산하는 순서는 다음과 같다. 우선 매체의 절점과 가장 가까운 가이드의 절점을 찾는다. 가이드의 가장 가까운 절점과

매체위의 점을 연결한 선은 가이드와 수직이 될 것이다. 만약 (x_s, y_s) 가 매체내의 한 절점을 표현하고 가이드의 절점을 (x_w, y_w) 로 나타낸다면 벡터 r 은 매체의 절점과 가이드의 미지 절점 사이의 거리로 정의된다.

가이드에서 가장 짧은 거리를 찾기 위해서는 벡터 r 과 그것의 p 에 관한 미분인 식 (12)의 내적의 값이 0이 됨을 이용한다. 이것을 p 에 관하여 정리하면 5차식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} &3(s_{3x}^2 + a_{3y}^2)p^5 + 5(a_{3x}a_{2x} + a_{3y}a_{2y})p^4 \\ &+ 2(2a_{3x}a_{1x} + 2a_{3y}a_{1y} + a_{2x}^2 + a_{2y}^2)p^3 \\ &+ 3(a_{3x}(a_{0x} - x_s) + a_{3y}(a_{0y} - y_s) \\ &+ a_{2x}a_{1x} + a_{2y}a_{1y})p^2 + \\ &(2a_{2x}(a_{0x} - x_s) + 2a_{2y}(a_{0y} - y_s) + a_{1x}^2 + a_{1y}^2)p \\ &+ a_{1x}(a_{0x} - x_s) + a_{1y}(a_{0y} - y_s) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

만약 선형 가이드라고 간주하면 식 (9)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x(p) &= (x_1 - x_0)p + x_0 \\ y(p) &= (y_1 - y_0)p + y_0 \end{aligned} \quad (14)$$

그리고 식 (14)를 만족하는 p 의 값은 다음과 같다.

$$p = \frac{(x_1 - x_0)(x_s - x_0) + (y_1 - y_0)(y_s - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (15)$$

이 때 2개의 벡터가 정의된다. 하나는 매체와 가장 가까운 가이드 위의 한 점과 원점과의 거리를 나타내는 $r_w = (x_w, y_w)$ 이고 또 다른 하나는 매체의 절점과 가이드의 절점 사이를 나타내는 $r = (x_w - x_s, y_w - y_s)$ 이다. 만약 내적 $r \cdot r_w$ 이 0 보다 작다면 매체는 가이드를 침투하게 되고 침투한 절점에 따른 반력이 반복적으로 구해지게 된다. 수직력과 그것에 대응하는 마찰력이 더해져서 새로운 변형형상이 만들어진다.

(3) 유한차분 모델

지배방정식을 유한 차분한 결과는 다음의 식과 같다.

$$\begin{aligned} &u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} - \Delta s^2 \phi_{i,j} \sin \phi_{i,j}^* \\ &= \Delta s^2 (-\cos \phi_{i,j}^* - \phi_{i,j}^* \sin \phi_{i,j}^*) \end{aligned} \quad (16)$$

$$v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j} - \Delta s^2 \phi_{i,j} \cos \phi_{i,j}^* = \Delta s^2 (-\sin \phi_{i,j}^* + \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^*) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i-1,j} - \frac{\Delta s^2}{D} mg(L-s) (\sin \alpha \cos \phi_{i,j}^* + \cos \alpha \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} - 2\phi_{i,j} \\ + \frac{\Delta s^2}{D} m(\ddot{u}^* \cos \phi_{i,j}^* + \ddot{v}^* \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} \\ + \phi_{i,j} + \frac{\Delta s^2}{D \Delta t^2} m(\sin \phi_{i,j}^* u_{i,j} - \cos \phi_{i,j}^* v_{i,j}) \\ = \frac{\Delta s^2}{D} mg(L-s) (\sin \alpha (\sin \phi_{i,j}^* - \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^*) - \cos \alpha (\cos \phi_{i,j}^* + \phi_{i,j}^* \sin \phi_{i,j}^*)) \\ + \frac{\Delta s^2}{D} m(\ddot{u}^* \cos \phi_{i,j}^* + \ddot{v}^* \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} \\ + \frac{\Delta s^2}{D \Delta t^2} m[(2u_{i,j-1} - u_{i,j-2}) \sin \phi_{i,j}^* - (2v_{i,j-1} - v_{i,j-2}) \cos \phi_{i,j}^*] \end{aligned} \quad (18)$$

식 (16)~(18)을 다음과 같이 행렬 형태로 정리한다.

$$Az = b \quad (19)$$

식 (16)~(18)의 유한차분 되어진 식에서 우변은 b , 좌변에서 미지수 u, v 와 ϕ 는 z , 상수항은 A 로 표현되어진다.

2.2 Klarbring 모델

이 논문에서 적용한 Klarbring 모델을 Fig. 3에 나타내었다. 강체 M 이 일반화된 스프링에 의해서 지지되고 있으며, x 방향과 y 방향의 변위를 각각 u_1, u_2 로 나타내었고, 접촉면에서의 마찰계수를 f , x 방향과 y 방향의 반력을 각각 R_1, R_2 로 나타내었다.

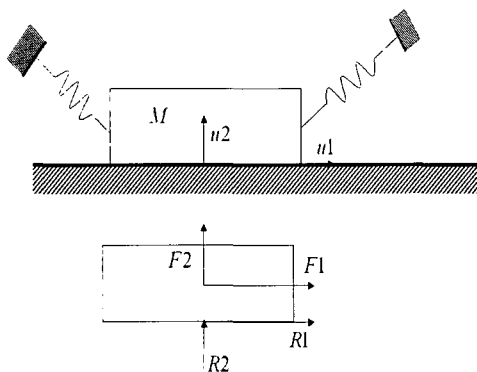


Fig. 3 Klarbring model

x 방향과 y 방향의 외력인 F_1 과 F_2 를 시간에 따라서 단조 증가하도록 $F_1 = C_1 t, F_2 = C_2 t$ 로 설정하였다. 그림 3에 대한 지배방정식은 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} C_1 t + R_1 - k_{11} u_1 - k_{12} u_2 = M \ddot{u}_1 \\ C_2 + R_2 - k_{21} u_1 - k_{22} u_2 = M \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (20)$$

4가지 접촉 현상에 따라 위의 지배방정식은 변형된다. 우선 고정일 경우는 조건은 위 식에서 $u_2 = 0, \dot{u}_1 = \ddot{u}_1 = \dot{u}_2 = \ddot{u}_2 = 0$ 이며 다음과 같은 조건을 얻는다.

$$C_2 < 0 \quad |C_1| < -f C_2$$

전방 미끄럼의 경우는 $u_2 = \dot{u}_2 = \ddot{u}_2 = 0$ 가 되며 그에 따른 조건인 $\dot{u}_1 > 0, R_2 > 0$ 를 만족하기 위한

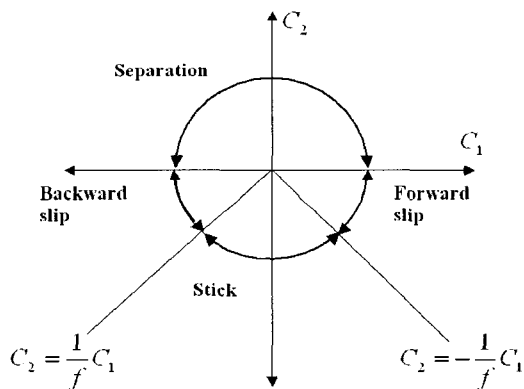


Fig. 4 Regions for stick, forward slip, backward slip and separation

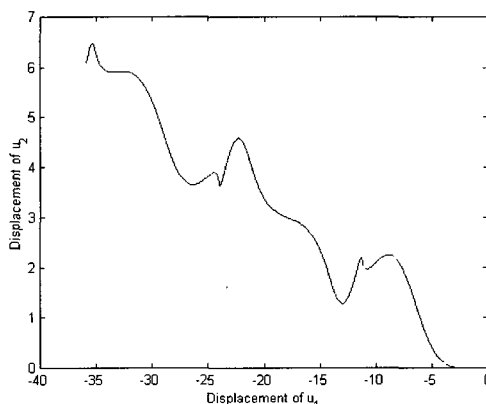


Fig. 5 Dynamic response from backward slip to separation

조건은 식 (21)와 같다.

$$-C_1 < fC_2 < 0 \quad (21)$$

후방 미끌림 경우 전방 미끌림에서 마찰력을 반대로 고려하여 정리하면 조건은 식 (22)와 같다.

$$C_1 < fC_2 < 0 \quad (22)$$

떨어짐의 경우 반력 R_1 , R_2 는 0이 되며, $u_2 > 0$ 를 만족하여야 하므로 다음의 조건식을 얻는다.

$$C_2 > 0 \quad (23)$$

각각 4가지의 접촉상태에 따른 조건식들을 도표로 나타내면 Fig. 4와 같다.

x 방향과 y 방향에 가해지는 힘과 마찰계수의 크기에 따라서 여러 가지의 접촉 현상이 나타나게 됨을 알 수 있다.

Fig. 5은 $M=1$, $k_{11}=k_{12}=k_{13}=1$, $k_{22}=2$ 인 시스템에 대해서 $C_1 = -1.0$, $C_2 = -0.8$, $f = 0.25$ 로 하여 30초까지 시뮬레이션한 그림으로 Fig. 4에서 예측한 것과 같이 초기에 후방 미끌림 현상을 보이고 있다.⁽³⁾

3. 결 과

2.1장 (3)절에서 차분된 식을 가지고 여러 가지 조건들에 대해서 시뮬레이션을 수행하였다. 여기서 사용한 매체는 두께 0.11 mm, 탄성계수는 1.03 GPa, 굽힘강성 $139 \mu Nm$, 길이는 216 mm인 종이다.

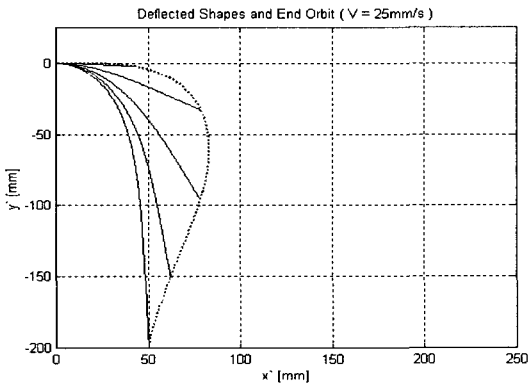


Fig. 6 Deflection shapes and end orbit for $V = 25 \text{ mm/s}$

Fig. 6은 초기속도가 25 mm/s일 때 매체의 변형형을 그린 것이다.

Fig. 7는 45도의 각도가 있는 가이드에 초기속도를 달리 하여 시뮬레이션한 결과이다. 그림에서 알 수 듯이 초기속도가 250 mm/s일 때는 매체가 아래방향으로 향하고 750 mm/s일 때는 가이드의 위로 향하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 8는 반지름이 100 mm인 원형 가이드에 매체가 접촉할 때를 시뮬레이션한 결과이다.

Fig. 9은 직선 가이드가 45° 기울어진 경우 마찰계수를 0.0부터 1.0까지 0.05씩 증가시키고, 초기속도를 0부터 300 mm/s로 12.5 mm/s씩 증가시켜 가면서 시뮬레이션 한 결과를 나타낸다.

Klarbring 이론을 적용하면 접촉 시 끝단의 속도가 양이면 전방 미끌림, 음이면 후방 미끌림이 되며, 후방 미끌림일 경우 마찰력이 앞쪽으로 작용하고, 전방 미끌림일 때는 마찰력이 뒤쪽으로 작용하게 된다.

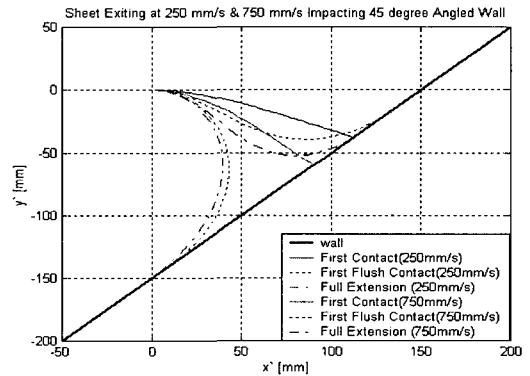


Fig. 7 Sheet exiting at 250 mm/s & 750 mm/s impacting 45 degree angled wall

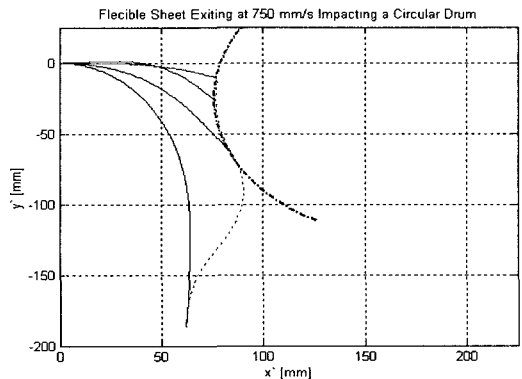


Fig. 8 Impacting a circular drum for $V = 750 \text{ mm/s}$

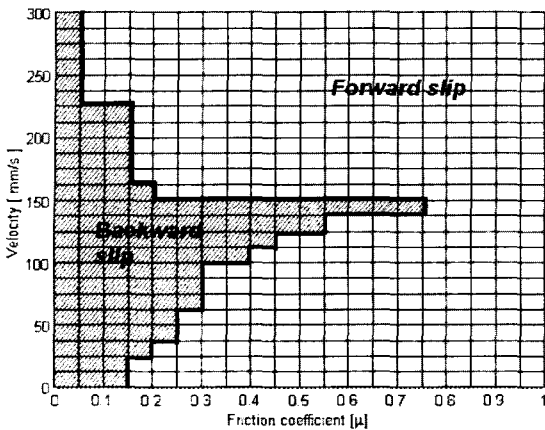


Fig. 9 Direction chart for various initial velocities and friction coefficients applied klarbring contact conditions

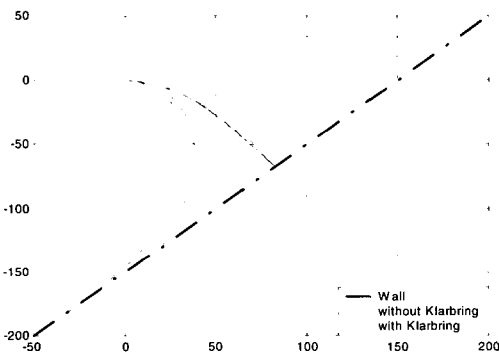


Fig. 10 Deflection shapes with/without klarbring's theory

Klarbring 이론에 의하여 충돌 후의 매체의 진행방향을 예측해보면 Fig. 9와 같다.

Dynamic Elastica 이론을 통한 결과에서는 매체가 가이드와 접촉 시 마찰력 방향이 전방 미끄럼으로만 고려되어 있기 때문에 매체가 가이드를 타고 올라가는 결과만 도출되어진다. 하지만 이것은 정확한 접촉이론을 적용하지 않았기 때문이며, 진행속도 200 mm/s, 마찰계수 0.1인 경우에 대해서 결과를 비교해 보면 Fig. 10과 같다. 그림을 보면 실선은 Klarbring 이론을 적용하여 마찰력의 방향을 결정해 준 결과이며, 점선은 Dynamic Elastica 이론에 의해 얻어진 것이다. 그러므로 매체가 가이드와 충돌 시 정확한 거동해석을 위해서는 정확한 마찰이론을 적용하여야만 한다. 한 가지 특이한 점은 마찰계수와와

초기속도를 계속 변화시켜 관찰하였을 때 속도가 0~25 mm/s, 마찰계수가 0.15~0.2 사이에서 종이의 거동이 후방 미끄럼의 방향으로 가다가 마지막에 전방 미끄럼 방향으로 바뀌는 것을 볼 수 있었다.

4. 결론

Dynamic Elastica 이론을 적용하여 종이가 가이드에 충돌하는 경우에 대한 지배방정식을 유도해 보았고, 유연매체가 접촉하는 가이드를 파라메트릭 큐빅 커브로 정의하였다. 그리고 지배방정식을 유한 차분법을 이용한 시뮬레이션을 통해 매체의 거동을 예측해 보았다. 그 결과 가이드와의 접촉이 발생할 때 정확한 거동을 예측하기 위해서는 정확한 마찰이론을 적용해야 함을 확인하였다. 이 논문에서는 Klarbring 모델을 적용해본결과 45° 기울어진 가이드의 경우 종이가 밀의 방향으로 거동해야 한다는 것을 알 수 있었다.

후 기

이 연구는 산업자원부 부품소재 개발사업단의 "환류식 지폐 입출금 장치 개발"(10012150) 과제를 맡은 (주)노틸러스효성의 위탁과제인 "유연 매체의 거동 해석 및 제어"를 수행하면서 얻어진 결과이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Kazushi Yoshida, 1992, "The Analysis of Deformation and Behavior of Flexible Materials," JSME-section A, 58(552), pp.1474~1480.
- (2) J. Stolte, R. C. Benson, 1992, "Dynamic Deflection of Paper Emerging from a Channel", Journal of Vibration and Acoustics, pp. 187~193.
- (3) H. Cho and J. R. Barber, 1998, "Dynamic Behavior and Stability of Simple Frictional Systems", Mathl. Comput. Modelling, Vol. 28, No. 4-8, pp. 37~53.
- (4) Frisch-Fay, R. 1962, "Flexible Bars", Butterworth and Co., Ltd., Washington.
- (5) Mansfield, L. Simmonds, J. G, 1987, "The

Reverse Spaghetti Problem : Drooping Motion of an Elastica Issuing from a Horizontal Guide.", *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 54, pp.147~150.

(6) Bender, C. M and Orszag, S. A, 1978, "Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers." McGraw-Hill, Inc.

(7) Mortenson, M. E, 1985, "Geometry Modeling",

John Wiley & Sons, Inc., New York.

(8) Anders Klarbring, 1984, "Contact Problems with Friction", Doctoral Dissertation, Linöping University, Sweden.

(9) 이용관, 1997, "이산화 기법에 의한 연속계의 동적 응답해석에 관한 연구", 한국소음진동공학회논문집, 제 7 권, 제 1 호, pp.135~142.