

원형 외팔보의 응답에서의 비선형 현상[#]

Non-linear Phenomenon in the Response of Circle Cantilever Beam

김 명 구[†] · 이 흥 식^{*} · 조 종 두^{**}

Myung-Gu Kim, Heung-Shik Lee and Chong-Du Cho

(2004년 12월 28일 접수 : 2005년 3월 28일 심사완료)

Key Words : Non-linear Coupling(비선형 연성), Modal Coupling(모드연성), Planar Motion(평면운동), Jump Phenomenon(노약현상), Harmonic Excitation(조화가진), Flexible Structures(유연 구조물), Internal Resonance(내부공진)

ABSTRACT

This paper is the result of a experimental study about non-linear one to one modal coupling of a flexible circular cantilever beam which was transversely excited with harmonic excitation. It was proved that 2 order jumping in out of plane was caused by jump phenomenon in in-plane of flexible circular cantilever beam, because of non-linear coupling. In addition, cantilever beam showed hardening spring characteristics in in-plane and softening spring characteristics in out-of-plane.

1. 서 론

외팔보의 구조를 갖는 구조물의 비선형 현상을 실험적으로 규명하고 해석하는 것은 매우 중요한 연구 중의 하나이다. 외팔보 구조의 비선형 진동해석은 로보틱스(robotics), 대형 우주구조물(spacecraft)에 사용되는 유연 구조물(flexible structures)의 해석과 설계에 사용될 것이다. 유연 구조물에서 나타나는 동역학적인 현상을 실험적으로 이해하고 설명함으로써 설계된 유연 구조물이 동역학적으로 안정성을 갖고 신뢰성을 갖게 할 수 있다.

많은 비선형 응답현상은 실제로 유연한 기계구조물의 진동현상에서 잘 일어난다. 일반적으로 기계구조

물에서 공진이나 비선형 응답이 발생하는 주파수 부근에서는 기계구조물의 운전을 피하고 있다. 그러나 로보틱스, 헬리콥터 로터블레이드, 우주구조물들이 외부에서 받는 진동은 거의 랜덤진동이므로 공진과 비선형 응답을 피하기가 매우 어렵다. 따라서 이런 유연 구조물들은 비선형 현상이 매우 잘 나타나고 있다. 이미 설계된 구조물에서 유연 구조물의 비선형 현상을 고려하지 않고 단순히 그 응답특성을 회피하는 것은 설계상 매우 어렵다.

Haight와 King⁽¹⁾은 비선형 실험을 한 최초의 연구자이다. 그들은 비선형 elastodynamic analysis를 증명하기 위하여 실험을 하였고 기초조화가진을 받는 외팔보의 비선형 응답특성인 flexural-flexural single mode를 발견 하였다. 이론적인 분석은 비선형 미분방정식을 기초로 하였고 비틀림과 곡선(curvature)의 비선형 영향을 무시하였다. 그 결과 이론과 실험사에 약간의 상관성을 얻었다. Tseng과 Dugundji⁽²⁾는 보의 기초에 횡방향으로 주기적인 운동에 의해 가진되는 끝이 고정된 일직선 보의 비선형 진동현상을 연구하였다. 보의 비선형 응답에서 하모닉운동(harmonic), 고차조화운동(superharmonic)과 분수조화운동(subharmonic)의 응답특성을 얻었다. Haddow,

[†] 책임저자 : 정회원, 인하대학교 기계공학과
E-mail : mgkim21@hotmail.com
Tel : (032)860-7321, Fax : (032) 0868-1716

^{*} 정회원, 인하대학교 기계공학과

^{**} 인하대학교 기계공학과

[#] 이 논문은 2004추계학술대회에서 우수발표논문으로 추천되었음.

Barr and Mook⁽³⁾은 내부공진(internal resonance)을 포함하는 2자유도(two-degree-of-freedom)의 1차 공진(primary resonances)을 실험적, 이론적 연구를 하였다. Zavodney와 Navfeh⁽⁴⁾는 multiple time scale 방법을 사용하여 lumped-tip-mass 형태를 갖는 외팔보의 비선형 응답특성을 실험과 이론적 연구를 하였다. 본 연구에서는 원형 외팔보를 이용하여 보의 비선형 현상인 도약현상을 분석하였고, 원형 외팔보에서 나타나는 one-to-one resonance의 존재를 실험적으로 증명을 하였다.

2. 선형 보이론⁽⁶⁾

진동분석을 위하여 선형 보는 일반적으로 다음과 같다. 보의 재료특성은 균일성과 등방성을 갖는 탄성 재료로 구성되어 있으며 보의 간격은 일정하고 보의 형상은 원형이고 회전관성과 전단변형은 고려하지 않는다. 그리고 단면은 항상 평면을 유지하고 보의 자중에 의한 축방향의 자중은 무시한다. 보의 단면에서의 전단중심은 질량중심과 일치하며 보의 회전과 병진운동의 상호간섭은 없다. 따라서 균일한 보의 자유진동에 대한 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad a^2 = \frac{EI}{m} \quad (1)$$

보는 관성력을 가지고 있으므로 경계조건을 고려하면 고유치 λ 로 표시 할 수 있다. λ_i 는 보에 적용되는 경계조건으로 외팔보의 경계조건은 다음과 같다.

$$\lambda_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

보의 고유주파수는 Hz로 표시되며, 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Table 1 Comparison of the experimental and analytical values for frequency of the bending mode

Frequency order no.	Eigenvalues (λ)	Analytical values(Hz)	Experimental values(Hz)
1	1.8751	6.5664	6.75
2	4.6941	41.1513	40.50
3	7.8548	115.2256	111.50
4	10.9959	225.7921	215.00

여기서 L 은 보의 길이이며 m 은 보의 단위길이 당 질량이다. E 는 보의 탄성계수이며, I 는 보의 면적관성모멘트이다. 위 식을 이용하여 보의 물성치와 경계조건을 넣어서 외팔보의 고유주파수를 계산 하였다. 실험적으로 외팔보의 고유주파수를 해석하기 위하여 가진기를 사용하여 Pseudo-random으로 외팔보를 기초가진 한 다음에 FRF 방법을 이용하여 외팔보의 고유주파수를 실험적으로 구하였다. 외팔보의 선형적인 보의 고유진동수의 이론치와 실험치를 상호 비교하여 Table 1에 표시하였다.

3. 유연한 외팔보의 비선형 현상^(7, 9)

대변형이 일어나는 유연한 외팔보는 외력에 의해서 보의 대변형이 발생한 발생할 때에는 그에 따른 기하학적인 비선형 현상들이 발생하게 된다. 유연한 외팔보의 보존력항의 변위가 비선형 함수인 경우, Fig. 1과 같이 가진 주파수가 증가함에 따라 급격한 진폭변화가 일어나는 도약(jump)현상이 발생한다. 또한 가

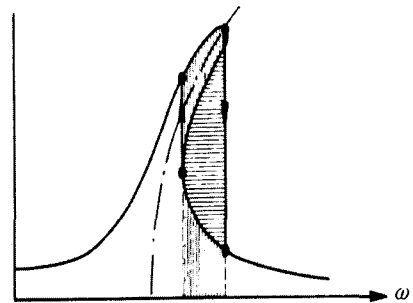


Fig. 1 Theoretical frequency response curve for a hardening spring type resonant system

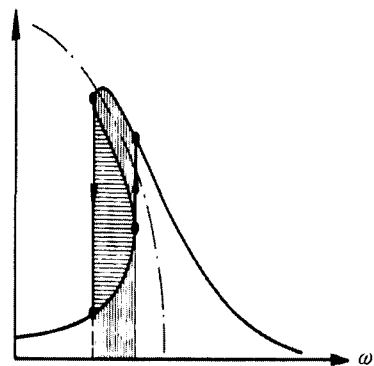


Fig. 2 Theoretical frequency response curve for a softening spring type resonant system

진주파수가 증가하는 경우와 가진주파수가 감소하는 경우에서 일정한 가진주파수 영역에서 서로 다른 응답특성을 갖고 있다. 도약현상이 일어나는 지역에서는 세 개의 복수의 응답특성이 존재하며 두 개는 안정해이고 나머지 하나는 불안정한 응답특성을 갖는다. 이때 2개의 안정해 중 실제 발생하는 해는 초기조건에 의해 결정이 된다. 나머지 하나의 불안정한 해가 비선형 현상을 유발하게 하여 도약현상이 일어난다.

가진주파수가 증가함에 따라 계의 복원력이 단조증가함수인 경우에는 응답곡선이 좌측으로 기울어지는 hardening spring 현상이 일어난다. 반대로 가진주파수가 감소함에 따라 계의 복원력이 단조감소인 경우에는 응답곡선이 softening spring 현상이 일어난다.

유연한 외팔보의 비선형 현상이 일어나면 one-to-one modal coupling⁽⁵⁾에 의해서 planar 운동과 non-planar 운동이 일어난다. 이 현상은 외팔보의 in-plane 방향의 planar 운동이 모드연성 현상으로 out of plane에서 non-planar 운동을 유발시키고 있다. one-to-one modal coupling 일어난다면 진동에너지가 in-plane에서 out of plane으로 쉽게 이동할 수 있다. 따라서 out of plane으로 전이된 진동에너지가 non-planar 운동을 일으킨다. 원형 외팔보에서 planar 운동에서 non-planar 운동으로 운동의 양상이 변화할 때 외팔보의 운동을 예측하기 매우 어렵다. 이 영역이 또한 동역학적으로 따른 하나의 불안정한 영역이 된다.

4. 실험방법

4.1 실험장치

외팔보는 균일한 탄성재료인 알루미늄 합금(AL)을 사용하였고, 사용된 알루미늄 합금의 물성치는 탄성계수 $E=72\text{ GPa}$, 강성계수 $G=27\text{ GPa}$, 푸아송비 (poisson's ratio) $\nu=0.3333$, 원형 외팔보의 단위길이 당 질량 $m=0.0336\text{ kg/m}$ 이며, 외팔보의 형상은 단면이 원형(지름 $\phi=4\text{ mm}$, 길이 665 mm)이다. 또한 유연한 알루미늄 합금은 연성재료이므로 약간의 구조감쇠를 갖고 있다. 외팔보의 가진 방법은 고정부를 기초조화가진으로 일정한 진폭의 사인파가진을 하였다.

실험에 사용된 측정기는 다음과 같다.

Dual channel signal analyzer (B&K type 2035)

Charge amplifier (B&K type 2635)

Accelerometer (B&K type 4374)

Accelerometer (B&K type 4370)

Shaker (LDS V550)

Power amplifier (LDS)

DAT (SONY PC204A)

Level record (B&K type 2307)

Oscilloscope (HP 54615B)

Phase shifter

가진기와 외팔보를 고정시키는 지그(jig)는 경량이 고 기계적 성질이 우수한 AL2024로 만들었으며 지그의 형상은 외팔보의 경계조건을 만족시키고 보가 횡방향 가진을 받기에 적합하도록 설계 제작되었다. 지그의 앞면에 가속도계를 부착하여 FRF방법으로 지그의 고유주파수를 측정하였다. 외팔보의 측정 가능한 주파수범위를 0~400 Hz 이내로 제한하였으므로 지그의 고유주파수도 이 주파수대역에서만 측정하였다.

지그의 x축 방향으로의 고유주파수가 없으며, y축 방향으로의 150.50 Hz에 하나가 있고, z축 방향으로의 208.00 Hz에 고유주파수가 있다. 지그의 고유주파수가 외팔보의 고유주파수와 상호 관련이 없음을 알 수 있다.

4.2 실험방법⁽⁸⁾

유연한 외팔보를 고정-자유(fixed-free)를 갖는 경계조건을 만족시키는 상태로 가진기에 고정을 하였

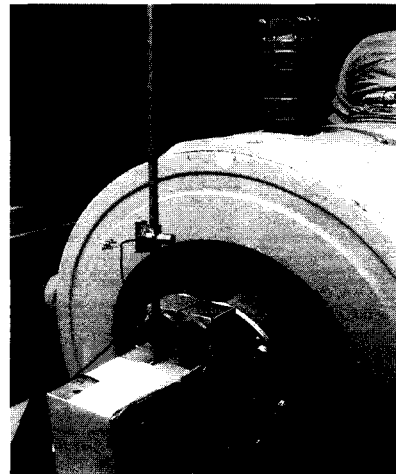


Fig.3 Accelerometer position on the beam

다. 가진기와 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하고 가진주파수를 증가하거나 감소시키는 방법을 이용하여 실험을 수행하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크

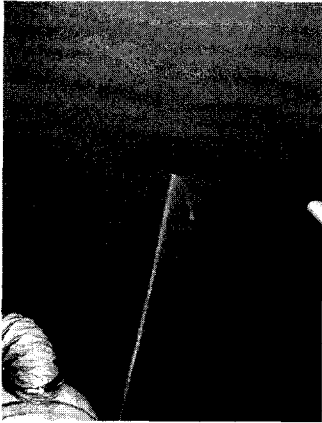


Fig.4 In-plane motion of the beam (2nd mode)

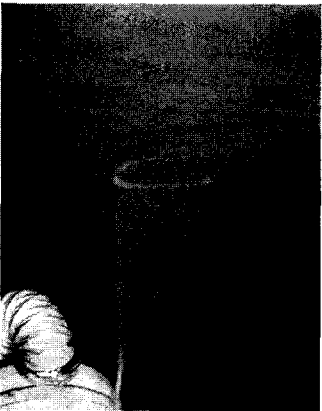


Fig.5 In-plane and out of plane motion of the beam (2nd mode)

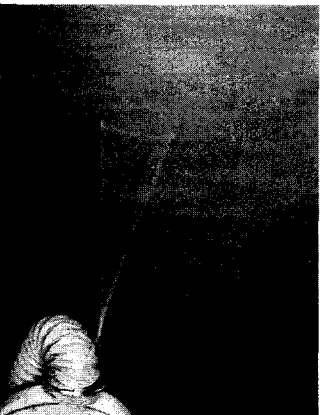


Fig.6 Nonlinear vibration motion of the beam (2nd mode)

기를 일정하게 하면 가진기에서 발생하는 조화진동의 속도성분이 가진주파수의 변화와 상관없이 일정한 값을 갖게 된다. 가진주파수의 증가와 감소는 sine sweeping의 형태이며 그 비율은 0.030 Hz/s이다.

가진기에 공급되는 전압의 크기의 변화는 가진기에서 발생하는 가속도진폭의 크기를 변화시킨다. 가진기에서 발생하는 가속도진폭의 크기는 2nd 모드에서 5g, 10g, 20g로 설정을 하고 실험을 하였다. 이 진폭은 가진기의 아마추어 표면에 부착되어 있는 또 하나의 가속도계를 이용하여 측정하였다. 외팔보의 응답특성을 측정하기 위하여 외팔보의 in-plane방향(x-axis)과 out of plane방향(y-axis)에 각각 B&K 4374 가속도계를 부착하였다. B&K 4374 가속도계의 무게는 각각 0.65 gram 정도이고 주파수범위가 1~25 kHz까지 측정이 가능하며, 측정가능 가속도레벨은 250,000 m/s²까지이다. 가속도계의 부착위치는 고정부에서 10 mm 높이에 순간접착제를 이용하여 보의 표면에 고정을 시켰다.

Charge type의 가속도계는 charge amp(B&K 2635)을 통해서 전압신호로 변환되어 SONY DAT에 전압신호로 저장된다. 저장된 신호는 다시 레벨 레코더(B&K 2307)에 보내져서 응답신호의 레벨을 기록지에 기록을 하게 된다. 이 기록지에 기록된 데이터를 이용하여 비선형 응답특성을 해석하였다.

5. 실험결과 및 고찰

유연한 원형 외팔보의 2nd 모드에서의 one-to-one nonlinear coupling 현상은 두개의 도약현상이 coupling 되어 있음을 알 수 있다. 원형 외팔보의 가진방향과 일치하는 방향인 in-plane 방향(x-방향)에서 먼저 도약현상이 일어나고 있음을 Fig. 7, Fig. 8의 실험결과로 알 수 있다. Fig. 7에서 그림 안에 있는 3개의 그래프는 가진기의 가속도레벨을 5g, 10g, 20g로 그 크기를 변경해가면서 보의 응답특성을 그린 그래프이다. 3개의 그래프의 응답진폭의 변화를 통해서 보의 응답특성이 선형응답에서 비선형응답 특성으로 변화하는 것을 알 수 있다. 이 경우 가진주파수는 39.5 Hz에서부터 42.5 Hz까지 변화시켰으며, 가진주파수의 주파수 변화속도는 0.030 Hz/s의 비율로 일정한 가진력을 유지하는 상태에서 가진주파수를 증가해 가면서 얻어진 곡선이다. Fig. 8은 응답진

폭은 동일방법으로 얻어진 그래프이며 가진주파수는 42.5 Hz에서 39.5 Hz까지 가진주파수를 감소해 가면서 그린 그래프로써 주파수 변화속도는 0.030 Hz/s의 비율로 가진주파수를 감소시켜 가면서 레벨레코더로 그린 그래프이다. 위 그래프에서 보가 받는 외부

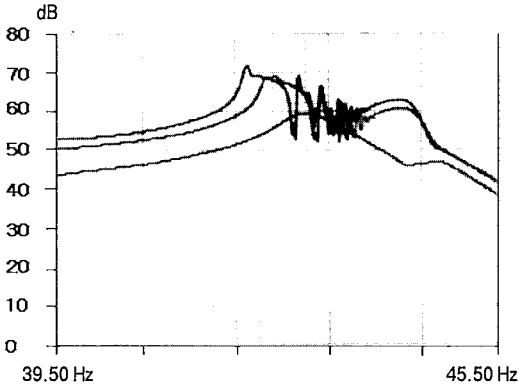


Fig. 7 Frequency response curve for forward direction on the 2nd mode (in-plane)

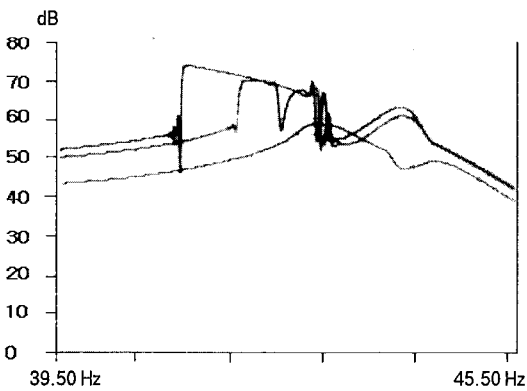


Fig. 8 Frequency response curve for backward direction on the 2nd mode (in-plane)

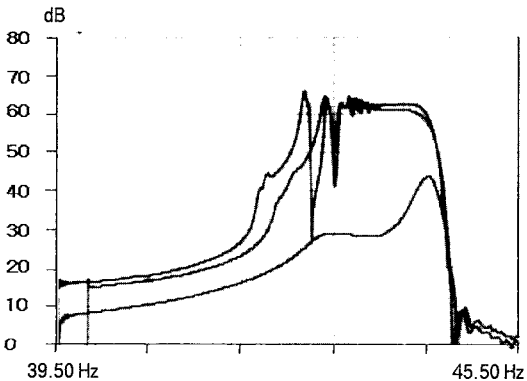


Fig. 9 Frequency response curve for forward direction on the 2nd mode (out of plane)

가진력을 증가시키면 in plane 방향에서 hardening spring에 의한 도약현상이 발생함을 알 수 있다.

외팔보의 one-to-one non-linear coupling 현상으로 out of plane 방향(y-방향)의 또 다른 형태의 도약현상이 일어난다. Fig. 9와 Fig. 10은 out of plane에서의 도약현상을 보여주고 있다. 위 그래프에서 out of plane 방향에서는 보의 응답특성이 softening spring에 의한 도약현상이 발생함을 알 수 있다. 또한 one-to-one non-linear coupling 현상으로 인하여 planar 운동에서 발생된 진동에너지가 out of planar 방향으로 이동을 하여 non-planar 운동으로 전환이 되며 이것은 모드 연성으로 인하여 외팔보의 또 다른 하나의 불안정한 영역이 존재함을 실험적으로 알 수 있다.

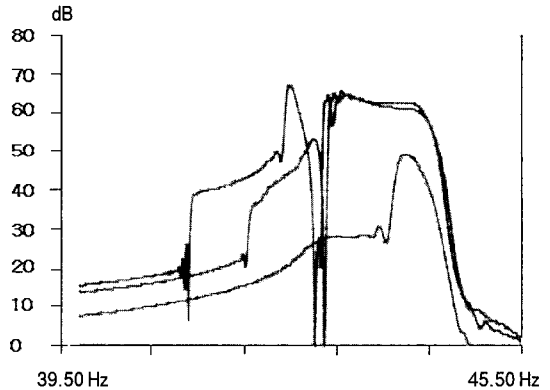


Fig. 10 Frequency response curve for backward direction on the 2nd mode (out of plane)

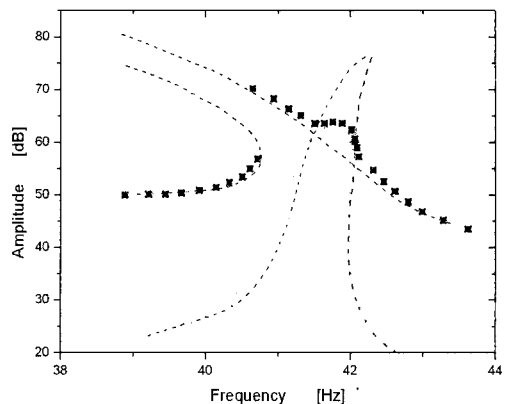


Fig. 11 Jumping phenomenon of the flexible circle cantilever beams on the forward direction(■: in-plane motion, ▽: out of plane motion)

Fig. 11과 Fig. 12의 그래프는 Fig. 7~10에서 나타난 그래프를 다시 수정하여 나타낸 그래프이다. 가진 주파수가 증가하는 상태에서 Fig. 7은 원형보의 in-plane에서의 비선형응답 특성을 보여주고 있으며, Fig. 9은 out of plane에서의 비선형 응답특성을 보여주고 있습니다. 위 현상을 하나의 그래프에 표현한 것이 Fig. 11입니다. Fig. 11에서는 가진주파수가 증가할 때 in-plane 상태의 응답특성과 out of plane에서의 비선형 응답특성을 동시에 보여주고 있다. 그리고 점선으로 나타난 그래프는 in-plane과 out of plane에서의 도약현상을 각각 보여주고 있습니다. 따라서 범

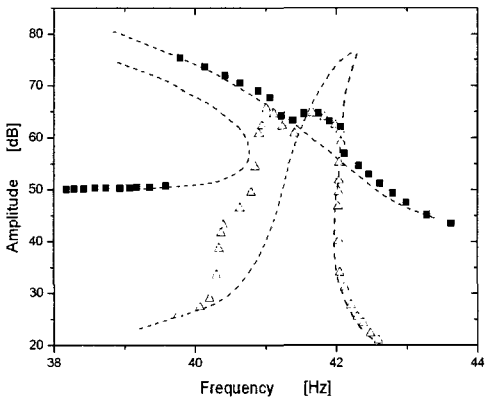


Fig. 12 Jumping phenomenon of the flexible circle cantilever beams on the backward direction (■: in-plane motion, ▽: out of plane motion)

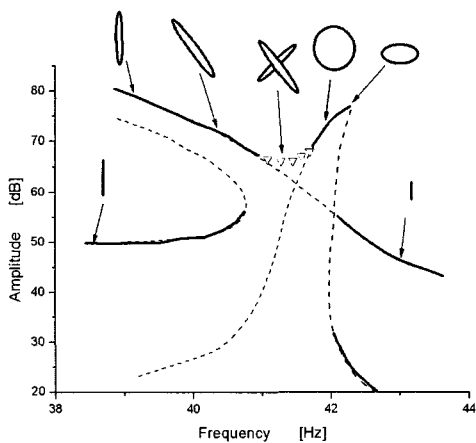


Fig. 13 Non-linear frequency response curve of the flexible circle cantilever beams (■ stable, --- unstable, ▽▽▽ nonlinear coupling unstable)

의 one to one resonance 현상에 의해서 in-plane 운동에서 out of plane으로 에너지가 전이 되어가는 것을 볼 수 있다. 그리고 one to one resonance에 의해서 발생한 에너지 전이현상에 의해서 in-plane운동에서의 진동에너지가 out of plane으로 전이되면서 in-plane의 진동에너지가 상대적으로 작아지고 out of plane의 진동에너지가 점점 크게 나타나고 있음을 볼 수 있었다.^(11, 12)

Fig. 12의 그래프는 Fig. 8과 10에서 나타난 그래프를 다시 수정하여 나타낸 그래프이다. 가진주파수가 단조 감소하는 상태에서 Fig. 8은 원형 외팔보의 in-plane에서의 비선형응답 특성을 보여주고 있으며, Fig. 10은 out of plane에서의 비선형 응답특성을 보여주고 있다. 위 현상을 하나의 그래프에 그린 것이 Fig. 12입니다.

Fig. 11과 Fig. 12를 상호 비교분석을 하면 가진주파수가 증가할 때 나타나는 비선형 현상 보다 가진주파수가 감소 할 때 비선형 현상이 더 잘 나타난다는 것을 실험적으로 보여주고 있습니다. 즉 원형 외팔보의 2차 모드의 비선형현상을 분석함에 있어서 가진주파수가 감소 할 때 비선형 현상이 더 잘 나타남을 실험적으로 알 수 있었다. 따라서 대부분의 비선형 이론이 가진주파수가 증가하는 경우에 대한 해석을 많이 하고 있는데 위의 실험결과를 기초로 하여 가진주파수가 감소하는 경우에 대한 연구도 필요하다고 봅니다.

원형 외팔보의 운동이 가진주파수가 변화함에 따라 보의 어떤 모양으로 변화가 되고 있는지를 시각적으로 관찰한 모습이 Fig. 13에 보여주고 있다.⁽¹³⁾ 외팔보의 움직이는 모양은 외팔보를 위(z축 방향)에서 보았을 때 보의 응답특성과 변형된 모습을 Fig. 13은 보여주고 있다. 시각적인 관찰을 통해서 보의 안정한 영역과 불안정한 영역을 각각 구분하여 표시를 하였다. 비선형 실험에서 비선형 현상을 시각적으로 관찰하는 것은 매우 힘든 일이다. 따라서 비선형 현상을 시각적으로 관찰을 함으로서 주파수의 변화에 따라서 보의 응답특성이 어떻게 변화하는 지를 정확하게 알 수 있다.(Fig. 1~4) 원형 외팔보의 응답특성에서 in-plane운동이 out of plane운동으로 전환이 될 때 가장 크게 변형이 발생하였고, 이 주파수 영역에서 가장 불안정한 영역을 갖게 되었다.^(11~13)

6. 결 론

유연한 원형 외팔보의 비선형 진동실험에서 one-to-one modal coupling이 갖는 주파수 응답특성을 분석하였다. 외팔보에서 one-to-one modal coupling으로 in-plane 방향의 진동에너지가 모드연성 때문에 out of plane 방향으로 진동에너지의 전이(transfer)가 발생하며, 이 에너지 전이가 non-planar 운동을 유발시킴을 알 수 있다. 따라서 one to one modal coupling이 발생하면 in plane 방향의 진동진폭이 감소하고 오히려 out of plane 방향의 진동진폭이 증가함을 볼 수 있다. In plane 방향에서는 hardening spring 특성의 도약현상이 일어나지만 모드연성에 의하여 out of plane 방향에서는 softening spring 특성의 도약현상이 발생하고 있다.

Planar 운동에서 non-planar 운동으로 운동의 양상이 변화하는 과정에서 외팔보는 또 하나의 불안정한 영역을 갖고 있음을 보여주고 있다. 또한 one to one modal coupling이 발생하여도 in-plane 방향의 고유주파수와 out of plane 방향의 고유주파수가 서로 약간의 차이가 있음을 실험 결과로 알 수 있다. 향후 비선형 실험과 원형 외팔보의 비선형 이론을 통하여 실험치와 이론치를 서로 일치시키고 비교분석하는 작업이 필요하다. 또한 대부분의 비선형 이론이 가진주파수가 증가하는 경우에 대한 해석을 많이 하고 있는데 위의 실험결과를 기초로 하여 가진주파수가 감소하는 경우 비선형 현상이 더 잘 발생하므로 가진주파수가 감소하는 경우에 대한 이론적 연구도 필요하다고 봅니다.

참 고 문 헌

(1) Haight, E. C. and King, W. W., 1971, Stability of Non-linear Oscillations of an Elastic Rod, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 52, pp. 899~911.
 (2) Tseng, W. Y. and Dugundji, J., 1970, Nonlinear Vibrations of a Beam Under Harmonic Excitation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, pp. 292~297.
 (3) Haddow, A. G., Barr, A. D. S. and Mook,

D. T., 1984, Theoretical and Experimental Study of Modal Interaction in a Two-degree-of-freedom Structure, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, pp. 451~473.

(4) Zavodney, L. D. and Navfeh, A. H., 1989, The Nonlinear Response of a Slender Beam Carrying a Lumped Mass to a Principal Parametric Excitation : Theory and Experiment, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 24, pp. 105~125.

(5) Zaretzky, C. L. and Crespo da silva, M. R. M., 1994, Experimental Investigation of Non-linear Modal Coupling in the Response of Cantilever Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 174, pp. 145~167.

(6) Blevins, R. D., 1979, Formals for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nastrand Reinhold.

(7) Broch, J. T., 1975, Non-linear Amplitude Distortion in Vibrating System, *Bruel and Kjaer*, pp. 52~82.

(8) 정구충, 임재훈, 최연선, 2004, "부가질량을 갖는 구속외팔보수관의 비선형 동특성", *한국소음진동공학회논문집*, 제 14 권, 제 7 호, pp. 561~568.

(9) 여명환, 이원경, 2001, "원판의 비선형 비대칭 강제진동응답", *한국소음진동공학회논문집*, 제 11 권, 제 4 호, pp. 65~70.

(10) Crespo da silva, M. R. M. and C. C. Glynn, 1978, Nonlinear Flexural-flexural-torsional Dynamics of Inextensional Beams. II. Forced Motions, *J. Struct. Mech.*, Vol. 6, pp. 449~461.

(11) Perngjin F. Pai and Ali H. Nayfeh, 1990, Non-linear Non-planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral Base Excitations, *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 25, No. 5, pp. 455~474.

(12) Ali H. Nayfeh and Perngjin F. Pai, 1989, Non-linear Non-planar Parametric Responses of an Inextensional Beam, *J. Non-linear Mechanics*, Vol. 24, No. 2, pp. 139~158.

(13) Ali H. Nayfeh, 2000, *NONLINEAR INTERACTIONS Analytical, Computational and Experimental Methods*, pp. 181~345.