

두꺼운 완전 원추형 회전셸의 3차원적 진동해석

Three-dimensional Vibration Analysis of Thick, Complete Conical Shells of Revolution

심 현 주* · 강 재 훈†

Hyun-Ju Shim and Jae-Hoon Kang

(2005년 1월 5일 접수 : 2005년 3월 4일 심사완료)

Key Words : Complete Conical Shell(완전 원추형 셸), Shell of Revolution(회전셸), Thick Shell(두꺼운 셸), Three-dimensional Analysis(3차원 해석), Vibration(진동), Ritz Method(리쯔법)

ABSTRACT

A three-dimensional (3-D) method of analysis is presented for determining the free vibration frequencies and mode shapes of thick, complete (not truncated) conical shells of revolution. Unlike conventional shell theories, which are mathematically two-dimensional (2-D), the present method is based upon the 3-D dynamic equations of elasticity. Displacement components u_r , u_z , and u_θ in the radial, axial, and circumferential directions, respectively, are taken to be sinusoidal in time, periodic in θ , and algebraic polynomials in the r and z directions. Potential (strain) and kinetic energies of the conical shells are formulated, the Ritz method is used to solve the eigenvalue problem, thus yielding upper bound values of the frequencies by minimizing the frequencies. As the degree of the polynomials is increased, frequencies converge to the exact values. Convergence to four-digit exactitude is demonstrated for the first five frequencies of the conical shells. Novel numerical results are presented for thick, complete conical shells of revolution based upon the 3-D theory. Comparisons are also made between the frequencies from the present 3-D Ritz method and a 2-D thin shell theory.

1. 서 론

두꺼운 원추형 셸의 진동을 3차원(3-D)으로 해석한 문헌은 극히 드물다. 대부분의 연구는 얇은 원추형 셸의 진동을 2차원 셸이론 또는 막이론으로 해석한 것이다.⁽¹⁾ 또한 이러한 연구는 대부분 원추형 셸의 꼭지점에서 발생하는 특이성(singularity)으로 인해 절두된(truncated) 원추형 셸을 다루었다.

Leissa와 So⁽²⁾는 리쯔법을 이용하여 절두된 원추형 셸의 진동을 최초로 3차원적으로 해석하였으며, 몇 년 후 Buchanan⁽³⁻⁴⁾과 Wong⁽⁴⁾은 3차원 유한요소법으로 연구하였다. Leissa와 Kang⁽⁵⁻⁶⁾은 변두계를 갖는 절두된 원추형 셸의 수치결과를 제공하였다. 그러나 절두되지 않은 완전한 축대칭 원추형 회전셸의 3차원적 해석은 아직 이루어 지지 않았다.

이 연구의 3-D 해석에서는 리쯔법을 사용하여 진동수를 구하였다. 리쯔법은 엄밀해를 구하는 방법은 아니지만, 대수다항식의 형태로 표현된 변위성분에서 항 수를 증가시키면 엄밀해의 상위경계치로 수렴된 진동수를 구해준다. 이 연구에서는 최소한 최하위 5개의 진동수에 대해서는 유효숫자 4자리까지 엄밀해에 수렴된 정확한 값을 계산하였다.

† 책임저자 : 정희원, 중앙대학교(서울캠퍼스) 건축공학과
E-mail : jhkang@cau.ac.kr

Tel : (02) 820-5342, Fax : (02) 812-4150

* 중앙대학교(서울캠퍼스) 건축공학과

2. 해석

Fig. 1은 꼭지점 각 2α , 셸 하층부의 반경 R , 두께 $h(=H \sin \alpha)$, 수직두께 H 인 절두 되지 않은 두꺼운 축대칭 원추형 회전셸의 단면과 해석에서 사용된 원주좌표계(r, z, θ)를 보여준다. r, z, θ 축은 반경, 축, 원주좌표이다. (r, z) 좌표의 원점은 원추형 셸 중간면의 꼭지점에 위치한다. 따라서 원추형 셸의 정의역은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq R \\ r \cot \alpha - H/2 \leq z \leq r \cot \alpha + H/2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \quad (1)$$

텐서해석⁽⁷⁾을 이용하여(r, z, θ) 좌표계로 표현된 운동방정식은 다음과 같다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta,\theta}) &= \rho \ddot{u}_r \\ \sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rz} + \sigma_{z\theta,\theta}) &= \rho \ddot{u}_z \\ \sigma_{r\theta,r} + \sigma_{z\theta,z} + \frac{1}{r}(2\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta\theta,\theta}) &= \rho \ddot{u}_\theta \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, σ_{ij} 는 수직($i=j$)과 전단($i \neq j$)응력 성분.

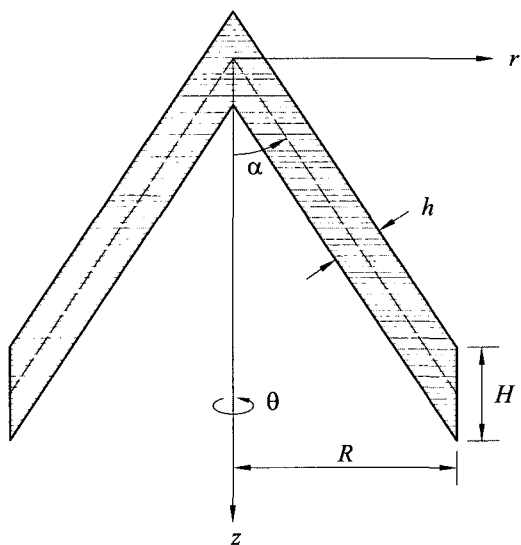


Fig. 1 A cross-section of thick conical shell and the cylindrical coordinate system (r, z, θ)

u_r, u_z, u_θ 는 각각 r, z, θ 방향 변위성분, ρ 는 밀도, 컴마(.)는 공간 도함수, 닷트(.)는 시간(t) 도함수를 나타낸다.

등방성 선형탄성재료에 대한 응력텐서 σ_{ij} 와 변형률텐서 ϵ_{ij} 와의 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (3)$$

여기서, λ 와 G 는 Lamé 상수. 등방성 재료에 대해서 Lam 상수를 영계수 (E)와 푸아송비 (ν)로 표현하면다음 식과 같다.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

$\epsilon(\equiv \epsilon_{rr} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{\theta\theta})$ 는 변형률 텐서의 대각합(trace), δ_{ij} 는 크로넬커 델타(Kronecker's delta)이다.

3차원 변형률 텐서와 3개의 변위 u_r, u_z, u_θ 와의 관계식은 다음과 같다.^(7~8)

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \epsilon_{zz} = u_{z,z}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r + u_{\theta,\theta}}{r}, \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}) \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[u_{\theta,r} + \frac{u_{r,\theta} - u_\theta}{r} \right], \quad \epsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left[u_{\theta,z} + \frac{u_{z,\theta}}{r} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)를 (3)에 대입한 후 다시 식 (2)에 대입하면, u_r, u_z, u_θ 의 자유진동을 지배하는 2계의 편미분 방정식(Navier의 식)이 만들어 진다. 그러나 이 식에서 독립변수는 모두 분리되지 않으며 (즉, θ 와 t 는 분리되지만, r 과 z 는 상관되며), 많은 항에서 나타나는 변계수로 인해 엄밀해를 구하는 것은 불가능하다. 따라서 이 연구에서는 에너지법의 일종인 리쯔법이 사용된다.

식 (5)의 변형률과 변위의 관계식에 있는 $1/r$ 항으로 인해 $r=0$ 에서 실제로 존재하지도 않는 변형률의 특이점(singularity)이 발생한다는 것을 알 수 있다. 이러한 특이점은 $r \neq 0$ 인 셸의 체적 내에서 Gauss-Legendre 점으로 수치적분함으로써 피할 수 있다. 예를 들면, 적분구간으로 $0 \leq r/R \leq 1$ 을 대신해서 $10^{-5} \leq r/R \leq 1$ 이 사용된다.

구조체의 진동변형 중에 변형률에너지 (V)는 다음 식과 같이 표현된다.

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{rr} \epsilon_{rr} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{r\theta} \epsilon_{r\theta} + 2\sigma_{r\zeta} \epsilon_{r\zeta} + 2\sigma_{\zeta\theta} \epsilon_{\zeta\theta}) r dr dz d\theta \quad (6)$$

식 (3)과 (5)를 식 (6)에 대입하면 세변위로 표현된 변형률에너지 (V)를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{\theta\theta})^2 + 2G\{\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + 2(\epsilon_{r\zeta}^2 + \epsilon_{\zeta\theta}^2 + \epsilon_{r\theta}^2)\}] r dr dz d\theta \quad (7)$$

이 식의 ϵ_{ij} 은 이미 식 (5)에서 세 변위로 표현되었다.

운동에너지 (T)는 다음 식과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\dot{u}_r^2 + \dot{u}_z^2 + \dot{u}_\theta^2) r dr dz d\theta \quad (8)$$

해석의 편의를 위해 반경 (r)과 축 (z)방향좌표를 무차원화하면 $\psi \equiv r/R$ 과 $\zeta \equiv z/H$ 이다. 따라서 무차원 원주좌표 (ψ, ζ, θ)로 표현된 셀의 영역은 다음 식과 같다.

$$0 < \psi \leq 1, \quad \delta_1 \leq \zeta \leq \delta_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (9)$$

여기서,

$$\delta_1 \equiv \frac{R}{H} \psi \cot \alpha - \frac{1}{2}, \quad \delta_2 \equiv \frac{R}{H} \psi \cot \alpha + \frac{1}{2} \quad (10)$$

비감쇠 자유진동에서 세 변위의 정현적 시간반응과 셀의 원형대칭성으로 인해 세 변위를 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$u_r(\psi, \zeta, \theta, t) = U_r(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11a)$$

$$u_z(\psi, \zeta, \theta, t) = U_z(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11b)$$

$$u_\theta(\psi, \zeta, \theta, t) = U_\theta(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11c)$$

여기서, $U_r, U_z, U_\theta = \Psi$ 와 ζ 의 변위함수, ω = 고유진동수, α = 초기조건으로 결정되는 임의의 위상각이며, θ 방향으로의 주기성을 보장하기 위해 원주좌동수 (n)는 정수로 취한다($n=0, 1, 2, 3, \dots, \infty$). 식

(11)은 비틀림 진동형을 제외한 모든 진동형을 포함하고 있다. 식 (11)에서 $\cos n\theta$ 과 $\sin n\theta$ 을 서로 교환한 후, $n=0$ 을 대입하면 $u_\theta = U_\theta^0 \sin(\omega t + \alpha)$, $u_r = u_z = 0$ 이 되어 비틀림 진동형을 구할 수 있다. 식 (11)의 변위성분은 원주좌동수(n)와 시간(t)과는 분리되어 있지만 (uncoupled), r (또는 ψ)와 z (또는 ζ)와는 상관(coupled)되어 있다.

Ritz 법에서는 진동의 한 주기에서 발생하는 최대 변형률에너지 (V_{max})와 최대 운동에너지 (T_{max}) 범함수를 이용한다. 이 범함수는 변위 (11)을 식 (7)과 (8)에 대입한 후, $\sin^2(\omega t + \alpha)$ 과 $\cos^2(\omega t + \alpha)$ 을 1로 취하여 구할 수 있다. 이 범함수를 무차원좌표 ψ 과 ζ 를 이용하면 다음 식과 같다.

$$V_{max} = \frac{GR^2}{2H} \int_0^1 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[\left\{ \frac{\lambda}{G} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 + 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2) + \kappa_4^2 \right\} \Gamma_1 + (\kappa_5^2 + \kappa_6^2) \Gamma_2 \right] \psi d\zeta d\psi \quad (12)$$

$$T_{max} = \frac{\rho\omega^2 R^2 H}{2} \int_0^1 \int_{\delta_1}^{\delta_2} [(U_r^2 + U_z^2) \Gamma_1 + U_\theta^2 \Gamma_2] \psi d\zeta d\psi \quad (13)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \kappa_1 &\equiv \frac{H}{R} \frac{U_r + nU_\theta}{\psi}, & \kappa_2 &\equiv \frac{H}{R} U_{r,\psi} \\ \kappa_3 &\equiv U_{z,\zeta}, & \kappa_4 &\equiv U_{r,\zeta} + \frac{H}{R} U_{z,\psi} \\ \kappa_5 &\equiv U_{\theta,\zeta} - \frac{H}{R} \frac{nU_z}{\psi}, & & \\ \kappa_6 &\equiv \frac{H}{R} \left[U_{\theta,\psi} - \frac{nU_r + U_\theta}{\psi} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

상수 Γ_1 과 Γ_2 는 다음 식으로 정의된다.

$$\Gamma_1 \equiv \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (15a)$$

$$\Gamma_2 \equiv \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (15b)$$

식 (4)를 이용하여 식 (12)에 있는 무차원 상수 λ/G 를 ν 로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\frac{\lambda}{G} = \frac{2\nu}{1-2\nu} \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0, (m=0,1,2,\dots,M; n=0,1,2,\dots,N) \quad (18c)$$

식 (11)의 변위함수 U_r, U_z, U_θ 를 대수다항식으로 표현하면 다음과 같다.

$$U_r(\psi, \zeta) = \eta_r \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij} \psi^i \zeta^j \quad (17a)$$

$$U_z(\psi, \zeta) = \eta_z \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L B_{kl} \psi^k \zeta^l \quad (17b)$$

$$U_\theta(\psi, \zeta) = \eta_\theta \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{mn} \psi^m \zeta^n \quad (17c)$$

여기서, i, j, k, l, m, n 는 정수, I, J, K, L, M, N 는 다항식에서 취한 최고차수, A_{ij}, B_{kl}, C_{mn} 는 임의의 미정계수. η 는 기하학적 경계조건에 따라 결정되는 함수이다. η 의 예를 들면 다음과 같다.

- (1) 자유경계: $\eta_r = \eta_z = \eta_\theta = 1$
- (2) $\Psi = 1(r=R)$ 에서 고정: $\eta_r = \eta_z = \eta_\theta = (\Psi - 1)^2$

함수 η 에는 변위와 경사각과 관련된 기하학적 구속만이 부과된다. 이 η 는 식 (17)의 대수다항식과 함께 수학적으로 완비되었다(mathematically complete)⁽⁹⁾. 따라서 식 (17)은 I, J, \dots, N 이 커질수록 해의 정확도가 증가하며, 그 어떤 3차원적 운동도 표현할 수 있게 된다. 충분한 수의 항을 취하면 내부의 모든 운동학적 구속이 사라지게 되어 함수 (17)은 엄밀해에 수렴하게 된다.

임의의 계수 A_{ij}, B_{kl}, C_{mn} 에 관해서 진동수를 최소화하는 과정을 통해 고유치문제를 정식화할 수 있으며, 다항식의 항 수가 유한할 때 존재하게 되는 내부의 구속효과를 최소화할 수 있다. 이러한 과정을 식으로 나타내면 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0, (i=0,1,2,\dots,I; j=0,1,2,\dots,J) \quad (18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial B_{kl}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0, (k=0,1,2,\dots,K; l=0,1,2,\dots,L) \quad (18b)$$

식 (18)은 미지수가 A_{ij}, B_{kl}, C_{mn} 인 $(I+1)(J+1)+(K+1)(L+1)+(M+1)(N+1)$ 개의 선형, 동차, 대수방정식이다. 비자명해(nontrivial solution)를 구하기 위해 계수행렬의 행렬식을 0으로 취하면 진동수(고유치)를 구할 수 있다. 이 진동수는 엄밀해의 상위경계치이다. 각 진동수에 해당하는 진동형(고유함수)은 각 ω 를 일련의 대수방정식 (18)에 대입하고 계수비를 구하여 얻을 수 있다.

3. 수렴성 연구

정확한 진동수를 산정하기 위해서는 식 (17)의 멱급수에서요구되는 항 수 (I, J, \dots, N)를 결정하는 수렴성 연구가 선행되어야 한다. 수렴성 연구는 수학적으로 완비된 식 (17)을 사용할 때 리즈법에 의한 진동수는 상위 경계치로 엄밀해에 수렴한다는 사실을 기초로 한다. 가정된 변위의 선택이 잘못되었거나, 최소로 완비된 다항식에서 어떤 함수가 누락되면, 결과치가 엄밀해에 수렴하지 않거나 그 수렴의 속도가 느려진다.

Table 1은 Fig.2의 첫번째 형상에 해당하는 $\alpha = 15^\circ, h/R = 0.3, \nu = 0.3$ 인 자유경계의 축대칭 원추형 회전셀의 수렴성 연구 결과를 보여주고 있다. 이 표는 축대칭 모드($n=0$)의 하위 5개의 무차원 진동수 $\omega R \sqrt{\rho/G}$ 를 보여주고 있다.

수렴성 연구의 단순화를 위해 r (또는 Ψ)축과 z (또는 ζ)축 방향으로 취한 다항식의 항 수를 동일하게 취하였다(즉, $I=K=M, J=L=N$). 물론 어떤 셀의 진동형에 대해서는 다항식의 항 수를 서로 달리 할 때 계산의 최적화를 이룰 수도 있다.

Table의 **TZ**와 **TR**은 다항식에서 z (또는 ζ)와 r (또는 Ψ) 방향으로 사용된 항의 총수를 의미한다. 진동수 행렬식의 차수 **DET**와 **TR, TZ**와의 관계식은 다음과 같다.

$$DET = \begin{cases} TZ \times TR & \text{for torsional modes}(n=0) \\ 2 \times TZ \times TR & \text{for axisymmetric modes}(n=0) \\ 3 \times TZ \times TR & \text{for general modes}(n \geq 0) \end{cases} \quad (19)$$

Table 1은 $TZ(=J+1, L+1, N+1)$ 와 $TR(=I+1, K+1, M+1)$ 가 증가함에 따라 5개의 진동수 모두가 단조수렴함을 보여주고 있다. 예를 들면, $(TZ, TR) = (7, 4) = 28$ 항이 사용되어 $DET = 2 \times 28 = 56$ 일 때, 무차원 진동수 $\omega R \sqrt{\rho/G}$ 는 4자리 (1.427)까지 수렴하게 된다. 또한 이러한 정확도를 얻기 위해서는 최소한 축방향으로 7항 ($TZ=7$)과 반경방향으로 4항 ($TR=4$)을 요구하고 있다. Table 1에서 밑줄이 그어진, 굵은 글씨체로 된 숫자는 가장 작은 크기의 행렬 식으로 구한 가장 정확한 값 (최소 상위 경계치)을 의미한다.

Table 1 Convergence of frequencies in $\omega R \sqrt{\rho/G}$ of a free, complete conical shell of revolution for the five lowest axisymmetric modes ($n=0$) with $\alpha = 15^\circ$ and $h/R=0.3$ for $\nu=0.3$

TZ	TR	DET	1	2	3	4	5
2	2	8	1.515	2.740	4.383	6.664	12.75
2	3	12	1.474	2.360	3.529	6.183	7.782
2	4	16	1.469	2.325	3.308	5.331	6.316
2	5	20	1.466	2.301	3.234	4.768	5.629
2	6	24	1.463	2.299	3.219	4.752	5.324
2	7	28	1.463	2.298	3.209	4.735	5.284
3	2	12	1.445	2.007	3.017	3.934	5.503
3	3	18	1.439	1.883	2.919	3.165	4.626
3	4	24	1.433	1.827	2.796	2.893	4.323
3	5	30	1.431	1.813	2.643	2.850	4.157
3	6	32	1.431	1.795	2.554	2.831	4.066
4	2	16	1.434	1.815	2.636	2.897	4.248
4	3	24	1.431	1.758	2.356	2.840	3.968
4	4	32	1.430	1.738	2.238	2.815	3.552
4	5	40	1.429	1.725	2.114	2.809	3.131
4	6	48	1.428	1.722	2.073	2.807	2.939
4	7	56	1.428	1.720	2.051	2.795	2.845
5	2	20	1.431	1.745	2.251	2.827	3.364
5	3	30	1.429	1.722	2.073	2.810	3.029
5	4	40	1.428	1.717	2.020	2.779	2.809
5	5	50	1.428	1.715	1.975	2.571	2.806
6	2	24	1.430	1.729	2.045	2.818	2.869
6	3	36	1.428	1.716	1.968	2.539	2.808
6	4	48	1.428	1.715	1.948	2.430	2.803
7	2	28	1.429	1.728	1.977	2.505	2.816
7	3	42	1.428	1.715	1.943	2.340	2.800
7	4	56	<u>1.427</u>	1.714	1.937	2.299	2.790
7	5	70	<u>1.427</u>	1.714	1.936	2.279	2.749
8	2	32	1.429	1.727	1.971	2.360	2.810
8	3	48	1.427	1.715	1.939	2.288	2.760
8	4	64	1.427	1.714	<u>1.936</u>	2.273	2.716
8	5	80	1.427	1.714	1.936	<u>2.269</u>	<u>2.678</u>

4. 수치결과 및 2차원 셸이론과의 비교

Table 2와 3은 $h/R=0.3, 0.1, \alpha=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, \nu=0.3$ 인 자유경계의 절두 되지 않은 축대칭 원추형 회전셸의 무차원 진동수 $\omega R \sqrt{\rho/G}$ 를 보여 주고 있다. Table 2와 3은 Fig. 2와 3에 그려져 있는 셸의 결과치에 해당한다. 각 셸의 형상에 대해서 6개의 원주파동수 ($n=0^T, 0^A, 1, 2, 3, 4$)와 각 n 의 하위 5개의 모드 ($s=1, 2, 3, 4, 5$)에 해당하는 총 30개의 진동수를 보여주고 있다. 상첨자 T 와 A 는 비틀림 모드와 축대칭 모드를 의미한다. 괄호 안의 숫자는 각 셸의 형상에 대해서 최하위 5개의 진동수를 의미한다. 강체 모드가 갖는 영의 진동수는 이 Table에

Table 2 Nondimensional frequencies in $\omega R \sqrt{\rho/G}$ of free, conical shells with $h/R=0.3$ for $\nu=0.3$

n	s	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 75^\circ$
0^T	1	1.267	2.466	3.526	4.377	4.938
	2	1.978	3.865	5.573	7.007	8.027
	3	2.597	5.081	7.333	9.206	10.31
	4	3.214	6.274	8.982	10.70	11.20
	5	3.875	7.566	10.73	11.38	11.68
0^A	1	1.427	1.655(4)	1.608(3)	1.481(3)	1.289(2)
	2	1.714	2.296	2.824	3.210	3.413
	3	1.935	3.233	3.787	3.926	3.904
	4	2.267	3.301	4.700	5.911	6.706
	5	2.665	4.257	6.197	7.699	8.563
1	1	0.6938(2)	1.718	2.024(4)	2.203(4)	2.317(4)
	2	1.189	2.029	2.520	2.662	2.718
	3	1.558	2.557	3.648	4.541	5.151
	4	1.602	2.832	3.797	4.908	5.654
	5	1.910	3.458	5.334	6.130	6.633
2	1	0.3949(1)	0.5155(1)	0.5999(1)	0.6626(1)	0.7032(1)
	2	1.008(4)	1.651(3)	2.106	2.294	2.339(5)
	3	1.603	2.583	2.873	3.220	3.502
	4	2.098	3.129	4.059	4.177	4.223
	5	2.452	3.903	4.640	5.755	6.503
3	1	0.7627(3)	1.101(2)	1.299(2)	1.427(2)	1.503(3)
	2	1.563	2.591	3.295	3.528	3.587
	3	2.200	3.519	3.835	4.328	4.721
	4	2.817	4.004	5.512	5.738	5.797
	5	3.454	5.088	5.777	6.979	7.804
4	1	1.061(5)	1.711(5)	2.075(5)	2.292(5)	2.414
	2	2.059	3.432	4.417	4.630	4.675
	3	2.893	4.516	4.786	5.439	5.933
	4	3.775	4.899	6.661	7.282	7.373
	5	4.477	6.209	7.105	8.138	9.032

서 생략되었다.

Table 2와 3은 셸의 두께(h/R)와 꼭지점 각 (α)의 크기에 관계없이 기본(최하위) 진동수는 원주파동수 (n)가 2인 모드에서 발생하며, 비틀림 모드 ($n=0^T$)는 모두 상위 진동수를 가진다는 사실을 보여주고 있다.

Table 2와 3에서 수치계산에 사용된 대수다항식의 항수 (TZ, TR)은 $\alpha=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 에 대해서 (TZ, TR)=(8,6), (7,7), (6,8), (5,10), (4,12)를 사용하였다.

Dreher과 Leissa⁽¹¹⁻¹²⁾는 2-D Donnell-Mushtari 셸이론을 이용하여 원추형 셸의 축대칭 모드 ($n=0$)에 대한 엄밀해를 구하였다.

Table 4는 강성 $K=12(1-\nu^2)(h/R)^2/(\tan^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)$

Table 3 Nondimensional frequencies in $\omega R \sqrt{\rho/G}$ of free, conical shells with $h/R=0.1$ for $\nu=0.3$

n	s	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 75^\circ$
0^T	1	1.323	2.559	3.623	4.442	4.959
	2	2.161	4.181	5.925	7.273	8.125
	3	2.971	5.751	8.159	10.03	11.21
	4	3.765	7.296	10.36	12.75	14.27
	5	4.556	8.842	12.54	15.45	17.31
0^A	1	1.443	1.535	1.394(5)	1.149(4)	0.7804(3)
	2	1.677	2.012	2.135	2.121	1.937
	3	1.945	2.713	3.164	3.384	3.451
	4	2.287	3.244	3.872	4.071	3.914
	5	2.664	3.565	4.576	5.487	6.035
1	1	0.7495(5)	1.558	1.550	1.370(5)	1.110(5)
	2	1.276	2.040	2.438	2.617	2.654
	3	1.540	2.134	2.550	2.665	2.720
	4	1.658	2.818	3.560	4.278	4.746
	5	1.954	2.872	4.057	5.095	5.744
2	1	0.1831(1)	0.2209(1)	0.2434(1)	0.2545(1)	0.2575(1)
	2	0.5495(3)	0.9244(4)	1.216(4)	1.424	1.562
	3	1.085	1.868	2.329	2.427	2.380
	4	1.525	2.557	2.798	3.183	3.503
	5	1.972	2.722	3.893	4.190	4.234
3	1	0.4151(2)	0.4931(2)	0.5390(2)	0.5678(2)	0.5839(2)
	2	0.8984	1.362(5)	1.759	2.075	2.285
	3	1.425	2.385	3.209	3.570	3.603
	4	1.942	3.442	3.648	4.046	4.484
	5	2.525	3.475	4.886	5.753	5.816
4	1	0.7001(4)	0.8487(3)	0.9283(3)	0.9782(3)	1.007(4)
	2	1.346	1.933	2.433	2.829	3.089
	3	1.934	3.087	4.101	4.620	4.678
	4	2.531	4.336	4.594	4.999	5.519
	5	3.144	4.424	5.932	7.248	7.411

=10000, $\nu=0.3$ 인 원추형 셸의 하위 4개의 축대칭 모드($n=0$)에 대해서 3차원 리프범(3DR)과 2차원

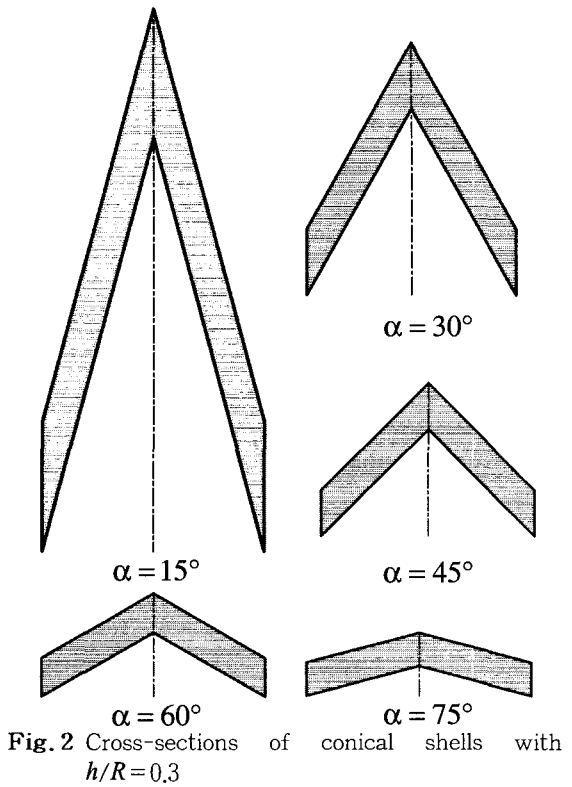


Fig. 2 Cross-sections of conical shells with $h/R=0.3$

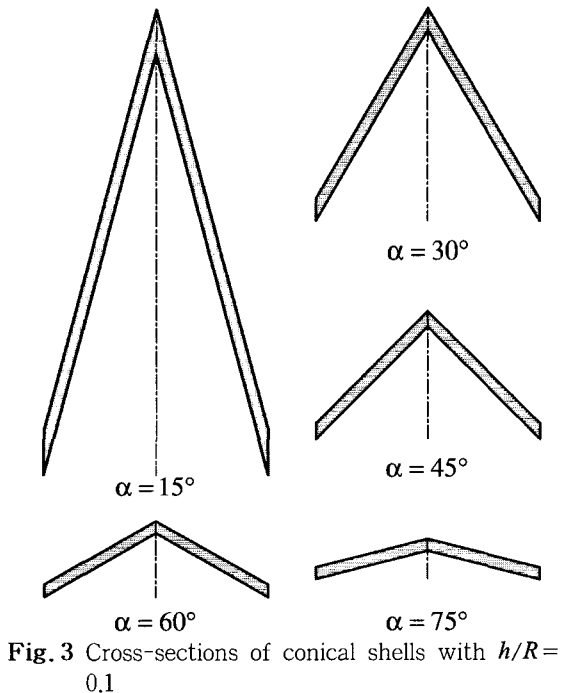


Fig. 3 Cross-sections of conical shells with $h/R=0.1$

Table 4 Comparisons of nondimensional frequencies in $\omega R\sqrt{\rho/G}$ from the 3-D and 2-D methods of free, complete conical shells of revolution for the first four axisymmetric modes ($n=0$) with the stiffness parameter $K \equiv 12(1-\nu^2)(h/R)^{-2} / (\tan^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) = 100000$ for $\nu=0.3$

s	Method	$[\alpha, h/R]$				
		[15°, .151]	[30°, .0362]	[45°, .0148]	[60°, .00697]	[75°, .00290]
1	2DS	1.742	1.562	1.275	0.9017	0.4668
	3DR (%차이)	1.442 (20.8%)	1.481 (5.47%)	1.240 (2.82%)	0.8916 (1.13%)	0.4655 (0.28%)
2	2DS	2.190	1.963	1.603	1.134	0.5868
	3DR (%차이)	1.697 (29.1%)	1.795 (9.36%)	1.527 (4.98%)	1.111 (2.07%)	0.5841 (0.46%)
3	2DS	2.686	2.408	1.966	1.390	0.7196
	3DR (%차이)	1.978 (35.8%)	2.245 (7.26%)	1.888 (4.13%)	1.365 (1.83%)	0.7166 (0.42%)
4	2DS	3.315	2.882	2.353	1.664	0.8614
	3DR (%차이)	2.322 (42.8%)	2.792 (3.22%)	2.352 (0.04%)	1.663 (0.06%)	0.8617 (-0.03%)

셀이론(2DS)으로 구한 무차원 진동수 $\omega R\sqrt{\rho/G}$ 를 보여주고 있다. 두 가지 해석법에 의한 진동수의 %차이는 다음 식으로 정의한다.

$$\% \text{ 차이} = \frac{2DS - 3DR}{3DR} \times 100 \quad (20)$$

Table 4에서 $(\alpha, h/R) = (75^\circ, 0.00290)$ 의 네 번째 모드($s=4$)를 제외하고는 3차원 리즈법이 셀의 두께(h/R)와 꼭지점 각 (α)의 크기에 관계없이 2차원 얇은 셀이론 보다 작은 진동수를 계산해 준다. 전단 변형과 회전관성효과가 고려된 정확한 3차원 해석은 그렇지 않은 2차원 셀이론에 비해 일반적으로 작은 진동수를 계산해 준다. Table 4는 두께비 (h/R)가 0.04 미만일 때 2차원 셀이론은 10% 이내의 오차를 갖지만, 두꺼운 셀($h/R=0.151$)인 경우 그 결과가 매우 부정확하다는 것을 보여주고 있다.

5. 결 론

3차원 해석으로 완전한 (절두 되지 않은) 두꺼운 축대칭 원추형 회전셀의 진동수를 구하는 과정을 최

초로 제시하였다. 이 해석에서는 균질한 등방성 재료에 대한 3차원적인 동탄성 방정식을 사용하였으며, '변형률이 작다'라는 가정 이외에 그 어떤 변위에 관한 다른 구속을 두지 않았다. 바로 이 점이 셀의 두께방향 변위의 변분에 관한 매우 제한적 가정을 하는 기존의 전통적인 2차원 셀 이론과 가장 큰 차이점이 된다.

하위진동수에 대해서 유효숫자 4자리까지 엄밀해에 수렴하는 정확한 진동수를 리즈법을 이용하여 계산하였다. 3차원 유한요소법으로도 3차원 리즈법으로 구한 진동수의 정확도에 상응하는 결과치를 구할 수는 있지만, 일반적으로 훨씬 더 많은 자유도가 요구되어 (즉, 더 큰 고유치 행렬식의 차수가 요구되어), 리즈법은 수치계산의 경제성과 효율성을 지닌다⁽¹³⁾.

이 연구의 3차원적인 해석방법은 원추방향 (θ)으로 닫힌 축대칭 회전셀 뿐만이 아니라, 회전축 (z)에 대해서 360° 미만으로 모면 (generation area)을 회전시킨 열린 셀 (open shell)에서도 적용될 수 있다.

이 연구에서 정식화된 장방정식 (field equations)과 에너지 범함수는 유한요소법, 유한차분법, Galerkin 법, 에너지법 등을 이용하여 자유진동 뿐만이 아니라 강제진동, 파동의 전달, 정적·동적 변위와 응력을 계산하는 데 사용될 수 있다.

이 연구에서 정식화된 에너지 범함수는 균질한 재료로 된 셀뿐만이 아니라 이질재료로 된 셀에서도 적용이 가능하다.

후 기

심사자의 유익한 비평에 감사를 드립니다. 이 논문은 2004학년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임을 밝힙니다.

참 고 문 헌

- (1) Leissa, A. W., 1973, Vibration of Shells, U. S. Government Printing Office, Washington D. C., 1993 Reprinted by The Acoustical Society of America.
- (2) Leissa, A. W. and So, J., 1995, "Three-dimensional Vibrations of Truncated Hollow Cones," Journal of Vibration and Control, Vol. 1,

pp. 145~58.

(3) Buchanan, G. R., 2000, "Vibration of Truncated Conical Cylinders of Crystal Class 6/mmm, Journal of Vibration and Control, Vol. 6, pp. 985~98.

(4) Buchanan, G. R. and Wong, F. T. -I., 2001, "Frequencies and Mode Shapes for Thick Truncated Hollow Cones," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, pp. 2815~2832.

(5) Leissa, A. W. and Kang, J. -H., 1999, "Three-dimensional Vibration Analysis of Thick Shells of Revolution," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 125, No. 12, pp. 1365~1371.

(6) Kang, J. -H. and Leissa, A. W., 1999, "Three-dimensional Vibrations of Hollow Cones and Cylinders with Linear Thickness Variations." Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 106, No. 2, pp. 748~755.

(7) 강재훈, 이은택, 양근혁, 2001, "임의의 곡률과 변두께를 갖는 두꺼운 축대칭 회전 쉘의 삼차원적 장방정식, 운동방정식, 에너지 범함수," 한국소음진동공학회논문집, 제 11 권, 제 1 호, pp. 156~166.

(8) Sokolnikoff, I. S., 1956, Mathematical

Theory of Elasticity, Second Edition, McGraw-Hill Book Co., New York., p. 184.

(9) Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., 1958, Approximate Methods in Higher Analysis, Noordhoff, Gronigen, The Netherlands.

(10) Ritz, W., 1909, "ber eine neue Methode zur Lsung Gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik," Journal fr die Reine und Angewandte Mathematik, Vol. 135, pp. 1~61.

(11) Dreher, J. F., 1966, "Axisymmetric Vibration of Thin Conical Shells," Ph.D. Dissertation, The Ohio State University.

(12) Dreher, J. F. and Leissa, A. W., 1968, "Axisymmetric Vibration of Thin Conical Shells," Proc. 4th Southwestern Conf. on Theoretical and Appl. Mech. (New Orleans, La.), Feb. 29~Mar. 1, pp. 163~181.

(13) McGee, O. G. and Leissa, A. W., 1991, "Three-dimensional Free Vibrations of Thick Skewed Cantilever Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 144, pp. 305~322; Errata Vol. 149, pp. 539~542.