
연속 웨이브렛 역변환의 특성 및 멀티 बैं크 시스템

김태형* · 윤동한**

Characteristic of Inverse wavelet transform and Multi bank system

Tae-hyung Kim* · Dong-han Yoon**

요 약

이 논문은 신호 $f(t)$ 의 실제적인 스케일 정보를 나타내는 웨이브렛 플랜을 중심으로 연속 웨이브렛 역변환의 특성에 대하여 논하였다. 웨이브렛 변환에 비해 역변환의 적용이 상대적으로 미비한 이유는 수치적인 연산의 복잡성에 기인한 것이며, 이 논문은 웨이브렛 역변환의 안정된 복원을 위한 방법에 대하여 연구하였다. 웨이브렛 역변환의 안정적인 구현은 신호 $f(t)$ 에 대한 실제적인 스케일 정보를 지니고 있는 웨이브렛 플랜이라는 새로운 "시간-스케일" 공간을 통하여 실현하였으며, 이는 완전한 멀티 필터 बैं크 시스템과 동일한 특성을 나타낸다. 즉 연속 웨이브렛 변환을 통해 신호 $f(t)$ 의 모든 스케일 성분을 독립적으로 주파수 전체 대역에 걸쳐 분산하고 다시 역변환을 통해 원래의 신호를 복원하는 과정은 필터 बैं크이론의 분석과 합성과정과 일치한다. 이 논문에서는 연속 웨이브렛 역변환을 이용하여 "시간-스케일" 필터를 통한 신호 $f(t)$ 의 스케일 분해와 웨이브렛 멀티 필터 बैं크이론에 대하여 논하였다.

ABSTRACT

This paper is contribute to Inverse continuous wavelets transform(ICWT) which permits to determine real "time-scale" plan. The application of ICWT is not yet represented because of the numerical difficulty. If the signal can be reconstructed stably by ICWT, the multi scale filter bank system which composed by analysis and synthesis process can be designed. In this work, we represent the ICWT which leads to nearly perfect reconstruction of signal and the multi-scale filter bank system.

키워드

Wavelet plan, Multi bank System, Inverse Continuous Wavelet Transform(ICWT)

1. 서 론

웨이브렛 변환이 체계를 갖추고 여러 분야에서 주목을 받게 된 직접적인 계기는 웨이브렛 역변환

을 통한 신호의 복원이 가능하다는 것이 프랑스의 수학자 Grossmann과 웨이브렛 이론을 처음 제시한 Morlet에 의해 수학적으로 증명되고 나서부터이다.

*금오공과대학교 전자공학부 대학원

접수일자 2005. 1. 4

**금오공과대학교 전자공학부 교수

웨이브렛 역변환(Inverse Wavelet Transform: IWT)은 함수 $f(x)$ 와 $\psi_{b,a}(x)$ 가 $L^2(\mathbb{R})$ 에 속하고, 제곱적분이 가능하며, 압축계수 a 와 전이계수 b 가 실수일 경우, 웨이브렛 $\psi_{b,a}(t) = (1/a)\psi((t-b)/a)$ 가 주어질 때, 연속 웨이브렛 역변환 및 허용조건은 다음과 같이 정의 된다[1].

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{b,a}^f(t) \psi_{b,a}(t) db \frac{da}{a^2} \tag{1}$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \tag{2}$$

듀얼(dual) 웨이브렛을 식(3)과 같이 정의할 때 위의 식은 식(4)와 같이 정의된다[2].

$$\tilde{\psi}_{b,a}(t) = \psi_{b,a}(t) / \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi(2^j \omega)|^2 \tag{3}$$

$$f(t) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{b,2^j}^f(t) \frac{1}{a} \tilde{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) db \tag{4}$$

$t = b$ 인 경우 시간에서의 컨볼루션(convolution)은 다음과 같이 표현된다.

$$f(t) = \sum_a \left[f(t) \otimes \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \right] \otimes \frac{1}{a} \tilde{\psi}\left(\frac{t}{a}\right) \tag{5}$$

$$= \sum_a W_{b,a}^f(t)^{-1}$$

따라서 주파수상에서는 내적(product)은 다음과 같이 정의 된다

$$f(t) = FFT^{-1} \left[F(w) \cdot \psi(aw) \cdot \tilde{\psi}(aw) \right] \tag{6}$$

연속 웨이브렛 역변환은 푸리에 역변환과 달리 까다로운 복원 과정을 거친다. 먼저 웨이브렛 역변환의 허용가능 조건을 만족하기 위해 신호의 주파수가 영(zero)인 부근에서의 스펙트럼은 존재하지 않거나 미세해야 한다. 즉 웨이브렛은 대역 필터의 특성을 지니고 있고 주파수가 영인 지점에서 허용가능 조건에 의해 $\psi(w) = 0$ 인 조건을 반드시 만족해야 한다. 따라서 주파수가 영에 근접한 부근에서의 웨이브렛 역변환의 해상도는 약화되어 신호 $f(t)$ 의 주파수가 영에서 큰 에너지를 형성하고 있을 경우 역변환의 복원에서 어려움이 나타난다. 신

호 복원의 정확도를 나타내기 위하여 신호 $f(t)$ 와 복원 신호 $f_r(t)$ 의 신호 대 잡음비(Signal-Noise Ratio)를 이용하여 두 신호의 상관성을 표현한다. 여기서는 신호대 잡음비는 다음과 같이 분산 σ^2 을 이용하여 정의하였다.

$$S/N = 20 \log_{10} (\sigma_{signal}^2 / \sigma_{reconstruction}^2) \tag{7}$$

II. 본 론

1. 웨이브렛 및 압축계수의 이분구간 샘플링

웨이브렛의 역변환을 이용한 신호의 복원의 안정성은 전적으로 웨이브렛의 허용가능 조건에 의해 결정된다. 식(8)에 의한 역변환 시 웨이브렛을 시간상에서 스케일을 조정하고 이를 푸리에 변환할 경우 고주파 영역 즉, 스케일이 작은 영역에서의 웨이브렛 허용가능조건이 만족되지 않는다. 따라서 다음과 같이 방법으로 웨이브렛 역변환을 연산한다.

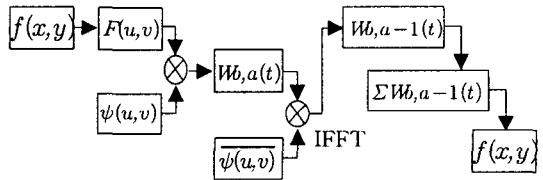


그림.1 연속 웨이브렛 역변환 블록선도
Fig.1. Block diagram of ICWT

즉, 주파수 공간에서 완전한 허용가능조건을 형성하는 웨이브렛을 이용하여 위 블록선도와 같이 주파수 공간에서 연산을 한 후 신호를 복원한다. 위의 조건을 만족하는 주파수 공간에서 사용할 수 있는 대표적인 웨이브렛은 Marr 웨이브렛이 있으며, 1차원 웨이브렛의 스펙트럼은 다음과 같이 정의된다[3].

$$\psi_{b,a}(u) = \frac{-1}{\sqrt{\pi i u}} (j|u^2|)^m \exp(-|u^2|^2/2) \tag{8}$$

그림2는 웨이브렛의 팽창에 따른 Marr 웨이브렛의 스펙트럼을 나타낸 것이다. Marr 웨이브렛은 1차원 주파수 공간에서 안정된 허용가능 조건을 지니고 있으며 스펙트럼의 대역폭을 조정할 수 있

기 때문에 "시간-스케일" 공간의 가시성을 높일 수 있다. 웨이블릿 역변환은 허용 가능

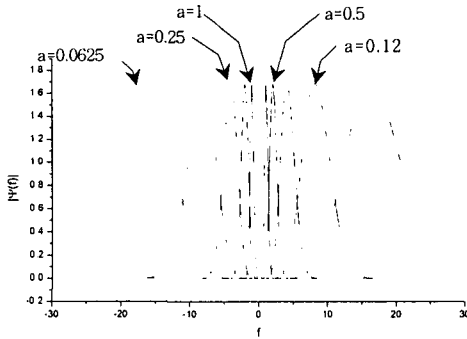


그림 2. Marr 웨이블릿의 스펙트럼
Fig.2 Marr wavelet Spectrum
(N=1000, dt=0.02, a=1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625 from center to right-peak)

조건이외에 웨이블릿 압축계수 a의 샘플링에도 민감한 영향을 받는다. 일반적으로 이분구간(dyadic) 샘플링을 사용할 경우에는 웨이블릿 연산 지점의 급격한 감소로 "시간-스케일" 공간에서 효과적으로 신호의 특성을 분석할 수 없다. 따라서 다음과 같이 이분구간 사이에 이분구간을 첨가한 세분화된 이분구간 샘플링 방법을 사용한다. 이 방법은 다음과 같이 정의되며, 세분화된 이분구간 샘플링이라고 한다.

$$a = 2^{j\alpha^*} \tag{9}$$

웨이블릿 압축계수 a는 $[a_{max}, a_{min}]$ 으로 주어지고 이 영역에서 다음과 같은 방법으로 스케일을 변화시킨다.

$$a_{min} = 2^{j\alpha^*} a_{max}, \quad \alpha^* = \frac{1}{j} \log_2 \left(\frac{a_{min}}{a_{max}} \right) \tag{10}$$

그림3은 식(9)에 의한 웨이블릿 압축계수의 샘플링을 나타낸 것이다. 푸리에 변환과 가버(Gabor) 변환 등 "시간-주파수" 변환이 주파수 공간에서 선형적인 반면, 웨이블릿 변환의 경우 그림3과 같이 스케일 계수가 로그의 형태를 띠고 있다. 따라서 웨이블릿 변환의 "시간-스케일" 공간에서 스케일 축은 항상 로그로 표현된다.

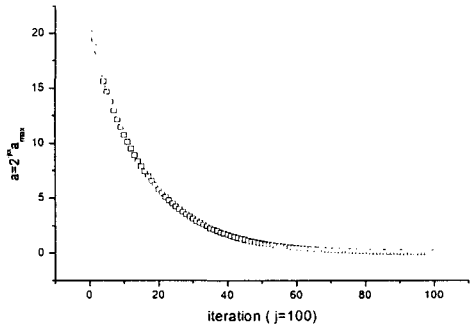
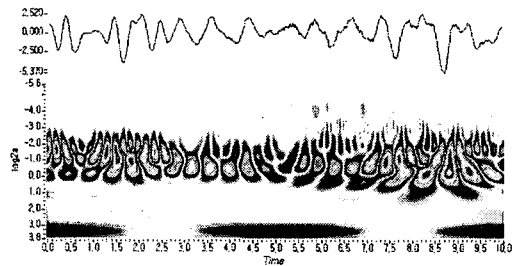


그림 3. 세분화된 샘플링 스케일
Fig.3. Sampling Scale of Fine scale
(N=1024, j=100, $a_{max} = 20$, $a_{min} = 0.02$)

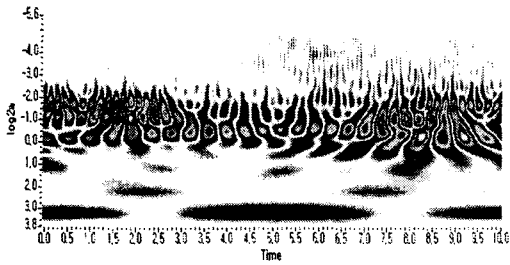
2. 웨이블릿 역변환 및 "시간-스케일" 필터

웨이블릿 변환은 절대 값으로 구성되어 있는 웨이블릿 모듈(modulus)을 이용하여 신호의 스케일 특성을 표현한다. 반면 본 논문에서는 웨이블릿 역변환을 이용하여 구해지는, 신호 $f(t)$ 의 스케일 분리공간인 웨이블릿 플랜(Wavelet Plan)으로 정의한 공간을 이용하여 신호를 복원한다. 다음그림은 그림4(a)의 상위에 나타낸 임의의 신호에 대하여 그림1의 블록선도와 같이 Marr웨이블릿을 이용한 웨이블릿 변환 결과를 나타낸 것이다.

웨이블릿 역변환을 통해 그림4의 (b)는 웨이블릿 플랜으로 정의된 "시간-스케일" 공간이 구해지며, 이 정보를 스케일 축으로 모두 합하면 신호가 복원된다. 즉 웨이블릿 플랜은 신호 $f(t)$ 의 실제 형상과 스케일 정보를 지닌 공간이며 이를 통해 신호의 부분적인 스케일 성분에 대한 분석이 가능하다.



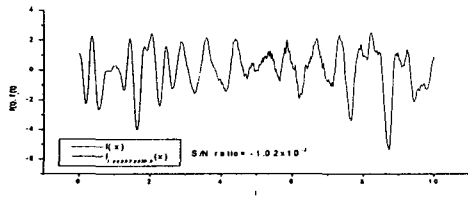
(a) CWT결과 [(모듈러스) 스칼로그램]



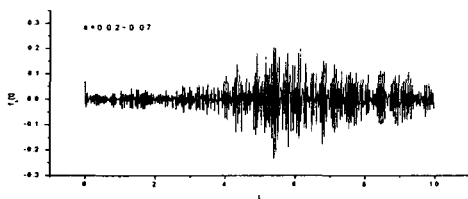
(b) ICWT 결과 (웨이브렛 플랜, "시간-스케일" 필터)

그림 4. 멀티 스케일 신호의 웨이브렛 역변환 결과
Fig.4. Result to ICWT for Multi-Scale Signal

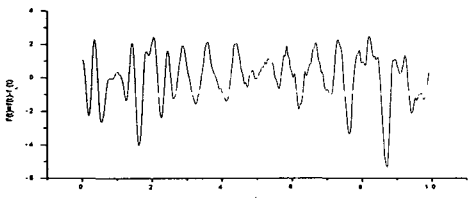
웨이브렛 플랜 상에 "시간-스케일" 필터를 적용함으로써 "시간-스케일"의 부분적인 정보를 추출할 수 있다. 그림 5는 웨이브렛 플랜으로부터 복원한 복원 신호 및 "시간 스케일" 필터를 적용한 신호를 나타낸 것이다.



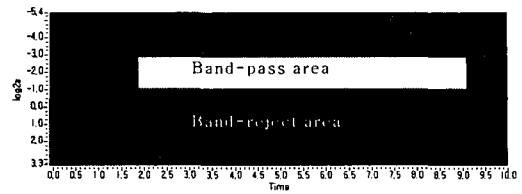
(a) 신호 $f(t)$ 와 복원신호 $f_r(t)$ (S/N ratio= -1.02×10^{-3})



(b) "시간-스케일" 필터를 이용한 고주파 성분 추출



(c) 고주파 성분 추출 결과 (잡음제거)

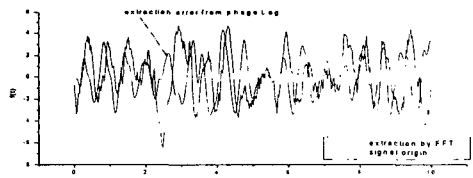


(d) 시간-스케일 필터

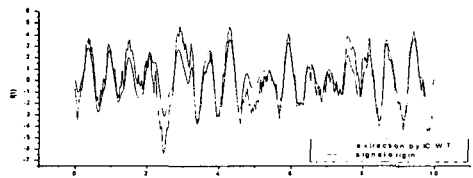
그림.5 복원 신호, 고주파 성분 추출 및 필터

Fig.5 Reconstruction signal, extract high Frequency and filter.

위의 결과 웨이브렛 역변환을 이용한 신호의 복원은 매우 안정적이다. 따라서 "시간-스케일" 필터를 통해 신호의 스케일 성분을 추출할 수 있으며, 푸리에 공간에서 발생하는 위상지연에 의한 신호의 왜곡현상이 발생하지 않는다. 또한 푸리에 공간에서의 특이점(singularity)나 노이즈에 의한 성분간의 중첩을 최소화하여 푸리에 변환에 비해 상대적으로 정확한 대역 성분을 추출할 수 있다. 다음 그림은 특정영역에 대하여 푸리에 변환을 이용한 필터 특성과 웨이브렛 역변환을 이용한 필터 특성을 비교한 것이다.



(a) FFT에 의한 추출(BPF $a = 0.18 \sim 0.28$)



(b) ICWT에 의한 추출(BPF $a = 0.18 \sim 0.28$)

그림 6. 푸리에 및 웨이브렛 변환의 "시간-스케일" 대역 필터 특성

Fig.6. Characteristic of Fourier and "Time-Scale" Band Pass Filter(BPF) for ICWT

그림 6(a)는 푸리에 변환을 이용한 대역필터 결과를 원래의 신호와 중첩하여 표현한 것이다. 그림에서와 같이 필터링 결과는 신호의 왜곡현상을 나타내며, 이는 위상의 지연현상에 따른 것이다. 반면에 "시간-스케일" 필터는 전체적으로 푸리에 변환에 비해 안정된 대역 성분을 추출한다.

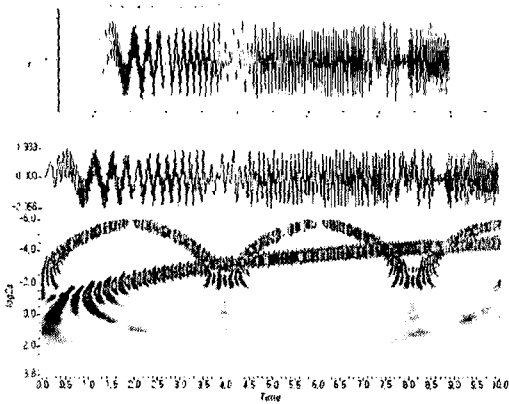


그림.7 비정상 신호와 웨이브렛 역변환
Fig.7 Non-stationary signal and ICWT

그림 7은 비정상 신호에 대한 웨이브렛 변환의 결과를 나타내었다. 신호대잡음비는 5.23×10^{-3} 로 비교적 작은 값을 보였다.

3. 연속 웨이브렛 역변환을 이용한 멀티 필터 बैं크 시스템

웨이브렛 플랜을 구성하고 있는 신호의 집합 $f(a_i), (i=1, 2n-1)$ 는 주파수 대역이 서로 다르며, 신호의 복원은 스케일 축으로 합함으로써 이루어진다.

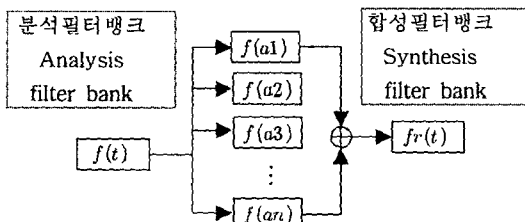
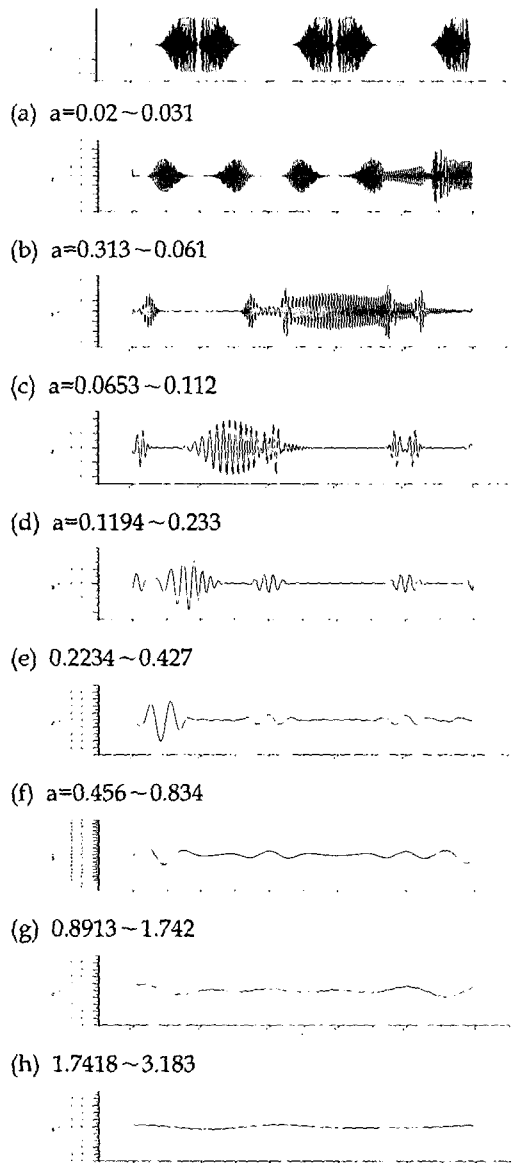


그림.8 ICWT을 이용한 멀티 필터 बैं크 시스템
Fig.8. Multi-Bank System using ICWT

따라서 신호 $f(a_i)$ 는 웨이브렛 변환을 통해 신호를 각각 다른 주파수 대역으로 분산한 결과를 나타내

게 되는데 이는 필터 बैं크 이론의 분석(analysis)과정에 해당한다. 또한 신호 복원 과정 $f(t) = \sum f(a_i)$ 은 필터 बैं크 이론의 합성(synthesis)과정에 해당한다[4]. 이 과정은 다음과 같이 그림과 같이 표현된다. 즉 웨이브렛 변환을 통해 웨이브렛 플랜으로 사영되는 과정이 분석 필터 बैं크이며, 역변환을 통해 신호가 복원되는 과정이 합성 필터를 의미한다. 다음 그림9는 그림7의 비정상 신호의 역변환으로부터 추출된 신호를 나타낸 것이다.



(i) $a=3.40 \sim 6.221$



(j) $a=6.651 \sim 13$

그림.9 웨이브렛 분해신호
Fig.9. Wavelet analyze signal

위 신호를 모두 합하면 원래의 신호가 복원되며 따라서 그림 9는 웨이브렛 역변환에 의해 서로 다른 주파수 대역으로 분리된 분석 신호들을 의미한다.

4. 웨이브렛 역변환을 이용한 잡음제거 (DeNoising) 및 "시간-스케일" 필터의 적용

연속 웨이브렛 역변환을 이용한 신호의 복원이 거의 완벽하며, 따라서 연속 웨이브렛 역변환은 잡음제거, 음성 신호 분석 등의 기존의 필터뱅크 이론에 적용된 다양한 신호처리 분야와 접목이 가능하다. 대표적인 경우로 잡음제거의 경우 기존의 이산 웨이브렛 변환을 이용한 방법은 서로 직교를 이루는 두 쌍대 필터를 이용하여 신호를 근사계수 (approximation coefficient) 및 상세계수 (detail coefficient)로 사용하고, 상세계수에 축소 (shrinkage)를 적용하여 상대적으로 낮은 계수를 영으로 처리하는 방법으로 노이즈 제거에 있어서는 매우 효과적인 방법이다[5].

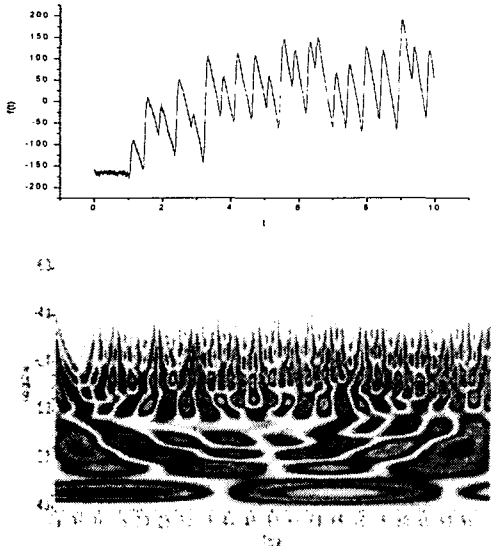
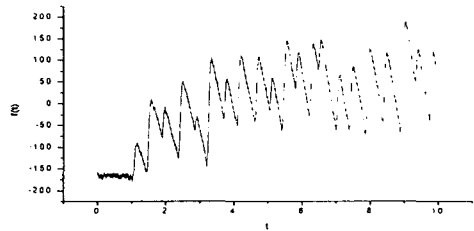


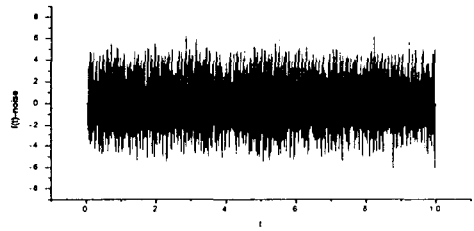
그림.10 안구의 움직임을 측정 한 신호
Fig.10. Measured signal to movement of eyeball.

연속 웨이브렛 역변환의 경우 역시 이와 같은 방법으로 웨이브렛 플랜상의 스케일이 적은 영역에서 직접적으로 적용될 수 있다. 다음 그림은 안구의 움직임을 측정한 신호의 웨이브렛 플랜을 나타낸 것이다. 일반적인 생체신호의 경우 노이즈의 간섭을 많이 받는다. 특히 안구신호의 경우 삼각파 형에 미세한 노이즈가 첨가된 형태를 나타내며, 신호의 특이점에 의해 푸리에 공간에서의 안정된 잡음제거는 불가능하다.

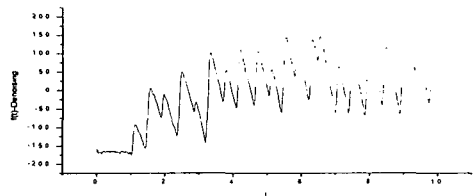
다음 그림은 연속 웨이브렛 역변환을 이용한 잡음제거를 나타낸 것이다.



(a) 복원 신호 (S/N ratio= 2.43×10^{-4})



(b) 웨이브렛 플랜으로부터 추출한 노이즈



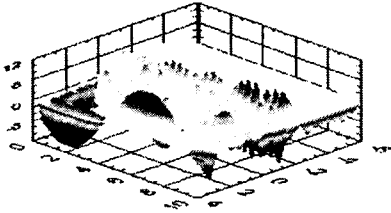
(c) 잡음 제거된 신호

그림.11 안구신호에 대한 잡음제거
Fig.11. DeNoising for eyeball signal

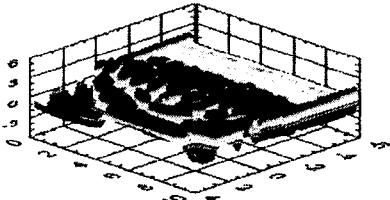
그림 11의 결과와 같이 특이점을 가진 신호의 경우에도 노이즈의 제거는 매우 안정적인 결과를 보였다. 이는 특이점의 정보가 푸리에 변환과는 달리 "시간-스케일" 공간에서 스케일 축으로 분산되기 때문에 특이점이 다른 시간 정보에 영향을 미치지

지 않기 때문이다.

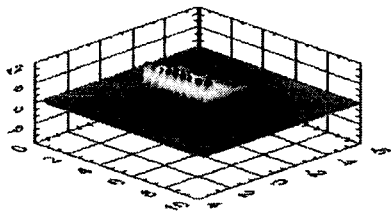
다음 그림은 안구 신호에 대한 웨이블릿 플랜에 적용한 "시간-스케일" 필터를 적용한 결과를 나타낸 것이다. 웨이블릿 플랜 상에서의 사용한 필터는 신호의 부분적인 스케일 정보를 추출하는 필터와 웨이블릿 플랜 상에서의 최대 값과 최소 값을 기준으로 shrinkage를 적용한 필터를 사용하였다. 또한 웨이블릿 역변환을 통한 신호의 추출 결과도 나타내었다.



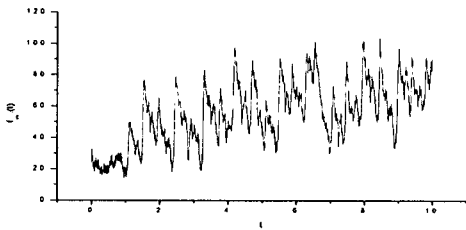
(a) 웨이블릿 플랜



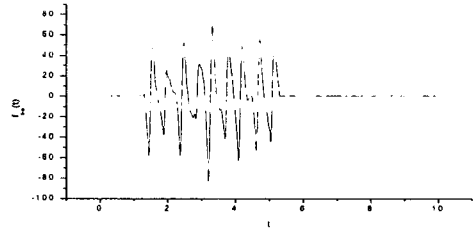
(b) 웨이블릿 플랜의 shrinkage 필터 적용결과



(c) 부분적 "시간-스케일" 필터 적용결과



(d) shrinkage 필터를 이용한 신호 복원



(e) "시간-스케일" 필터 적용을 통한 신호 복원

그림. 12 웨이블릿 역변환의 필터 적용결과
Fig.12. Result of applied filter for ICWT

위 그림12 (d)는 웨이블릿 플랜에 shrinkage 필터를 적용한 신호의 복원을 나타내었고, 그림12 (e)는 "시간-스케일" 필터를 사용하여 신호의 부분적인 복원을 나타내었다.

III. 결 론

본 논문은 안정적인 신호의 복원을 위한 연속 웨이블릿 역변환의 연산방법에 대하여 논하였다. 주파수 공간에서 웨이블릿 역변환을 통한 신호의 복원과 웨이블릿 역변환 과정에서 정의되는 웨이블릿 플랜을 이용한 멀티 필터 बैं크 시스템을 구현하였다.

웨이블릿 역변환을 수치적으로 안정되게 실현할 수 있도록 웨이블릿 플랜으로부터 신호 $f(t)$ 를 서로 다른 주파수 대역으로 완전하게 분리할 수 있는 멀티 필터 बैं크 시스템을 설계하였다. 이를 이용하여 안구의 움직임 측정 신호에 대한 잡음제거에 대해서도 논하였다. 연속 웨이블릿 역변환은 단지 수학적 수식이 아닌 수치적으로 실현가능한 구체적인 신호분석 도구임을 보였으며, 이를 이용한 신호 $f(t)$ 의 스케일 성분을 보다 상세하게 분석함을 설명하였다. 지금까지 웨이블릿 역변환을 이용한 신호해석에 관한 구체적인 연구가 미흡하지만 연속 웨이블릿 역변환의 신호해석에 있어서 새로운 적용 도구로서의 가치를 충분히 지니고 있다.

참 고 문 헌

[1] J. C. Goswami and A.K.Chan "Fundamentals of Wavelets : Theory, Algorithms, and Application", A Wiley-InterScience, 1999.
[2] M. Unser, Akram Aldroubi, Steven J. Schiff,

"Fast Implementation of the Continuous Wavelet Transform with Integer Scale", IEEE Trans-formation on Signal Processing, Vol.42, No.12, December.1994.

- [3] Jon. Kirby, "Gravity, Topography and the Con-tinuous wavelets Transform", Curtin University of Technology, Perth. Western Australia.
- [4] M. Vetterli and C. Herley, "Wavelets and Filter Banks: Theory and design", IEEE Transaction on Signal Processing, Vol.40, No.9, pp.2207~2232, 1992.
- [5] E. J. Candès and D. L. Donoho, "Curvelets, Multiresolution Representation, and Scaling Laws", Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, SPIE, 4119 (2000).

저 자 소 개

김태형(Tea-Hyung Kim)



1995년 금오공과대학교 공학사
1997년 금오공과대학교 공학석사
2002년 금오공과대학교 박사(수료)
※관심분야 : 멀티미디어 및 신호 처리, 마이크로프로세서 응용설계, 계측제어

윤동한(Dong-Han Yoon)



1968년 광운대학교 공학사
1980년 명지대학교 공학석사
1987년 명지대학교 공학박사
1979~현재 금오공과대학교 전자공학부 교수
※관심분야 : 멀티미디어 및 멀티미디어 및 신호처리, 센서응용, 마이크로 프로세서 응용설계, 계측제어