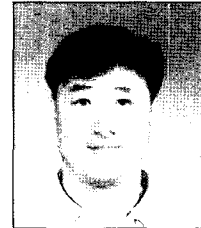


전산역학 백과사전의 내용 고찰-(1) 기초분야

Survey of the Encyclopedia of Computational Mechanics:(1) Fundamentals



박재균*

*단국대학교 토목환경공학과 전임강사

1. 서론

전산역학을 전공으로 하는 학자에게 대부분의 분야에 대한 전산역학의 최고 경지를 소개할 수 있는 서적은 흔하지 않다. 2004년에 Wiley사에서 출판된 전산역학 백과사전(Encyclopedia of Computational Mechanics)은 그 첫 시도로, Erwin Stein, Rene de Borst, 그리고 Thomas J.R. Hughes 등 세 명의 편집자와 수많은 세계적 석학의 논문이 모여 있다. 이 백과사전의 첫 번째 의의는 그 내용 자체로 직접 적용이 가능한 대부분의 기법을 포함하고 있는 것이고, 두 번째 의의는 더욱 깊은 연구를 위한 폭넓은 참고문헌을 제시하는 것이다.

전산역학 백과사전은 전부 세권의 책으로 이루어졌는데 (온라인 버전도 있음), 제1권은 기초분야를 다루고, 제2권은 고체역학 분야를, 그리고 제3권은 유체역학 분야를 다룬다. 내용이 너무 방대하기 때문에 본 학술기사는 3회로 나누어 이루어지며, 각 회에서 한 권의 내용을 다룰 예정이다. 그러나 그렇게 나누다고 할지라도 내용을 상세히 묘사하는 것은 필자의 능력에 미치지 못할 뿐만 아니라 그 분량이 적절한 양을 초과하기 때문에, 본 기사에서는 제1권의 1장에 나오는 ‘동기와 범위(motivation and scope)’, ‘발전 단계와 전산역학의 특징(stages of development and features of computational mechanics)’, ‘제1권의 개관(survey of the chapters of volume 1)’을 중심으로 기술하고 필요한 경우

본문의 내용을 보충하는 방법을 사용한다.

2. 1권의 내용(Fundamentals: Introduction and Survey)

이 장에서는 제1권의 내용에 대해서 위에서 설명한 바와 같이 세 가지로 나누어 설명한다.

2.1. 동기와 범위

전산역학 백과사전(ECM)은 첫권은 26장으로 이루어져 있는데, 그 내용은 전산역학의 방법적(methodological), 해석적(analytical), 알고리즘적(algorithmic), 그리고 수행(implementation)에 관한 주제에 대하여 다룬다. ECM의 가장 중요한 목적은 전산역학에 관련된 전 분야의 최신 정보를 제공하는 것이다. 지난 수십 년간 유한차분법, 유한요소법, 유한체적법, 경계요소법 등의 고전적인 방법들은 무요소법(meshfree method), spectral 기술, wavelet 기술과 불연속 유한요소법 등으로 발전하였으며, 그 내용은 본문에 모두 소개되어 있다.

2.2 발전단계와 전산역학의 특징

유한요소법, 경계요소법, 그리고 유한차분법 등의 발전

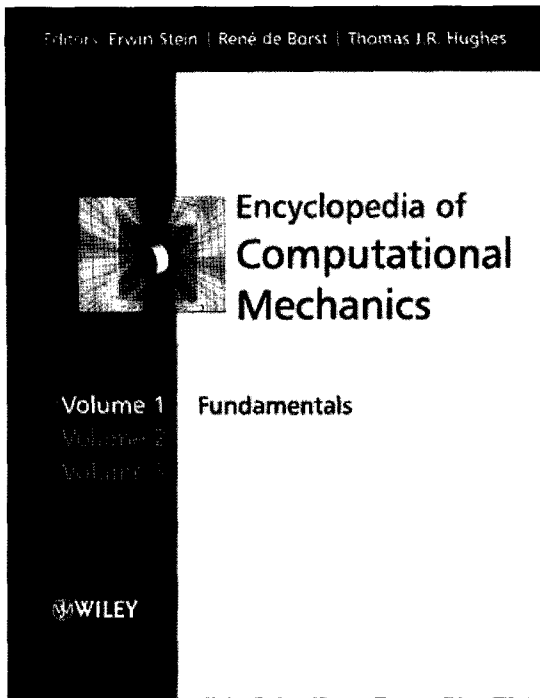


그림 1 단행본

은 현재 그 세 번째 단계에 있다고 할 수 있다. 첫 단계는 1960년에서 1975년에 이르는 시기로 보와 판에 대한 평면 응력문제를 유한요소법으로 풀어내었는데, 주로 선형 탄성 정적(static) 문제에 국한되었다. 이와 함께 항공역학과 유체역학에 대한 적용도 이루어졌다.

두 번째 단계는 1976년에서 1990년에 이르는 시기로 Ritz-Galerkim 방법으로 대표되는 정밀한 유한요소해석과 경계요소법, 그리고 그 방법들의 선-후 오차해석(priori and posteriori error analysis)이 발전하였다. 이와 함께 수학적 물리학(mathematical physics)분야에서는 난해한 선형, 비선형 편미분방정식에 대한 많은 공학적 발전이 이루어졌는데, 여기에는 컴퓨터의 속도와 메모리 크기의 빠른 증가가 큰 원동력이 되었다.

세 번째 단계는 1991년 이후 현재에 이르는 시기로 전산역학(더 넓게는 응용 물리학)과 전산수학 분야에서 새로운 시도와 도전, 그리고 연구방향이 계속 관찰되고 있다. 이들을 요약하면 다음과 같다:

- 무요소와 입자(particle) 방법, 손상과 파괴 묘사를 위해 불연속 변위를 포함하는 유한요소법.
- 오차에 따라 조절되는 적합적(adaptive) 모델링과 자연에 가까운 근사법, 시간과 공간의 스케일 차이를 이여주는 기술.
- 재료과학(material science)과 공학 분야에서 손상, 상(phase)변화, 그리고 여러 가지 파괴모드를 묘사하

는 적합 미소역학 모델링(adaptive micromechanical modeling)

- 새로운 종류의 보간법을 사용하는 유한요소법과 경계요소법
- 과학과 공학에서의 다중물리학(multiphysics) 현상 모델링과 해석
- 생체역학(biomechanics)과 의약품 분야에서의 복잡한 모델링과 해석
- 새로운 직접법 또는 반복법을 이용한 해석도구(solver)
- 일반화된 기하모델링, 요소생성, 요소 적합성을 위한 방법
- 객체, 과정, 해석결과와 가상현실의 발전된 가시화(visualization)

2.3. 제1권의 개관

제1권은 크게 네 개의 그룹으로 나눌 수 있다: 분할 방법들(discretization methods, 2장~15장); 기하학적 모델링, 요소생성, 시각화(16장~18장); 해석도구(solver, 19장~23장); 시간에 종속적인 문제들(time-dependent problems, 24장~26장).

첫 그룹은 제2장에서 Owe Axelsson 에 의한 유한차분법(Finite difference method)으로 시작한다. 여기서는 모든 종류의 2차와 4차 편미분방정식이 다루어지며 오차해석과 적합성, 계산에서의 문제점 등이 포함된다. 그 다음으로 유한요소법이 여섯 장에 걸쳐서 다루어진다. 먼저 3장에서 Tomas Apel이 유한요소 공간에서의 보간법(Interpolation in finite element spaces)에 대하여 기술한다. 여러 가지 시험함수(test functions)에 대하여 선-후 오차를 추정한다. Susanne Brenner와 Carsten Carstensen이 공동저술한 4장의 유한요소법(Finite element methods)은 2차 elliptic 편미방으로 이루어진 경계문제에 대한 변위법을 설명한다. 선-후 오차해석과 h-적합성, 알고리즘적 측면 등이 포함된다. 이 기본적인 내용의 다음으로는 5장의 p 버전 유한요소법(The p-version of the finite element method)이 나오며, 이는 Barna Szabo, Alexander Duster와 Ernst Rank의 세 명이 공동저술 하였다. 일반적인 노드 기초함수(nodal base function) 대신에 차수를 높인 시험함수를 사용하였으며 값이 급격하게 변하는 경우에 h-적합 방법과 비교하여 유리하다는 것을 보였다.

제6장에서 8장까지는 여러 가지 경계치문제와 편미분방정식에 대하여 그 문제에 적합한 시험함수를 사용하는 방법을 다룬다. 제6장은 Claudio Canuto와 Alfio Quarteroni가 저

술하였으며 일반화된 Galerkin방법(generalized Galerkin method)에 고차 삼각함수와 직교하는 Jacobi 다항식을 적용하는 **Spectral methods**를 다룬다. **제7장(adaptive wavelet techniques in numerical simulation)**은 Albert Cohen, Wolfgang Dahmen, 그리고 Ronald DeVore 등이 저술하였으며, wavelet 좌표계에 기초하여 경계요소법을 위한 matrix compression method를 기술하였다. **제8장(Plates and shells: asymptotic expansions and hierarchic models)**은 Monique Dauge, Erwan Faou, 그리고 Zohar Yosibash가 저술하였으며, 3차원의 탄성체 이론을 2차원의 쉘과 플레이트 이론으로 바꾸는 기존의 방법들과 새로운 방법들에 대하여 다루었는데, 기존의 운동학적이고(kinematic) 정적인(static) 가정들을 적용하지 않았다.

제9장에서 11장까지는 일반화된 유한요소법(Generalized finite element method)을 다룬다. Ferdinando Auricchio, Franca Brezzi, 그리고 Carlo Lovadina가 공동 저술한 **제9장(Mixed finite element methods)**은 고전적인 역학 문제들에 대하여 유한 차원 공간에서 saddle point의 안정성에 관한 체계적인 조사와 새로운 결과를 보여준다. 혼합방법(mixed method)은 locking 현상이나 거의 무압축성인 탄성체의 문제, Reissner와 Mindlin의 판 방정식, Helmholtz 방정식 등의 해결을 위한 수학적 기초가 된다. 공학적 관점에서 감차적분(reduced integration)과 안정화 기술 등이 다루어진다. **제10장**은 Antonio Huerta, Ted Belytschko, Sonia Fernandez-Mendez, 그리고 Timon Rabczuk 등이 저술하였으며, 무요소법(Meshfree methods)과 입자방법(particle method)을 발전되고 체계적인 방법으로 소개한다. 이 방법들은 본래 움직이는 불연속점, 크랙의 전파 등을 위해 유한요소망의 재구성 없는 계산을 하는 방법으로 고안되었다. Nenced J.N. Bicanic이 **제11장(Discrete element methods)**을 저술하였으며 근사해를 위하여 수렴이 잘되고 안정적인 방법을 제시하는 대신에 자체적으로 불연속 변위를 가지는 시스템의 시뮬레이션을 다룬다. 현재까지는 수학적 해석 대신 공학적인 접근이 이루어져 왔으며 수렴과 안정성이 어떻게 정의되어야 하는지에 대한 질문이 남아있다.

제12, 13장은 유한요소법과 연계되는 경계요소법에 대한 내용을 기술한다. George C. Hsiao와 Wolfgang L. Wendland가 저술한 **제12장(Boundary element methods: foundation and error analysis)**은 변분법에 근거한 Galerkin 경계요소법을 수학적으로 엄밀하게 보여준다. 이 결과로부터 경계요소법을 위한 여러 개의 알고리즘이 소개, 논의된다. **제13장(Coupling of boundary element methods and finite element methods)**은 Ernst Stephan이 저술하

였으며 symmetric coupling기법을 이용하여 유한요소법과 경계요소법의 강점을 조합하는 새로운 방법을 다룬다. 특별한 내용으로는 Mixed 유한요소법을 사용한 Signorini 타일의 접촉문제(contact problem)가 있다.

제14장(Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods)은 J. Donea와 여러 명이 저술하였으며, 이 내용은 이전까지의 여러 가지 변분-분할에 대한 내용과 다르게 여러 가지 상호작용을 다룬다. 즉, 유체-고체의 상호작용 묘사를 위한 ALE에 대하여 설명한다. ALE의 개념, 해석, 알고리즘, 그리고 선형/비선형, 정적/동적 문제에 대한 내용들이 잘 정리되어 있으며 적절한 예제도 제시된다.

Timothy Barth와 Mario Ohlberger가 저술한 **15장(Finite volume method)** 역시 앞의 내용과 독립적이다. 유체역학에 적용되는 유한체적요소(finite volume element)의 개발과 다른 영역으로의 전파에 대한 내용을 담고 있다. 유한체적요소의 장점은 여러 가지의 보존법칙을 기본적으로 만족시킨다는 점이다. 선-후 오차해석과 그 결과의 적합한 적용이 소개된다.

두 번째 그룹은 제16장에서 시작하는데 18장까지는 위상수학(topology), 기하학, 유한요소망(mesh), 그리고 계산된 결과의 표현과 시각화에 대하여 기술한다. Franz-Erich Wolter, Niklas Peinecke, 그리고 Martin Reuter가 저술한 **16장(Geometric modeling of complex shapes and engineering artifacts)**은 위상수학과 기하학을 위한 전산학적인 방법을 제시한다. 관련된 모델링은 유한요소망으로 자연스럽게 연결된다. **제17장(Mesh generation and mesh adaptivity)**은 P.L. George 외 여러 명이 저술하였으며 평면, 표면, 그리고 체적의 자동 망 생성과 적응적 망 재생성(adaptive remeshing)에 대한 내용을 담고 있다. **제18장(Computational visualization)**은 William J. Schroeder와 Mark. S. Shephard가 저술하였고, 현대 과학과 기술에서 매우 중요한 부분을 다룬다. 어떤 객체를 시각화하는 데 있어서 그 기하학적 모양 뿐 아니라, 다른 특성 자료와 해석 결과 등을 동시에 포함하고 있으면서 표현하는 기법을 설명한다.

세 번째 그룹은 제19장부터 23장까지로 14장까지의 내용에서 나오는 여러 가지 대수 시스템을 효과적으로 풀어내기 위한 해석도구(solver)에 대한 내용을 다룬다. 매우 큰 연립 방정식을 적절한 시간 내에 풀 수 있는 여러 가지의 고차원적 그리고 각 문제에 맞는 직접 해석법 또는 반복법 해석도구를 소개한다. Henk A. van der Vorst가 저술한 **19장(Linear algebraic solvers and eigenvalue analysis)**은 직접소거법과 반복법을 소개하는데, 효과적인 답을 위한 전처리와

Conjugate Gradient, MINRES, OMR, Bi-CGSTAB, 그리고 GMRES 등의 방법들이 다루어진다. Wolfgang Hackbusch가 저술한 20장(Multigrid methods for FEM and BEM)은 이산화된 선형/비선형 elliptic problem을 위한 고속 반복법에 대한 내용을 다루며 완전한 알고리즘 박스가 포함되어 있다. 역시 Wolfgang Hackbusch가 저술한 21장(Panel clustering techniques and hierarchical matrices for BEM and FEM)은 BEM에서 주로 나타나는 속이 짝찬 행렬에 대한 효과적인 해석도구를 제시한다. 목표는 일반적인 On^2 의 연산횟수를 $O(n)$ 으로 줄이는 것이다. 제22장(Domain decomposition methods and preconditioning)은 V.G. Korneev와 Ulrich Langer가 저술하였고 Schwarz 방법과 발전된 부분구조법(substructuring technique)을 번갈아 사용하여 대형 시스템에 대한 효율적인 반복법을 제시하였다. 멀티프로세서 컴퓨터를 이용하여 병렬처리를 하는 것이 가장 효과적이다. 제23장(Nonlinear systems and bifurcations) Werner C. Rheinboldt가 저술하였으며, 물리학적 불안정성 문제 등 고도의 비선형 시스템을 효율적으로 해석하기 위한 전략이 기술되었다. 이러한 해석도구들은 뉴턴의 반복법과 그 유사법에 기초한 것이다.

제1권의 마지막 세 장인 24, 25, 그리고 26장은 네 번째 그룹으로 시간에 종속적인 문제에 대한 수치해석기법의 기초를 다룬다. Kenneth Eriksson, Claes Johnson, 그리고 Anders Logg이 저술한 24장(Adaptive computational methods for parabolic problems)은 공간상에서 연속이고, 시간상에서 불연속인 Galerkin 방법을 사용하여 선형화된 dual problem을 해석함으로써 parabolic problem을 해결하는 방법을 제시한다. 제25장(time dependent problems with the boundary integral equation method)은 Martin Costabel이 저술하였으며 경계요소법을 이용하여 시간이력

문제를 해석하는 방법을 설명한다. 공간-시간 적분 식 방법, Laplace 변환 방법, 그리고 시간-단계 방법(time-stepping method) 등 세 가지 방법이 비교, 분석되었다. 제26장(Finite element methods for Maxwell equations)은 Leszek Demkowicz가 저술하였으며 time-harmonic Maxwell equation의 유한요소해석을 다룬다. 안정화된 변분식과 Nedelec의 세 개의 기본요소(fundamental elements)를 이용한 hp이산화와 hp적합성이 제시된다.

3. 마무리 글

앞에 소개한 26장의 내용들은 현재와 미래의 전산역학, 적분수학, 컴퓨터과학, 그리고 물리학 분야를 위한 좋은 기본지식이 된다. 그리고 수치해석의 기본을 다룬 1권과 더불어 고체역학을 다루는 2권과 유체역학을 다룬 3권을 함께 사용할 때 이 백과사전이 더욱 유용하다. 다음 기사에서는 고체역학 편을 다룰 예정이다.

참 고 문 헌

1. Erwin Stein, Rene de Borst, and Thomas J. R. Hughes, *Encyclopedia of Computational Mechanics - Fundamentals*, 2004, v. 1, Wiley.
2. Erwin Stein, Rene de Borst, and Thomas J. R. Hughes, *Encyclopedia of Computational Mechanics - Solids and Structures*, 2004, v. 2, Wiley.
3. Erwin Stein, Rene de Borst, and Thomas J. R. Hughes, *Encyclopedia of Computational Mechanics - Fluids*, 2004, v. 3, Wiley. 