

후판 환형 디스크 래디얼 모드에 의한 음향방사에 관한 연구

Acoustic Radiation from Radial Vibration Modes of a Thick Annular Disk

이 형 일†

Hyeongill Lee

(2004년 12월 15일 접수 : 2005년 3월 10일 심사완료)

Key Words : Annular Disk(환형 디스크), Radial Mode(래디얼 모드), Sound Radiation(음향방사)

ABSTRACT

This article proposes analytical solutions for sound radiation from radial vibration modes of a thick annular disk. Structural eigensolutions are calculated using the transfer matrix method. The far-field sound pressure distribution is obtained using two alternate methods. In the first method, pressure is calculated using the Rayleigh integral technique. The second method treats sound radiating radial surfaces as cylindrical radiators of finite length. The Sinc function approach is employed for calculations. Acoustic powers and radiation efficiencies of radial modes are also determined from the far-field sound pressure calculations. Analytical predictions match well with measured data as well as computational results from a finite element code in terms of structural eigensolutions and from a boundary element code in terms of sound pressure, directivity etc.

1. 서 론

기어, 브레이크 로터, 자동차용 클러치, 플라이 휠, 원형톱등 여러 종류의 기계 구조 요소들이 환형 원판으로 이상화되어 이론적 해석 또는 수치해석이 수행되고 있다. 이들의 두께가 기타 치수에 비해 무시할 수 있는 영역을 벗어나는 경우가 많으며, 이러한 경우 이들 요소에서 방사되는 소음을 적절히 제어하기 위해서는 굽힘진동 모드에 의해 발생하는 소음과 함께 면내진동 모드에 의해 발생하는 소음도 동시에 고려하여야 한다.

환형 원판의 구조적 동특성은 많은 학자들에 의해 연구되어 왔지만, 면내진동에 관한 연구 결과는 다소 적은 편이다. Bhuta와 Jones⁽¹⁾는 회전하는 원형 박판 디스크에서의 비틀림 진동과 연성된 대칭형 진동에

대해서 연구하였다. Burdess⁽²⁾ 등은 비대칭 면내(in-plane)진동과 함께 정방향과 역방향으로 진행되는 진동파를 고려함으로써 위의 연구를 일반화하였다. Chen과 Jhu⁽³⁾는 회전하는 환형 디스크의 면내진동과 안정성을 검토하여 고유진동수에 대한 회전속도의 영향을 결정하였다. Irie⁽⁴⁾ 등은 전달행렬법을 이용하여 환형원판의 고유진동수를 계산하였으며, 이 연구에서도 이 방법을 이용하여 고유진동 해석을 수행하였다.

원형 및 환형 박판 원판에서의 음향방사는 여러 학자들에 의해 연구되어 왔다.^(5~9) 예를 들어, Thompson⁽⁵⁾은 원격 지향성 함수를 적분함으로써 환형 또는 원형 피스톤의 자기 및 상호 방사저항(self and mutual radiation impedance)을 계산하였다. Lee와 Singh⁽⁶⁾은 환형 박판 디스크의 굽힘진동에 의해 방사되는 음향파위에 대한 근사치를 다항식(polynomial) 형태로 제시하였다. Levine과 Leppington⁽⁷⁾은 축대칭 형태로 진동하는 환형 박막으로부터 발생하는 음향파위에 대한 이론적인 해를 제시하였다. Rdzanek와 Engel⁽⁸⁾은 고정단을 가진 박판 환형 디스크로부터 발

† 책임저자 : 정회원, 삼성전자 디지털프린팅(사)
E-mail : hi1878.lee@samsung.com
Tel : (031) 277-8696, Fax : (031) 200-4648

생되는 음향파위에 대한 접근식을 제시하였다. 마지막으로, Wodtke와 Lamancusa⁽⁹⁾는 원형판 진동을 유한 요소법으로 해석하고 그 결과를 이용하여, Rayleigh 적분법으로 음향방사를 계산하였다. 그러나, 이들 연구들은 원판의 굽힘진동 또는 피스톤 운동에 의한 소음 방사만을 고려하였으며, 면내진동에 의해 방사되는 소음은 제외하였다. 그러나, 이 연구에서 밝혀진 바와 같이 디스크의 두께가 박판이론이 적용되는 영역을 벗어나고 적절한 가진이 행해지는 경우에는 면내진동도 상당한 소음을 발생시킨다.

2. Problem Formulation

앞에서 설명한 바와 같이, 이 연구의 주된 목표는 후판 환형 디스크의 래디얼 모드에 의한 음향방사에 대한 이론적인 해를 제시하는 것이다. 이 연구에 예로써 이용된 디스크가 Fig.1에 설명되어 있으며, 디스크의 치수 및 물성치는 Table 1에 주어져 있다.

이 연구의 기본적인 가정은 다음과 같다.

(1) 연구 대상인 구조 및 음향 시스템은 선형이고 시간에 따른 시스템 특성 변동은 없다고 가정하였으며, 대상물 표면에서의 산란효과는 무시한다.

(2) 자유 음장내의 음압은 내측($r=b$)과 외측($r=a$) 두 래디얼 면(radial edge)의 래디얼 방향 진동으로 인한 표면 속도에 의해서만 발생되며, 디스크의 다른 면들은 음압 발생에 기여하지 않는다.

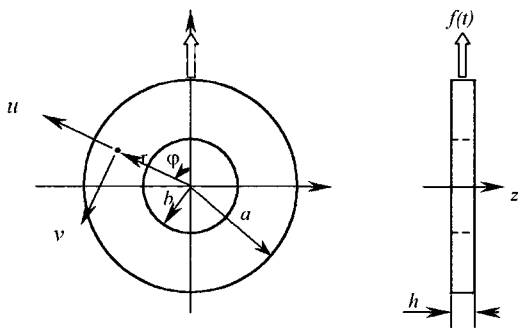


Fig. 1 A thick annular disk

Table 1 Disk dimensions and material properties

Outer diameter (a)	151.5 mm
Inner diameter (b)	82.5 mm
Thickness (h)	31.5 mm
Mass density (σ_d)	7905.9 kg/m ³
Young's ratio (e)	218 GPa
Poisson's ratio (ν)	0.305

(3) 음압을 발생시키는 두 표면상에서 진폭은 z축 방향으로는 일정하다. 그러나 Tzou등(10)에 따르면, 이 가정은 모드 중첩으로 인해 $\bar{h} (= h/a)$ 가 4보다 큰 경우에는 적용이 불가능하다. 따라서 이 논문에서 소개된 방법은 해당 영역에서는 적용할 수 없다.

구조적인 고유진동수와 모드는 전달행렬법을 이용하여 구하였으며, 이들을 기준으로 두 가지 방법을 이용, 음향방사를 계산하였는데, 첫 번째 방법에서는 Rayleigh 적분법을 이용하였고 두 번째 방법에서는 소음을 발생시키는 래디얼 면들을 두 개의 유한한 원통형 음원(finite cylindrical radiator)으로 취급하여 음압을 계산하였다. 모드 음향파위와 음향방사 효율은 이들 원격 음압을 이용하여 계산하였다. 마지막으로 이 결과를 구조-음향 실험에서 얻은 측정치 및 수치해석 결과와 비교하여 정확도를 검증하였다.

3. Structural Analysis

Fig.1에서 보는 바와 같이, 이 연구의 대상물인 환형 후판의 면내진동 해석을 위하여 원통좌표계(r, φ, z)를 적용하였으며, z축은 디스크 축과 일치하도록 정의하였다. z축 방향의 주응력 및 전단응력($\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = 0$)은 무시할 수 있다고 가정한 평면응력(Plane stress) 조건하에서의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho_d \ddot{u} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} = \rho_d \ddot{v} \quad (2)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right\} \quad (3)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} \quad (4)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right\} \quad (5)$$

이 식에서 u 와 v 는 래디얼(radial) 및 접선(tangential)방향의 변위이며, σ_{rr} 과 $\sigma_{\varphi\varphi}$ 는 주응력, $\sigma_{r\varphi}$ 는 전단응력이다. 면내의 작용력의 각 성분은 u 와 v 를 이용, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 N_r &= D \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right\}, \\
 N_\varphi &= D \left\{ \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right\}, \\
 N_{r\varphi} &= N_\varphi = \frac{(1-\nu)D}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \right\}, \quad (6a-c)
 \end{aligned}$$

여기에서 N_r 과 N_φ 는 래디얼 및 접선 방향의 작용력이고 $N_{r\varphi}$ 는 전단력이다. 고유진동수가 ω_q (rad/s)인 래디얼 모드 q 의 경우, 식 (1), (2)는 무차원화하면 다음과 같은 형태로 정리될 수 있다. 여기서 $\{z(\xi)\} = \{\bar{u}_r, \bar{u}_\varphi, \bar{N}_{r\varphi}, \bar{N}_r\}^T$ 와 $[U(\xi)]$ 는 각각 상태 벡터와 계수 행렬이다.

$$\frac{d}{d\xi} \{z(\xi)\} = [U(\xi)] \{z(\xi)\} \quad (7)$$

$$[U(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{v}{\xi} & -\frac{nv}{\xi} & 0 & 1 \\ \frac{n}{\xi} & \frac{1}{\xi} & \frac{2}{1-\nu} & 0 \\ \frac{n(1-\nu^2)}{\xi^2} & \frac{n^2(1-\nu^2)}{\xi^2} - \lambda_q^2 & -\frac{2}{\xi} & \frac{nv}{\xi} \\ \frac{(1-\nu^2)}{\xi^2} - \lambda_q^2 & \frac{n(1-\nu^2)}{\xi^2} & -\frac{n}{\xi} & -\frac{1-\nu}{\xi} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{a}\bar{u} \cos q\varphi, \quad v = \bar{a}\bar{v} \sin q\varphi, \\
 N_r &= D\bar{N}_r \cos q\varphi, \quad N_\varphi = D\bar{N}_\varphi \cos q\varphi, \\
 N_{r\varphi} &= D\bar{N}_{r\varphi} \sin q\varphi, \quad N_\varphi = D\bar{N}_\varphi \sin q\varphi, \\
 \xi &= r/a, \quad \lambda_q = (\rho_d h a^2 \omega_q^2 / D)^{1/2}, \quad D = Eh/(1-\nu^2) \quad (9a-i)
 \end{aligned}$$

식 (8)에는 무차원화된 고유진동수 λ_q 가 도입되었다. 이 식에서 $\xi = r/a$ 와 $\beta = b/a$ 는 각각 임의의 위치 및 내측 래디얼면의 무차원화된 래디얼 좌표이다. 위 식들을 이용하면 다음과 같이 전달행렬 $[T(\xi)]$ 를 정의할 수 있다.

Table 2 Comparison of disk eigensolutions for radial modes

	Non-dimensional frequency $\lambda_q = \omega_q (\rho_d h a^2 / D)^{1/2}$		
	Transfer matrix	Finite element	Experiment
2	0.493	0.498	0.489
3	1.193	1.207	1.185
0	1.296	1.271	1.254

$$\{z(\xi)\} = [T(\xi)] \{z(\beta)\} \quad (10)$$

식 (7)과 (10)을 이용하면 임의의 주파수에서의 전달 행렬은 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 [T(\xi)] &= \exp \left(\int_\beta^\xi [U(\xi')] d\xi' \right) = [I] + \frac{1}{1!} \left[\int_\beta^\xi [U(\xi')] d\xi' \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2!} \left[\int_\beta^\xi [U(\xi')] d\xi' \right]^2 + \dots \quad (11)
 \end{aligned}$$

내, 외측 래디얼 면 ($\xi = \beta$ 및 $\xi = 1$)에서의 경계 조건을 적용하면, 식 (11)에 주어진 전달행렬 $[T(\xi)]$ 는 2×2 행렬로 축소된다. 이 연구에서 고려한 것과 같이 두 면이 자유 경계조건 ($\bar{N}_r = \bar{N}_{r\varphi} = 0$)을 갖는 경우, 참고문헌에 설명된 방법을 이용하면, 식 (10)는 다음 식과 같이 단순화시킬 수 있다.⁽⁴⁾

$$\begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix}_{\xi=\beta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

이 식에서 부분행렬내의 T_{ij} 는 전달 행렬 $[T(\xi)]$ 의 (i, j) 번째 요소이다. 식 (12)로부터 특성방정식 $L(\lambda) = 0$ 를 구할 수 있으며, 면내진동 모드의 고유치 λ_q 는 이를 이용하여 구할 수 있다. Table 2에 전달행렬법을 이용해서 구한 이론적인 고유진동수를 수치

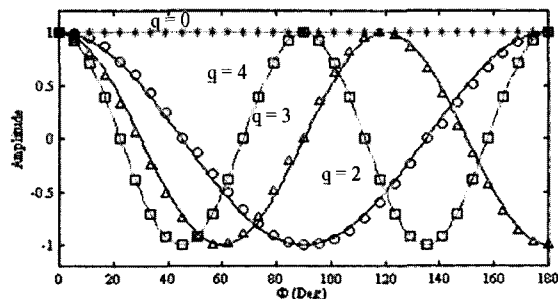


Fig. 2 Comparison of radial mode shapes Key: solid line, analytical solution given by equation (13); discrete point, finite element analysis

Table 3 Experimental modal damping ratios for radial modes

Mode q	Frequency (kHz)	Damping ratio (%)
2	2.86	0.31
3	7.00	0.13
0	7.26	0.13

해석 (유한요소법) 및 실험모드해석에서 구한 값과 비교하였다. 유한요소 해석에서는 6,600개의 절점 및 4,400개의 고체요소로 구성된 모델을 이용하여, 2개의 원주방향(Circumferential) 모드와 6개의 래디얼 모드를 추출하였으며,⁽¹¹⁾ 모드 실험에서는 햄머를 이용하여 가진력 $f(t)$ 를 디스크 중심면, $\varphi = 0^\circ$ 위치에 가하였다.

고유진동수 (ω_q)와 모드 감쇠비 (ζ_q) 등은 주파수 응답 곡선 $\ddot{u}/f(\omega)$ 으로부터 추출하였다. 여기서 \ddot{u} 는 래디얼 방향의 가속도, f 는 가진력이다. 유한요소 해석 및 모드 실험에서 최대주파수는 16 kHz로 하였다. 표에서 보는 바와 같이 세가지 방법으로 구한 결과들이 서로 잘 일치하고 있다. 앞장의 가정을 고려하면, 모드 q 에 의한 내, 외측면에서의 래디얼 방향 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기에서 $|u_{qo}|$ 와 $|u_{qi}|$ 는 변위의 크기, ω_q 는 고유진동수이다.

$$\begin{aligned} u_{qo}(\varphi, t) &= U_{qo}(\varphi)e^{i\omega_q t} = |u_{qo}| \cos(q\varphi)e^{-i\omega_q t} \\ u_{qi}(\varphi, t) &= U_{qi}(\varphi)e^{i\omega_q t} = |u_{qi}| \cos(q\varphi)e^{-i\omega_q t} \end{aligned} \quad (13a-b)$$

Fig. 2에 유한요소법과 이론적인 해를 이용하여 구한 모드를 서로 비교하였다. 모드의 대칭성을 고려하여 $\varphi = 0^\circ$ 부터 $\varphi = 180^\circ$ 까지 구간에서 모드를 표시하였다. 마지막으로 각 모드의 모드 감쇠비는 Table 3에 표시하였다.

4. Acoustic Radiation Model

주파수 ω 로 진동하고 있는 디스크에 의해 수음위치 \vec{r}_p 에 발생하는 음압 $p(\vec{r}_p; t)$ 는 $P(\vec{r}_p)e^{-j\omega t}$ 로

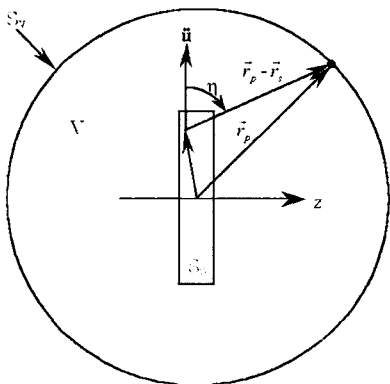


Fig. 3 Spherical sound radiation from a vibrating disk

표현할 수 있으며, 여기서 $P(\vec{r}_p)$ 는 시간에 따른 변동을 포함하지 않은 위치에 따른 음압 분포를 나타내는 항이다. Fig. 3을 참조하면, 음원 위치 \vec{r}_s 에서 면에 수직인 방향의 가속도 $\ddot{U}(\vec{r}_s)$ 를 갖는 진동체에 의해 \vec{r}_p 원격 자유음장에서 발생하는 음압 $P(\vec{r}_p)$ 은 헬름홀쯔 적분식에 의해 다음과 같이 나타낸다.

$$P(\vec{r}_p) = -\int_{S_s} \left(P \frac{\partial g}{\partial \eta} + \rho_0 \ddot{U}(\vec{r}_s) g \right) dS(\vec{r}_s) \quad (14)$$

이 식에서 g 는 자유음장에서의 그린함수이고 ρ_0 와 S_s 는 각각 공기의 비중과 음원의 표면을 나타낸다. 식 (14)의 첫 번째 및 두 번째 항은 각각 \vec{r}_s 에서의 표면압력과 \ddot{u} 에 의해 \vec{r}_p 에 발생하는 음압을 나타낸다. 수음 위치가 음원에서 충분히 멀리 떨어진 ($k|\vec{r}_p| \gg 1$) 경우, 공기 입자 속도는 $P/\rho_0 c_0$ 로 나타낼 수 있다. 여기서 $k = \omega/c_0$ 는 음향 파수(Acoustic wave number)이고, c_0 는 공기중 음속이다. 또한, 동일 위치의 음향 인텐시티는 $I = P^2/2\rho_0 c_0$ 로 정의될 수 있으며 음향파워 $W(\omega)$ 는 원격음장에서 음원을 둘러 싸고 있는 표면의 음향 인텐시티를 적분하여 구할 수 있다. 마지막으로 음향방사저항 $\Re(\omega)$ 는 $W(\omega)$ 와 표면속도 자승치를 시간 및 음원 표면에 대해서 평균한 값 $\langle \dot{u}^2 \rangle_{t,s}$ 을 이용 식 (15)와 같이 구할 수 있다.

$$\Re(\omega) = \frac{W(\omega)}{\langle \dot{u}^2 \rangle_{t,s}} = \sigma(\omega) \rho_0 c_0 A_s \quad (15)$$

이 식에서 $\sigma(\omega)$ 는 음향방사 효율, A_s 는 음원의 표면적이며, $\langle \rangle_{t,s}$ 는 시간 및 면적에 대한 평균을 의미한다.

4.1 Method I: Rayleigh Integral Approach

주파수대역이 고주파(short-wavelength) 영역에 국한되면, 식 (14)는 다음 식과 같이 단순화 되고 이 식은 수치해석적인 방법을 사용하지 않고 풀 수 있다.⁽¹²⁾

$$P(\vec{r}_p) = \frac{\rho_0 c k}{4\pi} \int_{S_s} \frac{e^{ik|\vec{r}_p - \vec{r}_s|} \ddot{U}(\vec{r}_s)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|} (1 + \cos\eta) dS(\vec{r}_s) \quad (16)$$

이 연구에서는 디스크 래디얼 모드들에 의해 발생되는 소음을 배플이 없는 상태를 가정하여 구하였다. 식 (13)에 주어진 모드를 이용하면 두 래디얼 면에 수직인 가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{qo}(\varphi, t) &= \ddot{U}_o(\varphi)e^{-i\omega_q t} = \left| \ddot{u}_{qo} \right| \cos(q\varphi)e^{-i\omega_q t} \\ &= -\omega_q^2 \left| u_{qo} \right| \cos(q\varphi)e^{-i\omega_q t} \\ \ddot{u}_{qt}(\varphi, t) &= \ddot{U}_t(\varphi)e^{-i\omega_q t} = \left| \ddot{u}_{qt} \right| \cos(q\varphi)e^{-i\omega_q t} \\ &= -\omega_q^2 \left| u_{qt} \right| \cos(q\varphi)e^{-i\omega_q t} \end{aligned} \quad (17)$$

음원 표면을 일정한 가속도(\ddot{u}_q)를 갖는 미세요소 (dS)로 분할하면 전체 음원에서 발생되는 $P(\vec{r}_p)$ 는 식 (16)을 이용하여 간단히 구할 수 있다 (Fig.4 참조). 수음위치 \vec{r}_p 에서의 전체 음압 P 는 각 요소에서 발생하는 음압을 음원 표면 전체에 대해 적분하여 구할 수 있으며, 이 연구에서는 수치적분을 이용하여 음압을 계산하였다. 원격 음장에서의 음압분포를 구하기 위하여 디스크 주위에 동일한 중심점을 갖는 구면체를 정의하고 표면에 동일한 각 증분치(angular increment)를 갖는 격자를 생성한 다음 각 절점에서 식 (16)을 이용하여 음압을 계산하였다. 이와 같이 계산된 원격 음장내의 음압분포를 이용하여 각 모드에 대한 음향지향성 함수를 정의하였다. 구면형 음향방사의 경우, 모드 q 에 의한 지향성함수 $D_q(\theta, \phi)$ 는 원격 음압 분포 $P_q(\vec{r}_p)$ 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다. 이 식에서 $R=|\vec{r}_p|$ 는 수음위치가 정의된

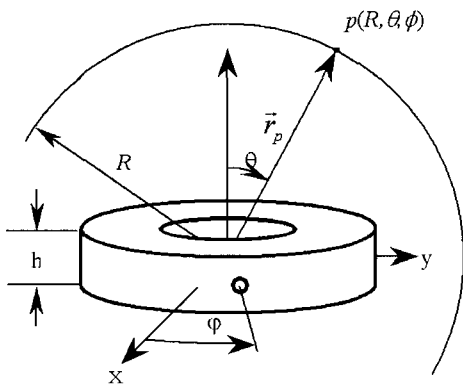


Fig. 4 Sound Radiation from the radial vibration of a thick annular disk in spherical coordinate system

구면체의 반지름이다.

$$P_q(R, \theta, \phi) = \frac{e^{ik_p R}}{R} D_q(\theta, \phi) \quad (18)$$

원격음장 조건을 가정하면 모드 q 에 의한 음향과 위 W_q 는 앞에서 언급한 구면체 표면의 음압을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다. 이 식에서 θ 와 ϕ 는 구면 좌표계상 위치를 정의하는 두 각이다.

$$W_q = \langle I_{sq} S \rangle_s = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P_q^2}{\rho_0 c_0} R^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (19)$$

동일 모드의 방사저항 q 는 식 (15)을 이용하여 구할 수 있으며, 이때 $\langle \dot{u}^2 \rangle_{t,s}$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\langle \dot{u}_q \rangle_{t,s}^2 = \frac{1}{4\pi h(a+b)} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi(a+b)} \dot{U}_q^2 dl dz \quad (20)$$

또, 동일 모드에 대한 방사효율 q 는 다음과 같다.

$$\sigma_q = \frac{\Re q}{2\rho_0 c_0 \pi h(a+b)} \quad (21)$$

4.2 Method II: Cylindrical Radiator

이 방법에서는 내측 및 외측 래디얼 면을 유한한 원통형 음원으로 취급하여 음향방사를 구하였다. 원통형 음원으로부터의 음향방사는 몇몇 학자들에 의해 연구되어 왔다.^(12,14-16) Junger와 Feit⁽¹²⁾는 임의의 표면 속도 분포를 갖는 유한 또는 무한한 원통형 음원에서 발생하는 음압을 계산하는 식을 유도하였다. 또 Williams⁽¹¹⁾는 동일한 문제를 2차원 푸리에 변환을 이용하여 접근하였다. Wang과 Lai⁽¹⁵⁾는 유한한 길이를 가진 원통형 판의 모드 평균 방사효율을 계산하였다. 마지막으로 Sandman⁽¹⁶⁾은 유한한 길이를 가진 원통형 판으로부터의 소음 방사를 연구하여 원통형 배플이 음향방사에 거의 영향을 미치지 않음을 발견, 이 문제를 배플이 있는 형태로 가정하여 충분히 정확한 근사해를 구할 수 있다고 결론지었다. 이 연구에서는 Junger와 Feit⁽¹²⁾의 방법에 Sandman⁽¹⁶⁾의 근사해법을 결합하여 원격음장내의 음압을 구하였다.

길이가 h 인 원통형 음원 표면이 z 방향으로는 $Z(z)$

이고 ϕ 방향으로의 조화함수($\cos n \phi$)인 가속도 분포를 갖는 경우, 시간에 따른 변동을 제외한 표면 가속도 분포는 원통좌표계를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{U}(z, \phi) = |\ddot{u}| Z(z) \cos n \phi \quad (22)$$

원통좌표계로 표시된 헬름홀츠 방정식에 z 방향으로 푸리에 변환을 적용하고 경계조건을 이용하여 방정식을 풀 다음 구면좌표계로 전환하면 식 (23)과 같은 근사해를 구할 수 있다.⁽¹²⁾

$$P(R, \theta, \phi) = \frac{\rho_0 e^{ikR}}{\pi k R \sin \theta} |\ddot{u}| \frac{\tilde{Z}(k_z)(-i)^{n+1}}{H_n(k_r \sin \theta)} \cos n \phi$$

$$\tilde{Z}(k_z) = \int_{-h/2}^{h/2} Z(z) e^{-ik_z z} dz \quad (23a, b)$$

표면 가속도가 식 (18)로 주어지는 후판 환형 디스크의 경우, $Z(z)$ 는 식 (24)에 주어진 것과 같은 사각펄스 함수(rectangular function)로 나타낼 수 있으며, 그 푸리에 변환은 식 (25)과 같이 나타낸다.

$$Z(z) = 1, \quad |z| < h/2$$

$$= 0, \quad |z| > h/2 \quad (24)$$

$$\tilde{Z}(k_z) = \mathfrak{F}\{Z(z)\} = 2 \frac{\sin(k_z h/2)}{k_z}$$

$$= h \frac{\sin(k_z h/2)}{k_z h/2} = h \text{Sinc}(k_z h/2) \quad (25)$$

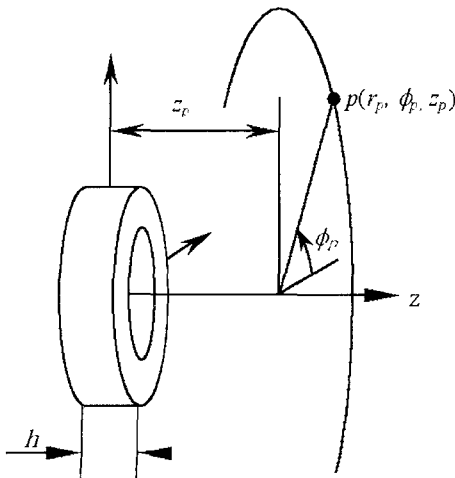


Fig. 5 Cylindrical radiator of length h in cylindrical coordinate system

이 식에서 Sinc는 $\text{Sinc}(x) = \sin(x)/x$ 로 정의되는 함수를 나타낸다. 식 (23) 및 (25)를 이용하여 외측 래디얼 면에서 발생하는 음압 P_{q0} 및 내측 면에서 발생하는 음압 P_{q1} 는 식 (26a, b)와 같이 구할 수 있으며 전체 음압은 둘의 합으로 표현된다.

$$P_{q0}(R, \theta, \phi) = \frac{\rho_0 e^{ikR}}{\pi k_q R \sin \theta} |\ddot{u}_{q0}| h \times \frac{\text{Sinc}(k_q \sin \theta h/2)(-i)^{n+1}}{H_q^1(k_q a \sin \theta)} \cos q \phi \quad (26a)$$

$$P_{q1}(R, \theta, \phi) = \frac{\rho_0 e^{ikR}}{\pi k_q R \sin \theta} |\ddot{u}_{q1}| h \times \frac{\text{Sinc}(k_q \sin \theta h/2)(-i)^{n+1}}{H_q^2(k_q b \sin \theta)} \cos q \phi \quad (26b)$$

$$P_q(R, \theta, \phi) = P_{q1}(R, \theta, \phi) + P_{q0}(R, \theta, \phi) \quad (26c)$$

기타 모드 방사특성(W_q , \mathfrak{R}_q 및 σ_q)들은 전체 음압분포로부터 식 (15), (19) 및 (21)를 이용하여 구할 수 있다.

5. Modal Radiation Results

Fig. 1과 Table 1에 설명된 샘플 디스크의 고유 진동에 의한 음향방사 특성(지향성 함수 $D_q(\theta, \phi)$, W_q , 및 σ_q)을 앞에서 소개된 이론적인 해법을 이용하여 구하였다. 또한, 같은 특성을 비연성(uncoupled), 직접적(direct), 외부방사(exterior), 무배플(unbaffled) 조건을 가정한 경계요소해석을 이용하여 계산하였다.⁽¹⁷⁾ 이 해석에는 3장의 유한요소 모델을 음원으로 이용하였는데, 이 모델은 8 kHz 이하 영역에서는 파장당 6개 이상의 요소가 존재해야 하는 경계요소법의 요구 조건을 만족하고 있다. 또한 수음위치는 디스크와 동일한 중심을 갖는 구면상에 6,146개의 절점을 이용하여 정의하였다. 이 경계요소 모델의 입력은 3장에서 설명한 진동해석을 통해 계산된 디스크의 두 래디얼 면의 속도를 이용하였다. 이론적인 해법과 수치해석의 결과는 Fig. 6에서 설명한 것과 같은 구조-음향 실험 측정치와 비교, 검증하였다. 실험에서는 임펄스 햄머(impulse hammer, PCB GK291C)로 디스크를 중심면에서 래디얼 방향으로 가진하면서 6 mm 마이

크로폰(MTS 130P10와 MTS L130C10)을 이용하여 원격 음압을 측정하였다. 측정 위치는 디스크와 동일한 중심을 갖는 반지름 303mm의 구면과 $\varphi=0^\circ$ 및 $\theta=90^\circ$ 두 평면이 만나는 두 원상에서 등간격으로 설정하였다. 여기서 사용된 구면의 크기 및 위치는 경계

요소법에서 사용된 구면과 동일하게 정의하여 결과를 서로 비교할 수 있도록 하였다. 디스크와 음압분포의 대칭성을 고려하여, $\varphi=0^\circ$ 평면에서는 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 구간에서 2.5° 간격으로 측정하였으며, $\theta=90^\circ$ 평면상에서는 $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ 구간에서 5° 간격으로 측정하였다. 가진력 및 음압 신호는 2-채널 신호분석기(HP 35670A)를 이용하여 8 Hz 분해능으로 분석함으로써 $P/f(\omega)$ 스펙트럼을 구하였다. 구면상의 미리 정의된 위치에서 측정된 $P/f(\omega)$ 로부터 모드 q 의 고유진동수 ω_q 에 해당하는 값을 추출하여 해당 모드에 의한 실험적인 원격 음압분포 $P_q(\theta, \phi)$ 를 구하였으며 이를 바탕으로 구면 S_v 상의 $D_q(\theta, \phi)$ 를 계산하였다.

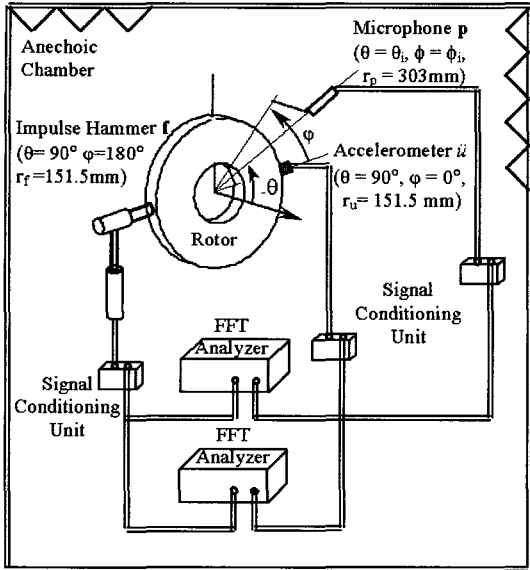


Fig. 6 Vibro-acoustic experiment used to measure $\ddot{u}/f(\omega)$ and $P/f(\omega)$ frequency response functions

Table 4에는 $q=2$ 및 $q=3$ 두 모드에 대해 이론적으로 구한 $D_q(\theta, \phi)$ 를 수치해석 및 측정 결과와 서로 비교하였다. Table 5에는 처음 두 모드에 대해 이론적으로 계산한 W_q 및 σ_q 를 수치해석 및 실험 결과와 비교하였다. 실험치의 경우, W_q 및 σ_q 를 구하기 위한 S_v 상의 P_q 분포는 측정된 $P_q(\theta, 0)$ 를 이용하여 예측하였다. 이 과정에서 $P_q(\theta, \phi)$ 는 ϕ 방향으로 완전한 조화(sine) 함수 분포를 갖는다고 가정하였다. Table 5에서 보는 바와 같이 이론적인 해를 통해 구한 결과가 수치해석 및 실험 결과와 잘 일치하며, W_q 는 1dB, σ_q 는 2dB 이하의 오차를 보인다.

Table 4 Comparison of directivity patterns for selected modes

	q = 2 Mode	q = 3 Mode
Structural mode		
Analytical method (sinc)		
Measured		
Computed using BEM		

이 과정에서 $P_q(\theta, \phi)$ 는 ϕ 방향으로 완전한 조화(Sine) 함수 분포를 갖는다고 가정하였다. Table 5에서 보는 바와 같이 이론적인 해를 통해 구한 결과가 수치해석 및 실험 결과와 잘 일치하며, W_q 는 1dB, σ_q 는 2dB 이하의 오차를 보인다. 이들 결과로부터

Table 5 Modal acoustic power and radiation efficiency levels

W_q , dB re 1 pW				
Mode q	Measured	Computed using BEM	Analytical methods	
			Rayleigh integral	Cylindrical radiator
2	66.5	66.5	66.8	66.0
3	68.2	67.5	67.2	67.5

σ_q , dB re 1				
Mode q	Measured	Computed using BEM	Analytical methods	
			Rayleigh integral	Cylindrical radiator
2	-2.9	-4.0	-2.3	-4.0
3	-0.5	-1.0	-2.2	-2.0

앞장에서 제시된 이론적 해법들이 후판 환형 디스크의 래디얼 모드에 의한 음향 방사를 상당히 정확하게 예측함을 알 수 있다.

6. 결 론

이 논문은 환형 후판 디스크의 래디얼 모드에 의한 소음 방사에 대한 새로운 이론적 해를 제시하였다. 디스크 표면의 산란에 의한 영향을 무시할 수 있다는 가정하에 두 종류의 간단한 계산 방법을 제안하였다. 또한, 이들 방법에 의해 계산된 음향방사 특성을 유한요소법 및 경계요소법을 이용한 수치해석 결과 및 실험에 의한 측정치와 비교 검토한 결과, 두 방법 모두 충분한 정확도를 가진 것으로 확인 되었다. 이들 방법을 이용하면 래디얼 방향으로 작용하는 임의의 가진력에 의한 디스크의 음향방사를 모드 중첩법을 이용하여 이론적으로 계산할 수 있다. 아울러, 이 논문에서 제안된 래디얼 모드에 대한 이론과 여타 모드(원주방향 모드 및 굽힘 모드)에 의한 음향방사에 대한 이론적인 해와 서로간의 상호작용에 대한 이론을 종합하면 임의의 가진에 의한 환형 후판 디스크의 방사소음을 효율적으로 계산할 수 있다. 또한 일반적인 경계조건과 디스크 내의 구조적인 결함을 이론적인 해에 포함시키면 브레이크 스퀸(Squeal)과 같은 현실적인 문제에 대한 접근도 가능할 것으로 판단된다.

후 기

This project has been supported by the Center for Automotive Research Industrial Consortium over the 1999~2004 period.

참 고 문 헌

- (1) Bhuta, P. G. and Jones, J. P., 1971, "Symmetric Planar Vibrations of a Rotating Disk." *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 35, No. 7, 982~989.
- (2) Burdess, S., Wren, T. and Fawcett, J. N., 1987, "Plane Stress Vibration in Rotating Discs." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 201, 37~44.
- (3) Chen, J. S. and Jhu, J. L., 1996, "On the In-plane Vibration and Stability of a Spinning Annular Disk." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, No. 4, 585~593.
- (4) Irie, T., Yamada, G. and Muramoto, Y., 1984, "Natural Frequencies of In-plane Vibration of Annular Plates." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 1, 1711~175.
- (5) Thompson, W. JR., 1971, "The Computation of Self- and Mutual-radiation Impedances for Annular and Elliptical Pistons Using Bouwkamp Integral." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 17, No. 2, 221~233.
- (6) Lee, M. R. and Singh, R., 1994, "Analytical Formulation for Annular Disk Sound Radiation Using Structural Modes." *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 95, No. 6, 3311~3323.
- (7) Levine, H. and Leppington, F. G., 1988, "A Note on the Acoustic Power Output of a Circular Plate." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121, No. 5, 269~275.
- (8) Rdzanek, W. P. Jr. and Engel, Z., 2000, "Asymptotic Formula for the Acoustic Power Output of a Clamped Annular Plate." *Applied Acoustics*, Vol. 60, No. 5, 29~43.
- (9) Wodtke, H. W. and Lamancusa, J. S., 1998, "Sound Power Minimization of Circular Plates Through Damping Layer Placement." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 5, 1145~1163.
- (10) Tzou, K. I., Wickert, J. A. and Akay, A., 1998, "In-plane Vibration Modes of Arbitrary Thick Disks." *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 120, 384~391.
- (11) SDRG, 2000, I-DEAS User's Manual Version 8.2, USA
- (12) Junger, M. C. and Feit, D., 1985, *Sound, Structures, and Their Interactions*, MIT Press, New York.
- (13) Wallace, C. E., 1970, "Radiation Resistance of a Rectangular Panel." *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 51, No. 3, 946~952.

- (14) Williams, E. G., 1999, Fourier Acoustics, Academic Press, San Diego. 431~447.
- (15) Wang, C. and Lai, J. C. S., 2000, "The Sound Radiation Efficiency of Finite Length Acoustically Thick Circular Cylindrical Shell Under Mechanical Excitation I: Theoretical Analysis." Journal of Sound and Vibration, Vol.232, No.2.
- (16) Sandman, B. E., 1976, "Fluid Loading Influence Coefficients for a Finite Cylindrical Shell," J. Acoust. Soc. Am. Vol.60, No.6, 1256~1264.
- (17) NIT, 1999, SYSNOISE User's Manual V. 5.4, Belgium.