

축대칭 선형 점탄성 구조물의 정적 유한요소해석

Finite Element Formulation for Axisymmetric Linear Viscoelastic Problems

심우진†

Sim, Woo-Jin

오근*

Oh, Guen

(논문접수일 : 2005년 5월 18일 ; 심사종료일 : 2005년 9월 7일)

요지

본 논문에서는 축대칭 형상의 점탄성 구조물이 정적 하중을 받을 때에 대한 시간영역에서의 유한요소해법의 정식화 과정을 제시한다. 또한, 여러 가지 경계조건을 갖는 점탄성 중공구나 원통 문제들의 변위나 응력 이론해들을 탄성-점탄성 상응원리를 이용하여 유도하고 제시한다. 이때 점탄성 재료는 부피변형이 탄성적이고 전단변형은 3요소로 구성된 표준선형 고체처럼 거동한다고 가정한다. 구대칭, 축대칭 및 평면변형을 유한요소모델을 이용한 수치결과들을 유도된 이론해들과 비교하여 제시된 유한요소해법과 이론해들의 타당성과 정확성을 보인다.

핵심용어 : 점탄성, 상응원리, 축대칭, 구대칭, 유한요소법

Abstract

In this paper, the time-domain finite element formulations for axisymmetric linear viscoelastic problems, especially for the viscoelastic hollow sphere and cylinder, under various boundary conditions are presented with the theoretical solutions of them obtained by using the elastic-viscoelastic correspondence principle. It is assumed that the viscoelastic material behaves like a standard linear solid in distortion and elastically in dilatation. Numerical examples are solved based on the spherically symmetric, axisymmetric and plane strain finite element models. Good agreements are obtained between numerical and theoretical solutions, which shows the validity and accuracy of the presented method.

keywords : viscoelasticity, correspondence principle, axisymmetric, spherically symmetric, finite element

1. 서론

국내외에서 점탄성 재료와 구조물에 대한 연구 및 응용은 산업분야나 교육, 연구분야 등에서 널리 행하여지고 있다(Drozdov 1998; Graham, 1995; Jones, 2001; Lockett, 1972; Mackerle, 2004). 국내의 경우에는 진동감쇠해석(김재호 등, 1993; 김진구 등 1999; 박진택 등, 2002, 이덕규 등, 2003; 이우식 등, 1994; 조기대 등, 1998), 비선형해석(이성범 등, 2003; 정규동 등, 1999), 균열해석(심우진 등 2004 ; 이강용 등, 1998; 이상순, 2001), 잔류응력해석(김영국, 1997; 김철 등, 2002; 이상순, 1999) 등이 발표되었다. 그리고 축대칭

형상을 다룬 기존의 연구들(김영국, 1997; 김철 등, 2002; 박진석 등, 1991; 이영신 등, 1987)은 주로 원통 형상을 취급하고 있으며, 구형상의 문제는 아직까지 보고되지 않았다.

본 논문에서는 축대칭 형상의 점탄성 구조물이 정적하중을 받을 때에 대한 시간영역에서의 구대칭, 축대칭 유한요소해법의 정식화 과정을 제시한다. 본 논문의 해법은 기존의 타 연구들과 비교하여 변분적분식의 전개와 점탄성 유전적분의 처리 방법 등에서 다르다. 그리고 본 논문은 기존의 2차원 선형 점탄성 해법(심우진 등, 1993)의 축대칭 해석으로 확장이다.

해석 예제로는 다양한 경계조건을 갖는 중공구 및 원통

† 책임저자, 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 교수
전화: 054-478-7371; Fax: 054-478-7319
E-mail: wjsim@knu.kumoh.ac.kr

* 금오공과대학교 기계설계공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

을 대상으로, 탄성-점탄성 상응원리를 적용하여 이론해들을 유도하고, 구대칭, 축대칭 및 평면변형률 유한요소모델을 이용한 수치결과들과 비교하여 제시된 유한요소해법의 타당성을 검증한다. 특히 점탄성 증공구에 대한 이론해들을 처음으로 제시함으로써, 향후 축대칭 점탄성 연구에 기본 자료가 되도록 한다.

2. 점탄성 축대칭 해석을 위한 유한요소방정식

2.1 유한요소방정식

점탄성 지배방정식들은 탄성 지배방정식들과 비교하여 응력-변형률 관계식만 다르고 평형방정식과 변형률-변위 관계식은 동일하다. 그러나 정적인 문제라 하더라도 종속 함수들은 시간에 따라 변한다. 한편, 응력-변형률 관계식은 미분형과 적분형으로 표현가능하며(Christensen, 1982; Flügge, 1975), 어느 쪽을 택하는가에 따라 수치해법이 달라진다. 본 논문에서는 적분형 물성식을 이용하여 축대칭 문제들을 해석한다.

축대칭 선형 점탄성 문제의 정적 해석을 위한 지배방정식은 다음과 같다. 즉,

$$\sigma_{ij,j}(x,t) + \rho f_i(x,t) = 0 \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2} \{u_{i,j}(x,t) + u_{j,i}(x,t)\} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(x,t) = D_{ijkl}(t) * d\epsilon_{kl}(x,t) \quad (3a)$$

$$= \int_0^t D_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon_{kl}(x,\tau) d\tau \quad (3b)$$

여기서, \mathbf{x} 는 위치벡터, t 는 시간, σ_{ij} 는 응력, f_i 는 체적력, u_i 는 변위, ϵ_{ij} 는 변형률, D_{ijkl} 은 점탄성 물성함수, *는 Stieltjes convolution 기호이다. 그리고 위와 같은 지배방정식을 풀기 위해서 변위나 표면력에 관한 경계조건을 사용한다.

$$u_i(x,t) = \hat{u}_i(x,t), \quad t_i(x,t) = \hat{t}_i(x,t) \quad (4)$$

변분적분식은 식 (1)에 종속함수의 변분을 곱하고 부분적분을 취하던가, 또는 다음과 같이 '가상 일의 원리'로부터 유도될 수 있다. 즉,

$$\delta U = \delta W \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} D_{ijkl}(t) * d\epsilon_{kl}(x,t) \delta \epsilon_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

$$\delta W = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega \quad (7)$$

식 (6)과 (7)은 각각 물체 내부에 저장되는 가상변형에너지와 표면력과 체적력과 같은 외력에 의해 물체에 가해지는 가상일이다. 체적력을 무시할 경우에 식 (5)는 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} D_{ijkl}(t) * d\epsilon_{kl}(x,t) \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (8)$$

식 (8)은 선형 점탄성 문제해석을 위한 일반적인 변분적분식이며 행렬식을 이용하여 전개하면 편리하므로, 식 (8)을 다음과 같이 표기하기로 한다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_{ij}(t) * d\epsilon_j(x,t) \delta \epsilon_i d\Omega &= \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \\ \int_{\Omega} D_{ij}(t) \epsilon_j(x,0) \delta \epsilon_i d\Omega &+ \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\int_{\Omega} \int_{0^+}^t D_{ij}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_j(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau \delta \epsilon_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (9b)$$

여기서, $\epsilon_i(x,t)$ 는 1차원적 배열의 변형률 행렬이며, D_{ij} 는 점탄성 물성행렬로서 다음절에서 정의된다.

식 (8)을 이산화시키기 위해 종속함수를 시간함수와 공간함수 곱의 급수로 가정한다. 그리고 시간함수는 균등분할된 시간축상에서 내삽함수의 개념을 이용해서 계단적 혹은 선형적(심우진, 1992; 1993)으로 변환한다고 가정할 수 있다. 본 논문에서는 수치결과의 정확도를 고려하여 후자의 가정을 취한다. 즉,

$$\epsilon_i(x,t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{ \psi_1(t) \epsilon_i^n(x) + \psi_2(t) \epsilon_i^{n+1}(x) \} \quad (10)$$

여기서, ψ_i 는 $t_n \leq \tau \leq t_{n+1}$ 에서 $\psi_1(\tau) = (t_{n+1} - \tau) / \Delta t$, $\psi_2(\tau) = (\tau - t_n) / \Delta t$, 그 외 구간에서 $\psi_1(\tau) = \psi_2(\tau) = 0$ 이다. 그리고 $t_n = (n-1)\Delta t$, $n = 1, 2, \dots, N$ 이며, Δt 는 시간증분, N 은 현재의 시간절점이다. 그리고 $\epsilon_i^n(x)$, $\epsilon_i^{n+1}(x)$ 은 각각 시각 t_n , t_{n+1} 에서의 변형률 함수이다.

식 (10)을 식 (9b)의 좌측 둘째항에 대입하고 정리한다.

$$\int_{\Omega} \int_{0^+}^t D_{ij}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_j(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau \delta \epsilon_i d\Omega =$$

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{ij}(t-\tau) d\tau \int_{\Omega} \{\epsilon_j^{n+1}(x) - \epsilon_j^n(x)\} \delta \epsilon_i d\Omega \quad (11)$$

식 (11)을 식 (9b)에 대입하고 행렬식으로 표현하면, 축대칭 선형 점탄성 문제의 해석을 위한 유한요소방정식이 최종적으로 얻어진다.

$$\begin{aligned} [\tilde{K}(\Delta t)]\{u^N\} = & \\ \sum_{n=1}^{N-2} & [[\tilde{K}(t-\tau)]_{n+1}^{n+2} - \tilde{K}(t-\tau)]_n^{n+1} \{u^{n+1}\} + \\ & [[\tilde{K}(t-\tau)]_1^2 - K(t)]\{u^1\} + \{\bar{F}\} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [\tilde{K}(t-\tau)]_n^{n+1} &= \int_{\Omega} [B]^T [\tilde{D}(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}} [B] d\Omega \\ [\tilde{K}(\Delta t)] &= [\tilde{K}(t-\tau)]_{N-1}^N \\ [K(t)] &= \Delta t \int_{\Omega} [B]^T [D(t)] [B] d\Omega \\ \{\bar{F}\} &= \Delta t \int_{\Gamma} t_i(x,t) N_i(x) d\Gamma \\ [\tilde{D}(t)] &= \int_0^t [D(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)에서 t_i 는 표면력이며, $[D(t)] = [D_{ij}(t)]$, $[B]$ 행렬들은 다음 절에서 문제에 따라 정의된다. 그리고 $d\Omega$, $d\Gamma$ 는 해석 모델에 따라 달리 정의되므로 자세한 것은 부록을 참조한다.

한편, 응력 계산은 식 (10)을 식 (3)에 대입하여 구하는데, 그 과정은 식 (9a)의 등식 좌측에서 공간적분 기호 내의 유전적분 계산과 동일하므로 식 (11)의 유도과정을 참조한다. 그리고 식 (3)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\{\sigma(t)\} = [D(t)]\{\epsilon^1\} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} [\tilde{D}(t-\tau)]_{t_n}^{t_{n+1}} \{\epsilon^{n+1} - \epsilon^n\} \quad (14)$$

여기서, 점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 의 요소들은 주어진 점탄성 물성과 문제 종류에 달려 있으며, 다음 절에서 정의된다. 식 (12)나 식 (14)의 등식우측에 있는 유전적분(합기호)을 구하기 위해서는 많은 계산시간이 소모된다. 그러나 그 요소들이 지수함수로 표현될 경우에는 효율적 계산이 가능하다(심우진 등, 1993; Taylor 등, 1970).

2.2 점탄성 물성행렬

수치해석을 위해 점탄성 재료는 정수압변형시 탄성적으

로 거동하고, 전단변형시 표준선형고체처럼 거동한다고 가정한다. 즉,

$$\begin{aligned} K(t) &= K_0 \\ G(t) &= G_0 \{\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda t}\} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $K(t)$ 는 체적이완함수, $G(t)$ 는 전단이완함수, $K_0, G_0, \alpha, \lambda$ 는 점탄성 이완함수의 상수계수들이다.

점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 는 탄성론에서의 탄성행렬 $[D]$ 에 식 (15)와 탄성-점탄성 상응원리를 적용하여 구해지며, 평면변형률 문제의 경우에 다음처럼 표현된다.

$$[D(t)] = \begin{bmatrix} d_1(t) & d_2(t) & 0 \\ & d_1(t) & 0 \\ \text{Symm.} & & d_3(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{aligned} d_1(t) &= p_4 + p_5 e^{-\xi_1 t} + p_6 e^{-\xi_2 t} \\ d_2(t) &= q_4 + q_5 e^{-\xi_1 t} + q_6 e^{-\xi_2 t} \\ d_3(t) &= w_1 + w_2 e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (17)$$

그리고 계수들 $p_4, p_5, p_6, q_4, q_5, q_6, w_1$ 및 w_2 는 부록을 참조한다.

한편, 축대칭 및 구대칭 문제에서의 $[M]$, $[B]$, $[D(t)]$ 행렬의 정의는 다음 절에서 설명한다.

2.3 축대칭 문제

각 요소에 대한 변위장은 다음처럼 표현된다.

$$\{u(r,z,t)^{(e)}\} = [N^{(e)}(r,z)] \{\delta^{(e)}(r,z,t)\} \quad (18)$$

요소 내의 변형률-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\epsilon^{(e)}(r,z,t)\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} \\ &= [B^{(e)}(r,z)] \{\delta^{(e)}(r,z,t)\} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \dots & \frac{N_8}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (20)$$

요소 내의 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\{\sigma^{(e)}(r, z, t)\} = [D(t)] * \{d\epsilon^{(e)}(r, z, t)\} \quad (21)$$

여기서,

$$[D(t)] = \begin{bmatrix} d_1(t) & d_2(t) & d_2(t) & 0 \\ & d_1(t) & d_2(t) & 0 \\ & & d_1(t) & 0 \\ \text{Symm.} & & & d_3(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

그리고 $d_1(t), d_2(t), d_3(t)$ 는 식 (17)의 정의와 같다.

2.4 구대칭 문제

구대칭 문제 해석을 위한 변위, 변형률-변위, 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\{u(r, t)^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u^{(e)} \\ w^{(e)} \end{Bmatrix} = [N^{(e)}(r)] \{\delta^{(e)}(r, t)\} \quad (23)$$

여기서, $[N]$ 는 2차 선요소의 형상함수이다.

$$\{\epsilon^{(e)}(r, t)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = [B^{(e)}(r)] \{\delta^{(e)}(r, t)\} \quad (24)$$

여기서,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \\ \frac{N_1}{r} & \frac{N_2}{r} & \frac{N_3}{r} \\ \frac{N_1}{r} & \frac{N_2}{r} & \frac{N_3}{r} \end{bmatrix} \quad (25)$$

요소 내의 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\{\sigma^{(e)}(r, t)\} = [D(t)] * \{d\epsilon^{(e)}(r, t)\} \quad (26)$$

여기서,

$$[D(t)] = \begin{bmatrix} d_1(t) & d_2(t) \\ \text{Symm.} & d_1(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

그리고 $d_1(t), d_2(t)$ 는 식 (17)의 정의와 같다.

3. 점탄성 이론해의 유도

3.1 점탄성 원통

여러 가지 경계조건을 갖는 원통과 중공구에 대한 이론해를 탄성-점탄성 상응원리를 이용해 유도하고 다음과 같이 제시한다. 여기서, a 는 원통(또는 중공구)의 내경, b 는 원통(또는 중공구)의 외경이고, p_i 는 내압, p_o 은 외압이다.

3.1.1 일정한 내압을 받는 점탄성 원통

(a) 반경방향 변위

$$u_r(r, t) = A_1 \{B_1(r) + C_1(r)e^{-\alpha t} + D_1(r)e^{-\beta_1 t}\} \quad (28)$$

여기서,

$$A_1 = \frac{p_i a^2}{2(b^2 - a^2)} \quad B_1(r) = \frac{b^2}{r G_0 \alpha} + \frac{3r}{(G_0 + 3K_0)\beta_1}$$

$$C_1(r) = \frac{b^2}{r G_0} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad D_1(r) = \frac{3r}{G_0 + 3K_0} \left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right)$$

$$\beta_1 = \frac{G_0 \alpha + 3K_0}{G_0 + 3K_0}$$

3.1.2 일정한 외압을 받는 점탄성 원통

(a) 반경방향 변위

$$u_r(r, t) = A_2 \{B_2(r) + C_2(r)e^{-\alpha t} + D_1(r)e^{-\beta_1 t}\} \quad (29)$$

여기서,

$$A_2 = \frac{p_o b^2}{2(a^2 - b^2)} \quad B_2(r) = \frac{a^2}{r G_0 \alpha} + \frac{3r}{(G_0 + 3K_0)\beta_1}$$

$$C_2(r) = \frac{a^2}{r G_0} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

3.1.3 외경이 고정되고 일정한 내압을 받는 점탄성 원통

(a) 반경방향 변위

$$u_r(r, t) = A_3(r) \{B_3 + C_3 e^{-\beta_2 t}\} \quad (30)$$

여기서,

$$A_3(r) = \frac{3p_i a^2 b}{6a^2 K_0 + 2(a^2 + 3b^2) G_0} \left(\frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right)$$

$$B_3 = \frac{1}{\beta_2} \quad C_3 = 1 - \frac{1}{\beta_2}$$

$$\beta_2 = \frac{3a^2 K_0 + (a^2 + 3b^2) G_0 \alpha}{3a^2 K_0 + (a^2 + 3b^2) G_0}$$

(b) 반경방향 응력

$$\sigma_r(r, t) = E_1 \{ F_1(r) + G_1(r) \} e^{-\beta_2 \lambda t} \quad (31)$$

여기서,

$$E_1 = \frac{-p_i a^2}{6a^2 K_0 + 2(a^2 + 3b^2) G_0}$$

$$F_1(r) = \left\{ 6K_0 + 2 \left(1 + \frac{3b^2}{r^2} \right) G_0 \alpha \right\} / \beta_2$$

$$G_1(r) = 6K_0 + 2 \left(1 + \frac{3b^2}{r^2} G_0 \right) \alpha - F_1(r)$$

(c) 접선방향 응력

$$\sigma_\theta(r, t) = E_1 \{ F_2(r) + G_2(r) \} e^{-\beta_2 \lambda t} \quad (32)$$

여기서,

$$F_2(r) = \left\{ 6K_0 + 2 \left(1 - \frac{3b^2}{r^2} \right) G_0 \alpha \right\} / \beta_2$$

$$G_2(r) = 6K_0 + 2 \left(1 - \frac{3b^2}{r^2} G_0 \right) \alpha - F_2(r)$$

3.1.4 내경이 고정되고 일정한 외압을 받는 점탄성 원통

(a) 반경방향 변위

$$u_r(r, t) = A_4(r) \{ B_4 + C_4 e^{-\beta_3 \lambda t} \} \quad (33)$$

여기서,

$$A_4(r) = \frac{3p_o a b^2}{6b^2 K_0 + 2(3a^2 + b^2) G_0} \left(\frac{a}{r} - \frac{r}{a} \right)$$

$$B_4 = \frac{1}{\beta_3} \quad C_4 = 1 - \frac{1}{\beta_3}$$

$$\beta_3 = \frac{3b^2 K_0 + (3a^2 + b^2) G_0 \alpha}{3b^2 K_0 + (3a^2 + b^2) G_0}$$

(b) 반경방향 응력

$$\sigma_r(r, t) = E_2 \{ F_3(r) + G_3(r) \} e^{-\beta_3 \lambda t} \quad (34)$$

여기서,

$$E_2 = \frac{-p_o b^2}{3b^2 K_0 + (3a^2 + b^2) G_0}$$

$$F_3(r) = \left\{ 3K_0 + \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) G_0 \alpha \right\} / \beta_3$$

$$G_3(r) = 3K_0 + \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} G_0 \right) \alpha - F_3(r)$$

(c) 접선방향 응력

$$\sigma_\theta(r, t) = E_2 \{ F_4(r) + G_4(r) \} e^{-\beta_3 \lambda t} \quad (35)$$

여기서,

$$F_4(r) = \left\{ 3K_0 + \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) G_0 \alpha \right\} / \beta_3$$

$$G_4(r) = 3K_0 + \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} G_0 \right) \alpha - F_4(r)$$

3.2 점탄성 중공구

3.2.1 일정한 내압을 받는 점탄성 중공구

(a) 반경방향 변위

$$u_r(r, t) = A_5(r) \{ B_5(r) + C_5 e^{-\alpha \lambda t} \} \quad (36)$$

여기서,

$$A_5(r) = \frac{p_i a^3}{2r^2(b^3 - a^3)} \quad B_5(r) = \frac{3b^3 K_0 + 4r^3 G_0 \alpha}{6K_0 G_0 \alpha}$$

$$C_5 = \frac{b^3}{2G_0} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)$$

3.2.2 일정한 외압을 받는 점탄성 중공구

(a) 반경방향 변위

$$u_r(r, t) = A_6(r) \{ B_6(r) + C_6 e^{-\alpha \lambda t} \} \quad (37)$$

여기서,

$$A_6(r) = \frac{p_o a^3}{2r^2(a^3 - b^3)}$$

$$B_6(r) = \frac{3a^3 K_0 + 4r^3 G_0 \alpha}{6K_0 G_0 \alpha}$$

$$C_6 = \frac{a^3}{2G_0} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

3.2.3 외경이 고정되고 일정한 내압을 받는 점탄성 중공구

(a) 반경방향 변위

$$u_r(r,t) = A_7(r) \{B_7 + C_7 e^{-\gamma_1 t}\} \quad (38)$$

여기서,

$$A_7(r) = \frac{p_i a^3 (b^3 - r^3)}{3r^2 (3a^3 K_0 + 4b^3 G_0)}$$

$$B_7 = \frac{1}{\gamma_1} \quad C_7 = 1 - \frac{1}{\gamma_1}$$

$$\gamma_1 = \frac{3a^3 K_0 + 4b^3 G_0 \alpha}{3a^3 K_0 + 4b^3 G_0}$$

(b) 반경방향 응력

$$\sigma_r(r,t) = E_3(r) \{F_5(r) + G_5(r) e^{-\gamma_1 t}\} \quad (39)$$

여기서,

$$E_3(r) = -\frac{p_i a^3}{r^3} \frac{3r^3 K_0 + 4b^3 G_0}{3a^3 K_0 + 4b^3 G_0}$$

$$F_5(r) = \frac{3r^3 K_0 + 4b^3 G_0 \alpha}{(3r^3 K_0 + 4b^3 G_0) \gamma_1}$$

$$G_5(r) = 1 - E_3(r)$$

(c) 접선방향 응력

$$\sigma_\theta(r,t) = E_4(r) \{F_6(r) + G_6(r) e^{-\gamma_1 t}\} \quad (40)$$

여기서,

$$E_4(r) = -\frac{p_i a^3}{r^3} \frac{3r^3 K_0 - 2b^3 G_0}{3a^3 K_0 + 4b^3 G_0}$$

$$F_6(r) = \frac{3r^3 K_0 - 2b^3 G_0 \alpha}{(3r^3 K_0 - 2b^3 G_0) \gamma_1}$$

$$G_6(r) = 1 - E_4(r)$$

3.2.4 내경이 고정되고 일정한 외압을 받는 점탄성 중공구

(a) 반경방향 변위

$$u_r(r,t) = A_8(r) \{B_8 + C_8 e^{-\gamma_2 t}\} \quad (41)$$

여기서,

$$A_8(r) = \frac{p_o b^3 (a^3 - r^3)}{3r^2 (3b^3 K_0 + 4a^3 G_0)}$$

$$B_8 = \frac{1}{\gamma_2} \quad C_8 = 1 - \frac{1}{\gamma_2}$$

$$\gamma_2 = \frac{3a^3 K_0 + 4b^3 G_0 \alpha}{3a^3 K_0 + 4b^3 G_0}$$

(b) 반경방향 응력

$$\sigma_r(r,t) = E_3(r) \{F_5(r) + G_5(r) e^{-\gamma_2 t}\} \quad (42)$$

여기서,

$$E_3(r) = -\frac{p_o b^3}{r^3} \frac{3r^3 K_0 + 4a^3 G_0}{3b^3 K_0 + 4a^3 G_0}$$

$$F_5(r) = \frac{3r^3 K_0 + 4a^3 G_0 \alpha}{(3r^3 K_0 + 4a^3 G_0) \gamma_2}$$

$$G_5(r) = 1 - E_3(r)$$

(c) 접선방향 응력

$$\sigma_\theta(r,t) = E_4(r) \{F_6(r) + G_6(r) e^{-\gamma_2 t}\} \quad (43)$$

여기서,

$$E_3(r) = -\frac{p_o b^3}{r^3} \frac{3r^3 K_0 - 2a^3 G_0}{3b^3 K_0 + 4a^3 G_0}$$

$$F_6(r) = \frac{3r^3 K_0 - 2a^3 G_0 \alpha}{(3r^3 K_0 - 2a^3 G_0) \gamma_2}$$

$$G_6(r) = 1 - E_3(r)$$

참고로, 내압을 받는 경우와 외압을 받는 점탄성 원통 (또는 중공구)의 유도된 관계식들을 비교해 보면, 탄성해에서와 마찬가지로 이들 관계식들 사이에 a, b 를 서로 바

꾸어 대입하면 두 식이 같아짐을 알 수 있다.

4. 수치해석 예

점탄성 원통과 중공구의 수치해석시에 사용된 점탄성 물성은 동일하며, 점탄성 이완함수의 상수계수들을 $G_0 = 480$, $K_0 = 1280$, $\alpha = 0.25$, $\lambda = 0.4$ 로 하였다.

앞 절에서 유도된 이론해를 수치결과들과 함께 무차원화시켜 그림에 도시하였으며, $R = (r-a)/(b-a)$ 은 무차원 반경을 의미하고, 두 경우 모두 $R=0.0, 0.5, 1.0$ 에서의 결과를 도시하였다. $t_R = (\alpha\lambda)^{-1}$ 은 지연시간이며, 시간증분은 $\Delta t/t_R = 0.1$, 점탄성 원통과 중공구 해석에 사용된 내외경의 비는 모두 $b/a = 1.5$ 로 동일하다.

4.1 점탄성 원통

내압을 받는 무한히 긴 점탄성 원통을 유한요소해석하기 위해서는 그림 1(b)에서처럼 2차원 평면변형률 모델과 그

림 1(c)에서처럼 1차원 축대칭 모델 두가지로 수행하였다.

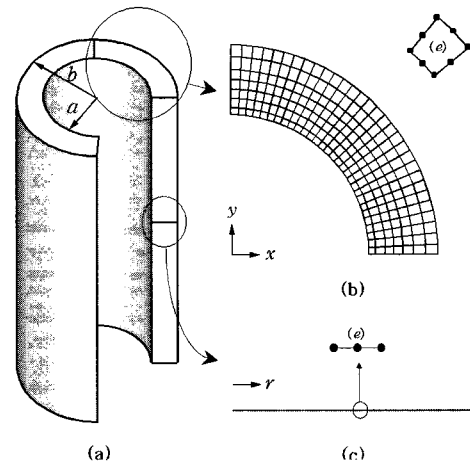


그림 1 (a) 점탄성 원통의 기하학적 형상
(b) 평면변형률 유한요소 모델(2차원 모델)
(c) 축대칭 유한요소 모델(1차원 모델)

전자의 경우에는, 수직 단면의 1/4을 절점당 2개의 자유도를 갖는 총 210개의 등매개 2차 사변형요소를 사용하여

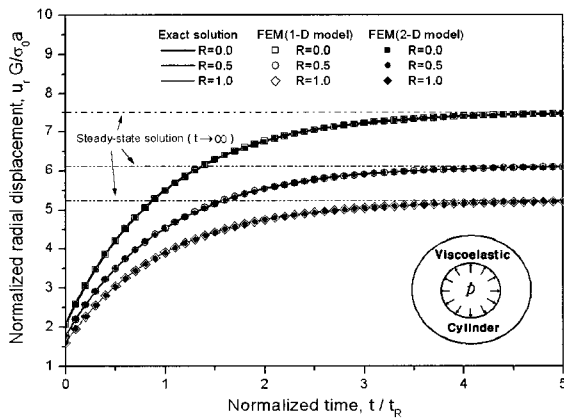


그림 2 일정한 내압을 받는 점탄성 원통의 반경방향 변위

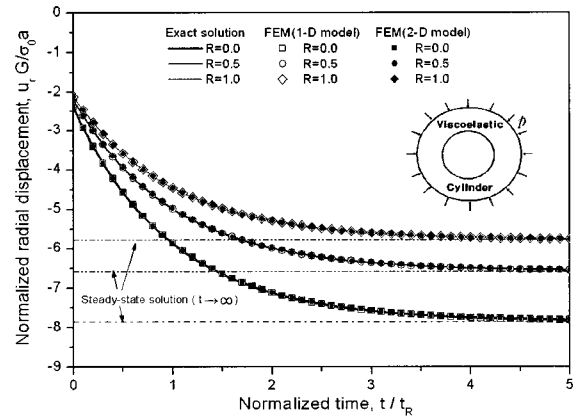


그림 3 일정한 외압을 받는 점탄성 원통의 반경방향 변위

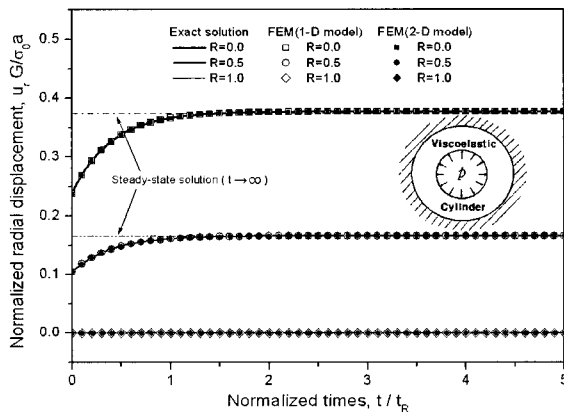


그림 4 외경이 고정되고 일정한 내압을 받는 점탄성 원통의 반경방향 변위

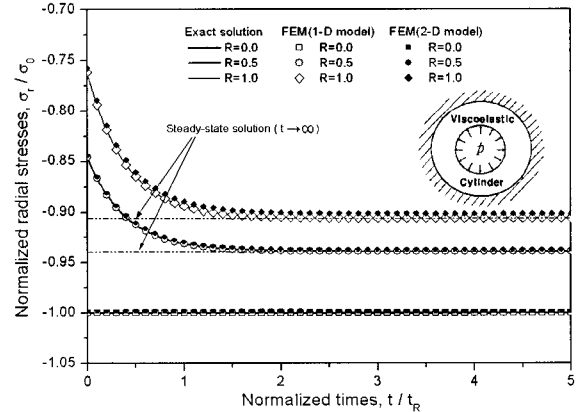


그림 5 외경이 고정되고 일정한 내압을 받는 점탄성 원통의 반경방향 응력

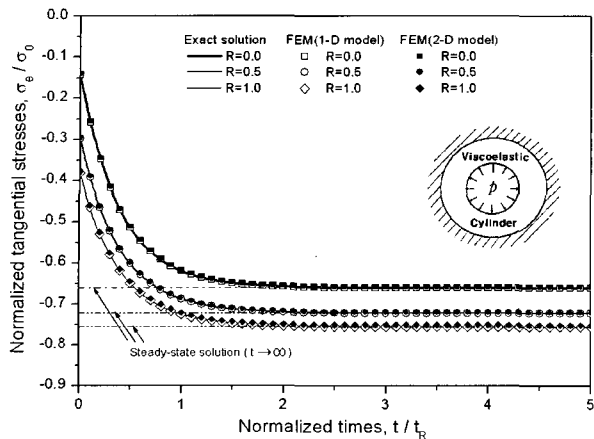


그림 6 외경이 고정되고 일정한 내압을 받는 점탄성 원통의 접선방향 응력

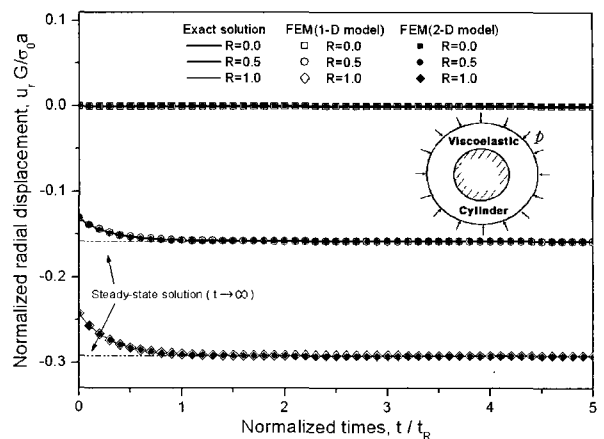


그림 7 내경이 고정되고 일정한 외압을 받는 점탄성 원통의 반경방향 변위

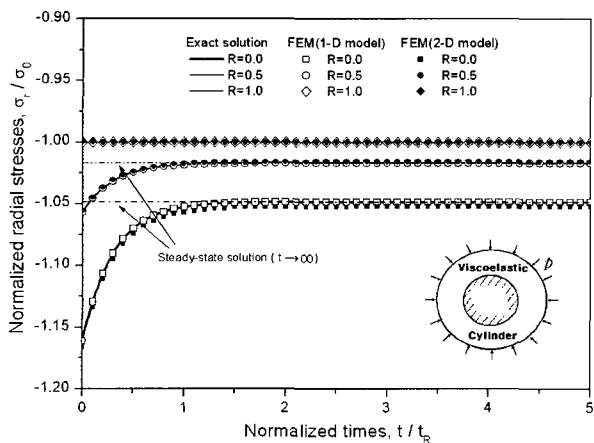


그림 8 내경이 고정되고 일정한 외압을 받는 점탄성 원통의 반경방향 응력

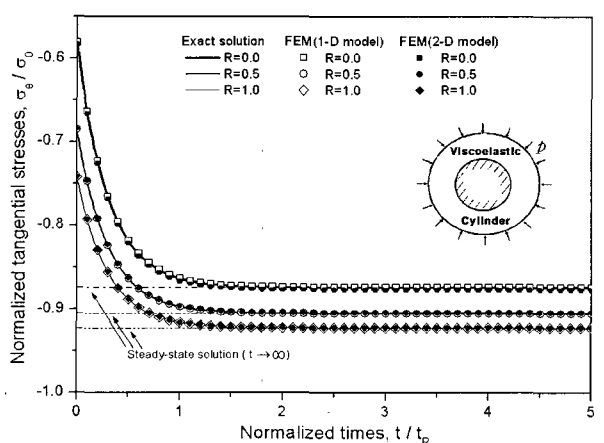


그림 9 내경이 고정되고 일정한 외압을 받는 점탄성 원통의 접선방향 응력

유한요소 모델링하였으며, 후자의 경우에는, 각 절점당 1개의 자유도를 갖는 총 100개의 2차 선요소를 사용하여 균등분할하였다. 점탄성 원통에 대한 그림 설명에서, Exact solution은 3.1절에서 유도한 이론해를 의미하며, FEM(2-D model)은 평면변형을 해석하고, FEM(1-D model)은 1차원 축대칭 해석을 의미한다.

그림 2는 내경 $r=a$ 인 곳에서 균일한 내압 $pH(t)$ 을 받고 외경 $r=b$ 에서는 구속이 없는 긴 점탄성 원통의 반경방향 변위해를 도기한 것이다. 여기서 $H(t)$ 는 Heaviside 단위계단함수를 의미한다. $R=0.0, 0.5, 1.0$ 에서, 시간이 증가함에 따라 변위 구배가 점차 감소하면서 반경방향 변위가 각각 7.49091, 6.12364, 5.23636으로 접근하는 크리이프 현상을 보이고 있다. 그림에서 Steady-state solution은 t 가 무한대에서의 점탄성해를 의미한다.

그림 3은 $r=b$ 인 곳에서 균일한 외압 $pH(t)$ 을 받고 $r=a$ 에서는 구속이 없는 긴 점탄성 원통의 반경방향 변위

해를 도기한 것이다. 내압을 받는 경우와 마찬가지로 시간이 증가하면서 $R=0.0, 0.5, 1.0$ 에서 반경방향 변위가 각각 $-7.85455, -5.57818, -5.78182$ 로 수렴하는 결과를 보여주고 있다. 참고로, 그림 2, 3에 해당되는 응력 분포는 두 경우 모두 탄성해와 일치함을 확인하였으며, 그 결과 그림은 생략한다.

그림 4~6에서는 $r=a$ 인 곳에서 균일한 내압 $pH(t)$ 을 받고 $r=b$ 에서 강체로 구속된 긴 점탄성 원통에 대한 수치결과를 이론해와 함께 도시하였으며, 그림 7~9는 $r=b$ 인 곳에서 균일한 외압 $pH(t)$ 을 받고, $r=a$ 에서 강체로 구속된 긴 점탄성 원통에 대한 수치결과를 이론해를 함께 도시하였다.

내경(또는 외경)에서 구속된 점탄성 원통은 시간의 경과에 따라 크리이프와 응력이완 현상을 모두 보이고 있으며, 강체 구속된 점탄성 원통의 경우가 구속이 안된 경우보다 변형이 상대적으로 작게 발생하며 정상해로 빠르게 수렴하

고 있음을 알 수 있다. 또한, 평면변형률 모델에 의한 수치해는 1차원 축대칭 모델에 의한 수치해에 비해 약간의 오차를 보이고 있다. 외경(또는 내경)에서 강체로 구속된 경우에는 구속된 부분을 보다 세밀하게 등분하면 수치결과(응력)의 정확도를 높일 수 있다.

4.2 점탄성 중공구

점탄성 중공구를 유한요소해석하기 위해서 그림 10(b)에서처럼 축대칭 모델과 그림 10(c)에서처럼 구대칭 모델 두가지로 수행하였다. 앞절의 원통해석과 동일한 단면적을 가지므로, 전자의 경우에는 그림 1(b)와 후자의 경우에는 그림 1(c)와 동일한 메쉬형상을 사용하였다.

점탄성 중공구에 대한 그림 설명에서 FEM(2-D model)은 2차원 축대칭 모델에 의한 해석이며, FEM(1-D model)은 1차원 구대칭 모델에 의한 해석을 의미한다.

그림 11은 내경 $r=a$ 인 곳에서 균일한 내압 $pH(t)$ 를

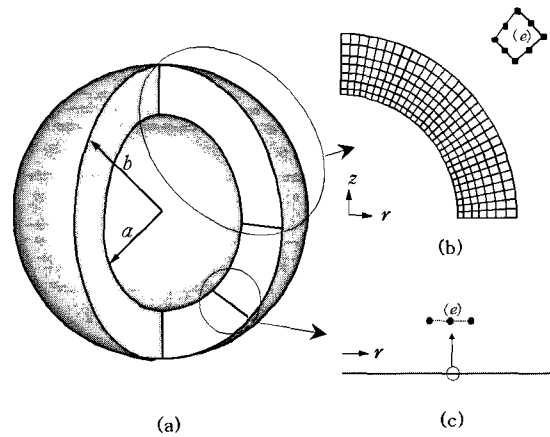


그림 10 (a) 점탄성 중공구의 기하학적 형상
(b) 축대칭 유한요소 모델 (2차원 모델)
(c) 구대칭 유한요소 모델 (1차원 모델)

받고 외경 $r=b$ 에서는 구속이 없는 점탄성 중공구의 반경방향 변위해를 도식한 것이다. $R=0.0, 0.5, 1.0$ 인 곳에서, 시간이 증가함에 따라 변위 구배가 점차 감소하면서

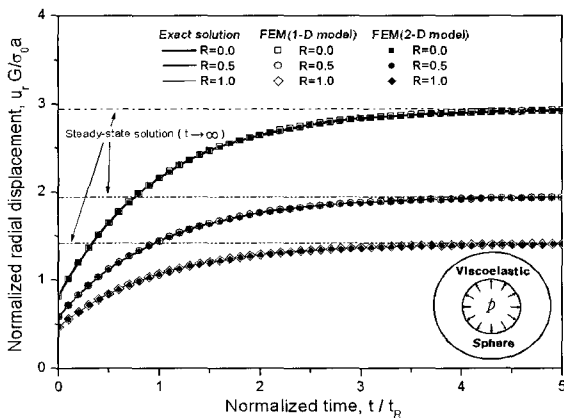


그림 11 일정한 내압을 받는 점탄성 중공구의 반경방향 변위

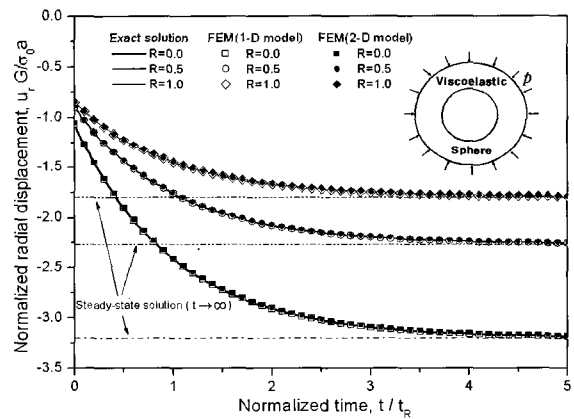


그림 12 일정한 외압을 받는 점탄성 중공구의 반경방향 변위

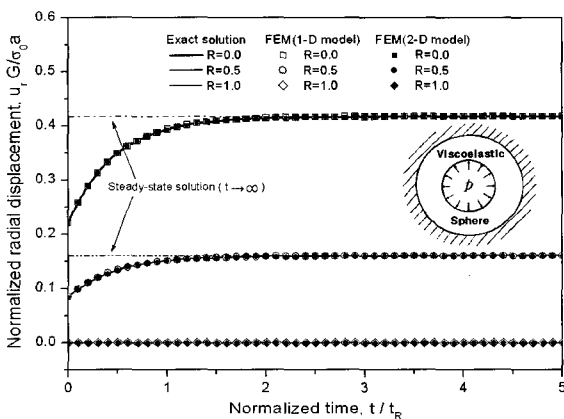


그림 13 외경이 고정되고 일정한 내압을 받는 점탄성 중공구의 반경방향 변위

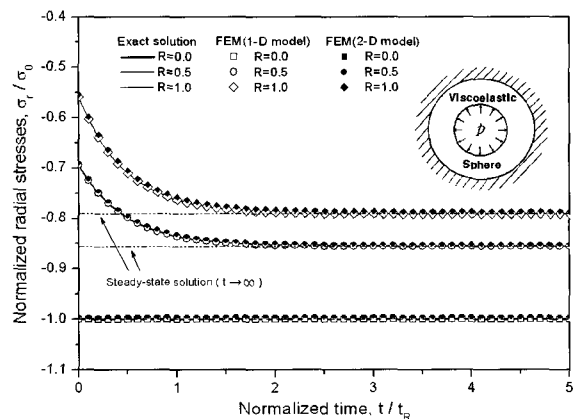


그림 14 외경이 고정되고 일정한 내압을 받는 점탄성 중공구의 반경방향 응력

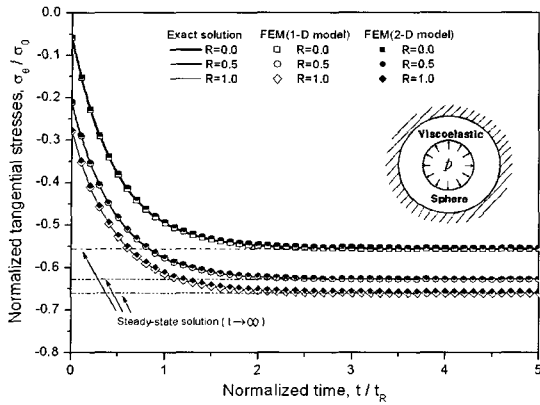


그림 15 외경이 고정되고 일정한 내압을 받는 점탄성 중공구의 접선방향 응력

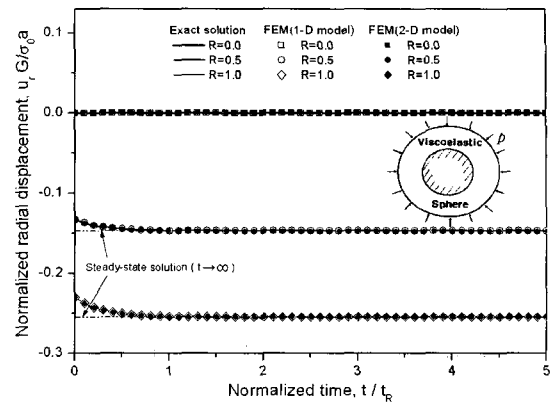


그림 16 내경이 고정되고 일정한 외압을 받는 점탄성 중공구의 반경방향 변위

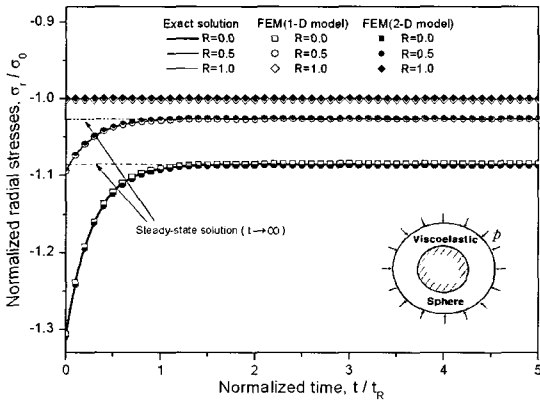


그림 17 내경이 고정되고 일정한 외압을 받는 점탄성 중공구의 반경방향 응력

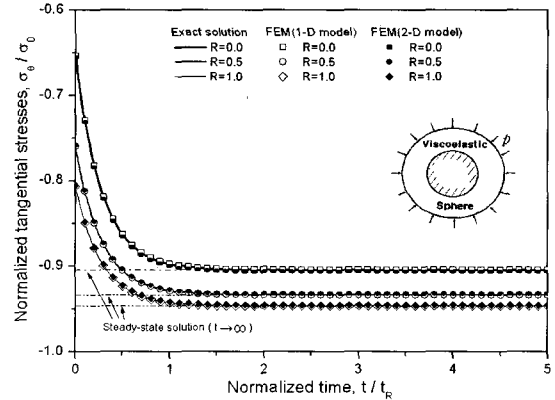


그림 18 내경이 고정되고 일정한 외압을 받는 점탄성 중공구의 접선방향 응력

반경방향 변위가 각각 2.94739, 1.95053, 1.42105로 접근하는 크리이프 현상을 보이고 있다.

그림 12는 $r = b$ 인 곳에서 균일한 외압 $pH(t)$ 를 받고 $r = a$ 에서는 구속이 없는 점탄성 중공구의 반경방향 변위해를 도기한 것이다. 내압이 작용하는 경우와 마찬가지로 시간이 증가함에 따라 $R = 0.0, 0.5, 1.0$ 인 곳에서의 반경방향 변위가 각각 $-3.19737, -2.26303, -1.79605$ 로 수렴하는 결과를 보여주고 있다.

그림 13~15에서는 $r = a$ 인 곳에서 균일한 내압 $pH(t)$ 을 받고 $r = b$ 에서 강체로 구속된 점탄성 중공구에 대한 수치결과를 이론해를 함께 도시하였으며, 그림 16~18은 $r = b$ 인 곳에서 균일한 외압 $pH(t)$ 를 받고 $r = a$ 에서 강체로 구속된 점탄성 중공구에 대한 수치결과를 이론해와 함께 도시하였다.

내경(또는 외경)에서 구속된 점탄성 중공구는 원통의 경우에서처럼 시간의 경과에 따라 크리이프와 응력이완 현상을 모두 보이고 있다. 그리고 자유도 수가 적은 1차원 구대칭 해석의 결과가 2차원 축대칭 해석보다 더 좋은 결과

를 보여 주고 있다. 또한, 경계조건이 같을 때, 이들 중공구와 원통의 해석결과들은 유사한 경향을 보이고 있으며 크기에서 차이를 보이고 있음을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 점탄성 중공구와 원통이 정적 하중을 받을 때에 대한 시간영역에서의 구대칭, 축대칭 유한요소해법의 정식화과정을 제시하였다. 다양한 경계조건을 갖는 중공구 및 원통을 대상으로, 평면변형률, 축대칭 및 구대칭 유한요소모델로 나누고, 원통과 중공구 단면의 기하학적 유사성을 이용하여 수치해석 하였으며, 크리이프, 응력이완, 1차원 모델의 장점을 설명하였다. 또한, 수치결과들을 상응원리를 통해 유도된 변위와 응력에 관한 이론해들과 비교하여 두 해가 서로 잘 일치함을 보여 제시된 유한요소해법의 타당성을 보였다. 그리고, 점탄성 중공구와 원통에 대한 이론해를 제시함으로써 앞으로 동적 해석이나 기타 응용 연구에 기본 자료가 되도록 하였다.