

고성능 유한요소를 이용한 평판구조물의 정적 및 동적해석

Static and Dynamic Analysis of Plate Structures using a High Performance Finite Element

김 선 훈†

Kim, Sun-Hoon

한 인 선*

Han, In-Seon

(논문접수일 : 2005년 4월 15일 ; 심사종료일 : 2005년 9월 7일)

요 지

본 논문에서는 평판구조물의 정적 및 동적해석에 사용할 목적으로 성능이 향상된 평판유한요소를 제시하였다. 이 요소는 비적합변위형과 선택적 감차적분방법 그리고 대체전단변형률장을 복합적으로 적용하여 각각의 장점들을 포함하는 향상된 거동을 보여주고 있다. 또한 비적합변위형의 적용으로 발생하는 조각시험의 실패 문제점을 해결하기 위하여 직접수정법을 평판유한요소의 개선에 사용하였다. 대표적인 검증문제에 대한 수치해석작업을 통하여 본 연구에서 개발한 요소는 가상적인 제로에너지모드 및 전단잠김현상의 발생과 같은 문제를 나타내지 않음을 알 수 있었다. 특히 찌그러진 형상으로 모형화 한 경우에 있어서도 전단잠김현상이 발생하지 않았다. 본 연구에서 수행한 동적반응해석 시험에 있어서도 이론해와 잘 일치하는 결과를 보여주었다.

핵심용어 : 평판유한요소, 전단잠김현상, 비적합 변위형, 대체전단변형률, 직접수정법, 동적해석

Abstract

In this paper an enhanced quadratic finite element for static and dynamic analysis of plate structures is presented. The performance of a proposed plate element is improved by the coupled use of non conforming displacement modes, the selective integration scheme, and the assumed shear strain fields. An efficient direct modification method is also applied to this element to solve the problem such as failure of the patch test due to the adoption of non conforming modes. The proposed quadratic finite element does not show any spurious mechanism and does not produce shear locking phenomena even with distorted meshes. It is shown that the results obtained by this element converged to analytical solutions very rapidly through numerical tests for standard benchmark problems. It is also noted that this element is applicable to transient dynamic analysis of Mindlin plates.

keywords : plate finite element, shear locking phenomenon, non-conforming displacement mode, substitute shear strain, direct modification method, dynamic analysis

1. 서 론

1970년 Ahmad 등에 의해 Mindlin 평판유한요소의 개념이 발표된 이후 지난 삼십 여년동안 Mindlin 평판요소에서 발생하는 전단잠김현상(Shear locking phenomena)을 제거하기 위해 많은 연구가 수행되어 발표된 바 있다. 이와 같은 노력의 결과로 몇 가지의 주목할만한 방법들이 제시되었는데, 대표적인 방법으로 감차적분방법의 적용(Pugh 등, 1978, Hughes 등, 1978), 비적합변위

형의 추가(Choi 등, 1988, Choi 등, 1989), 대체전단변형률장의 사용(Hinton 등, 1986; Donea 등, 1987) 등이다. 그럼에도 불구하고, 위에서 언급한 개선방법들을 단독으로 사용하였을 경우 Mindlin 평판요소의 거동개선에 있어서 또다른 문제점이 발생하게 되었다(Choi, 등 1991).

Mindlin 평판유한요소의 개선에 관한 초창기 연구에서는 비적합 모드를 변위장에 추가하면서 진행이 되어왔고, 이러한 시도는 계속적으로 발전하여 회전변위장에 비적합모드를 도입하는 기법이 보다 효율적이라는 사실이 밝혀졌다

† 책임저자, 정회원 · 영동대학교 토목환경공학과 부교수

전화: 043-740-1171 ; Fax: 043-740-1179

E-mail: kimsh@youngdong.ac.kr

* 한국과학기술원 건설환경공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

(Kim 등, 1992). Serendipity family계인 8절점 Mindlin 평판요소에 감차적분방법을 적용하였을 경우에는 특정 두께 폭 비율에서 전단잠김현상이 발생하는 좋지 않은 결과를 보여주었다. 또한 대체전단변형률장 만을 적용한 8절점 평판요소의 경우, 평판구조물을 찌그러진 형태의 Mesh를 사용하여 평판 구조물을 모형화 하면 상당한 오차를 보여주는 나쁜 결과를 나타내었다(Wilson 등, 1990). 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 본 연구에서는 8절점 Mindlin 평판유한요소에 비적합변위형의 추가와 선택적감차적분방법, 그리고 대체전단변형률장을 복합적으로 적용하였다. 또한 비적합변위형의 추가로 발생하는 유한요소의 조각시험 실패의 문제점 제거를 위하여 이 요소에 직접수정법을 적용하였다. 본 연구에서 제안한 평판유한요소의 성능개선 결과와 정확성 검토를 위하여 대표적인 수치검증예제에 대한 해석결과를 제시하였다. 또한 제안된 평판유한요소에 동적평형방정식 알고리즘을 추가하여 평판구조물의 동적구조해석이 가능하도록 하였다.

2. 비적합 Mindlin 평판요소

2.1 평판요소의 구성식

전단 변형을 고려하는 Mindlin 평판요소에서 전단 변형률은 평판 처짐량의 미분치와 회전 변위량의 차이로 정의되며, 그림 1에서와 같이 1개의 수직변위성분(w)과 2개의 회전변위성분 (θ_x, θ_y)은 동일한 차수의 형상함수로 가정할 수 있다(최창근, 2002; Zienkiewicz 등, Taylor 1989; Bathe 1982).

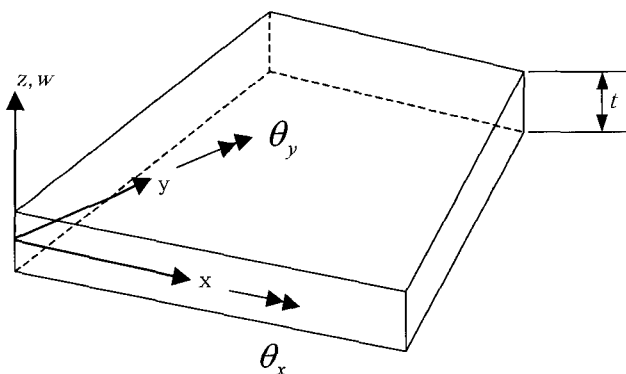


그림 1 Mindlin 평판의 형상과 변위장

비적합변위형이 추가된 Mindlin 평판요소의 요소 내 변위장은 다음과 같이 가정할 수 있다(최창근, 2002).

$$\begin{aligned} w &= \sum N_i w_i + \sum \bar{N}_j \bar{w}_j \\ \theta_x &= \sum N_i \theta_{xi} + \sum \bar{N}_j \bar{\theta}_j \\ \theta_y &= \sum N_i \theta_{yi} + \sum \bar{N}_j \bar{\theta}_j \end{aligned} \quad (1)$$

오른손법칙(right hand rule)의 기호규약을 적용한다면 휨변형률과 전단변형률은 각각 다음 식과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_{y,x} \\ -z\theta_{x,y} \\ -z(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{B}_b \mathbf{u} + \bar{\mathbf{B}}_b \bar{\mathbf{u}} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,y} - \theta_x \\ w_{,x} + \theta_y \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{B}_s \mathbf{u} + \bar{\mathbf{B}}_s \bar{\mathbf{u}} \quad (3)$$

여기서 변형률과 변위 사이의 관계를 나타내는 [B]행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & z \langle \frac{\partial N_i}{\partial x} \rangle \\ \langle 0 \rangle & -z \langle \frac{\partial N_i}{\partial y} \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & -z \langle \frac{\partial N_i}{\partial x} \rangle & z \langle \frac{\partial N_i}{\partial y} \rangle \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_b = \begin{bmatrix} \langle 0 \rangle & z \langle \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial x} \rangle \\ -z \langle \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial y} \rangle & \langle 0 \rangle \\ -z \langle \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial x} \rangle & z \langle \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial y} \rangle \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N_i}{\partial y} \rangle & -\langle N_i \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle \frac{\partial N_i}{\partial x} \rangle & \langle 0 \rangle & \langle N_i \rangle \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_s = \begin{bmatrix} -\langle \bar{N}_j \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle \bar{N}_j \rangle \end{bmatrix} \quad (5)$$

식 (2)와 식 (3)을 압축하여 나타내면 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \bar{\mathbf{B}}_b \\ \mathbf{B}_s & \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

8절점 Serendipity 평판요소에 사용 가능한 비적합변위형의 기본형태식을 표현하면 다음과 같은 형상함수의 형태로 주어진다(그림 2 참조).

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1 - \xi^2), & \bar{N}_2 &= \eta(1 - \eta^2) \\ \bar{N}_3 &= \xi\eta(1 - \xi^2), & \bar{N}_4 &= \xi\eta(1 - \eta^2) \\ \bar{N}_5 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (7)$$

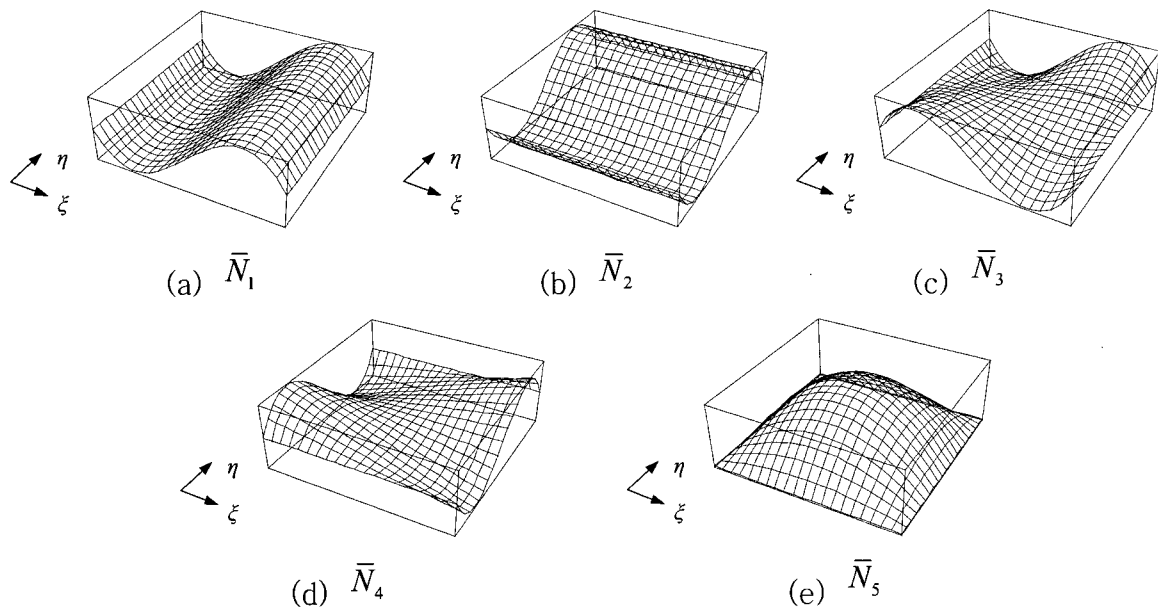


그림 2 8절점 요소의 비적합 변위형

식 (7)에서 주어진 모드는 각 절점에서 영값을 가지며 원래의 등매개 변수 요소내에서 제약된 부적합한 변위모드를 풀어주어 실제 변위를 복원하게 된다. 추가적인 미지수는 요소내의 최소변형률 에너지이론에 의해 결정될 수 있다. 추가적인 비적합변위형에 의해 최종적인 강성행렬은 등매개 변수 요소로부터 확장되어 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cn} \\ K_{cn}^T & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

확장된 강성행렬은 정적응축(Static condensation)기법을 사용하면 다음과 같이 원래의 평판요소와 같은 차수를 가지는 강성행렬로 만들 수 있다.

$$K' = K_{cc} - K_{cn} K_{nn}^{-1} K_{cn}^T \quad (9)$$

비적합변위형이 추가된 유한요소의 응력은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\sigma = D(B - \bar{B}K_{nn}^{-1}K_{cn}^T)u \quad (10)$$

윗식에서 우측의 첫 번째 항은 일반적인 유한요소에서 응력계산시 사용되는 것이며, 두 번째 항이 비적합변위형의 추가로 인한 영향을 나타내는 것이다.

2.2 비적합변위형 평판유한요소의 개선

평판유한요소의 변위장에 비적합변위형을 추가하면 요소

내의 절점변위수를 증가시켜줌으로써 전단구속현상의 발생을 제거하는데 크게 도움이 되고, 평판요소의 수렴속도를 크게 개선시켰지만 계산시간의 증가라는 단점을 보여주었다(Choi 등, 1988). 따라서 요소의 정확도를 크게 떨어뜨리지 않는 범위 내에서 비적합변위형의 추가를 최소화하고 요소의 강성행렬 계산시 감차적분방법을 사용하는 것이 바람직한 것으로 발표된 바 있다(Choi 등, 1989).

그 동안 비적합변위형 평판유한요소의 개선을 위해 감차적분방법을 혼합 사용하는 기법이 적용되어 여러 종류의 평판유한요소가 발표된 바 있으며, 그 가운데 가장 대표적인 것으로 NC-QH가 있다(Kim 등, 1992). 이 요소는 그림 2의 비적합변위형을 8절점 평판유한요소의 회전변위에 추가하고 강성행렬의 계산시 선택적분방법을 사용하였다. NC-QH요소는 가상적인 제로에너지모드의 발생이나 전단구속현상의 발생과 같은 문제를 나타내지 않았으며, 특히 찌그러진 형상으로 모형화한 경우와 경계조건이 아주 심하게 억제된 문제에서도 전단구속현상을 나타내지 않았다. 또한 수렴도시험에서도 탁월한 결과를 보여주었으나 이 요소는 비적합변위형을 추가하는 유한요소에서 발생하는 조각시험의 실패문제가 해결되지 못하였다(Choi 등, 2001).

3. 8절점 평판요소의 대체전단 변형률장

식 (6)에서 설명한 B_s 가 그대로 사용될 경우 전단잠김 현상이 발생하게 된다. 따라서 본 연구에서는 B_s 를 \tilde{B}_s 로 수정하여 요소에 적용하였다(Choi 등, 2001) 자연좌표계

상의 전단변형률은 다음과 같은 다항식으로 가정된다.

$$\gamma' = \begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{a} \quad (11)$$

이를 직각좌표계상의 전단변형률로 나타내면 다음과 같다.

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}\gamma' \quad (12)$$

여기서, \mathbf{J} 는 일반적인 2×2 Jacobian $x, y \rightarrow \xi, \eta$ 변환행렬이다.

요소의 j-k 모서리에 대한 접선방향 전단변형률은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\gamma_{edge}^{j-k} = \cos \beta_{edge}^{j-k} \gamma_\xi + \sin \beta_{edge}^{j-k} \gamma_\eta \quad (13)$$

여기서 β_{edge}^{j-k} 는 ξ 방향과 요소의 j-k 모서리가 이루는 각을 의미한다.

그림 3은 접선방향 전단변형률을 산정하기 위한 적분점의 위치를 나타내고 있다. 이때, 접선방향 전단변형률은 각 적분점에서의 자연좌표계상의 전단변형률로 나타나게 되며 최종적으로 직각 좌표계에서의 전단변형률로 변환된다. 이에 따라 전단변형률 행렬 B_s 는 일련의 변환과정에 의해 \tilde{B}_s 로 대체된다.

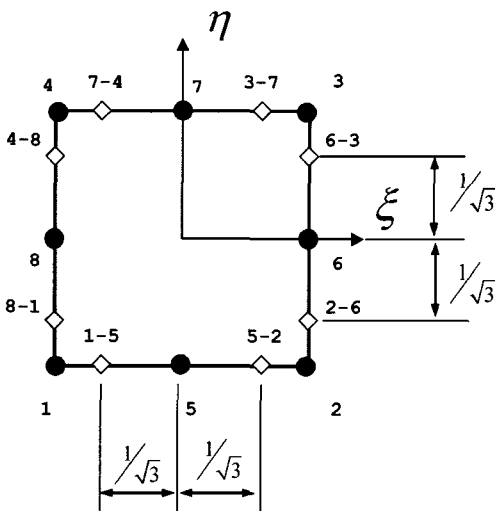


그림 3 요소내 각 모서리에서의 적분점의 위치

자연좌표계의 ξ, η 방향을 따라 요소 내 8개의 적분점

에 해당하는 접선방향 전단변형률을 산정하면, j-k 모서리에서 j번째 적분점의 값과 변형식과의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{P}(\xi_i, \eta_i, \beta_{edge}^{j-k}) \mathbf{a} = \gamma_{edge} \quad (14)$$

여기서, $\gamma_{edge} = \langle \gamma_{edge}^{1-5}, \gamma_{edge}^{5-2}, \gamma_{edge}^{2-6}, \gamma_{edge}^{6-3}, \gamma_{edge}^{4-7}, \gamma_{edge}^{7-3}, \gamma_{edge}^{1-8}, \gamma_{edge}^{8-4} \rangle$ 는 미리 주어지는 전단변형률 값을 의미한다. 위 식으로부터,

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}^{-1} \gamma_{edge} \quad (15)$$

접선방향 전단변형률은 8개 적분점에 대한 자연전단변형률과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\gamma_{edge} = \begin{Bmatrix} \gamma_{edge}^{1-5} \\ \gamma_{edge}^{5-2} \\ \gamma_{edge}^{2-6} \\ \gamma_{edge}^{6-3} \\ \gamma_{edge}^{4-7} \\ \gamma_{edge}^{7-3} \\ \gamma_{edge}^{1-8} \\ \gamma_{edge}^{8-4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_\xi^{1-5} \\ \gamma_\eta^{1-5} \\ \gamma_\xi^{5-2} \\ \gamma_\eta^{5-2} \\ \vdots \\ \gamma_\xi^{8-4} \\ \gamma_\eta^{8-4} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \tilde{\gamma} \quad (16)$$

여기서,

$$\tilde{\gamma}' = \langle \gamma_\xi^{1-5}, \gamma_\eta^{1-5}, \gamma_\xi^{5-2}, \gamma_\eta^{5-2}, \dots, \gamma_\xi^{8-4}, \gamma_\eta^{8-4} \rangle^T \quad (17)$$

자연좌표계의 값을 직각좌표계로 변환하면,

$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{1-5} & & & \\ & \mathbf{J}_1^{1-5} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_8^{8-4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{1-5} \\ \gamma_{xz}^{1-5} \\ \vdots \\ \gamma_{xz}^{8-4} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \tilde{\gamma} \quad (18)$$

여기서, $\tilde{\gamma} = \langle \gamma_{yz}^{1-5}, \gamma_{xz}^{1-5}, \gamma_{yz}^{5-2}, \gamma_{xz}^{5-2}, \dots, \gamma_{yz}^{8-4}, \gamma_{xz}^{8-4} \rangle^T$ 와 \mathbf{J}_i^{j-k} 는 j-k 모서리에 대한 j번째 적분점에서의 전단변형률값과 2×2 Jacobian행렬을 의미한다.

각 적분점에서의 직각좌표계 전단변형률과 절점변위와의 관계는 다음과 같다.

$$\tilde{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{1-5} \\ \gamma_{xz}^{1-5} \\ \vdots \\ \gamma_{xz}^{8-4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{yz}^{1-5} \\ \mathbf{B}_{xz}^{1-5} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{xz}^{8-4} \end{Bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{B}_s \mathbf{u} \quad (19)$$

여기서, B_s 는 일반적인 전단변형률 행렬이다. 최종적으로 대체전단변형률 행렬은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\gamma = J^{-1}Aa = J^{-1}AP^{-1}\gamma_{edge} = J^{-1}AP^{-1}T\tilde{\gamma}' = J^{-1}AP^{-1}TCB_s u = \tilde{B}_s u \quad (20)$$

여기서,

$$\tilde{B}_s = J^{-1}AP^{-1}TCB_s \quad (21)$$

4. 여러가지 개선 방법의 복합적인 이용

효과적이고 보다 개선된 Mindlin 평판 요소의 개발을 위해 NC-QH 요소(Kim 등, 1992)에 추가적으로 대체전단변형률장을 적용하였다. 따라서 본 연구에서는 선택적감차적분과 대체전단변형률장 그리고, 비적합변위형을 조합하여 사용하였다. 전단잠김 현상을 제거하기 위한 한가지 방법은 전단변형률 식에서 회전에 해당하는 성분의 다항식 차수를 줄이는 것이다. 이를 위해 전단변형률을 수직변위의 미분형태로 구하는 것이 아니라 변위와는 독립적으로 적절히 선택된 보간함수를 통해 변위의 경우와 같은 방법으로 전단변형률을 가정할 수 있다. 이때 전단변형률장은 감차적분점 또는 특정한 표본점에서 주어지고 중립축의 회전과 경사로 주어지는 원래의 전단변형률장은 대체된다. 대체전단변형률장을 도입한 Mindlin 평판요소는 회전자유도에 대하여 비적합변위형을 추가함으로써 보다 개선된 거동을 보여줄 수 있다. 회전자유도에 추가된 비적합변위형은 전단거동보다 휨거동에 대한 개선이 두드러지게 나타나는데 이는 전단거동에 대한 개선이 이미 대체전단변형률장에 의해 어느 정도 이루어졌기 때문이라고 볼 수 있다. 따라서, 평판 요소의 최종적인 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \sum \tilde{N}_i \begin{pmatrix} \omega_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix} + \sum \bar{N}_j \begin{pmatrix} \omega_j \\ \bar{\theta}_{xj} \\ \bar{\theta}_{yj} \end{pmatrix} \quad (22)$$

여기서, \tilde{N}_i 는 전단변형에서의 회전변위에 대한 수정이 반영된 것으로 휨변형률 성분에 대하여는 원래의 형상함수와 동일하다. 식 (22)와 같이 새롭게 구성된 변위장은 조각시험을 통과하지 못한다. 이는 회전항이 휨변형률항과 전단변형률항내에 같이 존재하는 것에 기인하는데, 추가적인 비적합모드를 회전항에 추가함에 따라서 정의된 부행렬 K_{cn} 의 정식화에서 휨변형률과 전단변형률의 커플링이 발생하기 때문이다.

전단거동 및 휨거동의 커플링은 순수전단상태를 파괴할 수 있기 때문에 NC-QH와 같은 요소가 조각시험에 실패

하는 결과를 초래하였다. 따라서 새롭게 제안된 Mindlin 평판요소를 조각시험에 통과시키기 위해 정식화에 대한 추가적인 수정이 필요하게 되었다.

5. 조각시험을 통과시키기 위한 방법

요소체눈이 세분화되어 감에 따라 참값에 수렴하도록 하기 위하여 비적합 유한요소에서는 완화된 제한조건(relaxed restriction)으로서 조각시험(patch test)을 만족하도록 하고 있다. 이 조각시험을 통과시키기 위한 방안으로써 Taylor방법의 개념(Taylor 등, 1976)에 B-bar방법의 개념(Wilson and Ibrahimvegovic 1990)을 첨가하여 비적합변위형의 미분값을 보정하는 방법인 직접수정방법(Choi 등, 2001)을 사용하였다. 이 방법은 요소중앙위치에서의 Jacobian 행렬을 이용하여 비적합변위형의 미분값을 간단하게 수정할 수 있는 장점이 있다. 비적합변위형을 \bar{N}_j 라 하고, Taylor방법의 개념에 따라 Jacobian행렬 $J(\xi, \eta)$ 대신 $\xi = \eta = 0$ 에서의 Jacobian행렬 $J(0,0)$ 의 역행렬 $J^{-1}(0,0)$ 를 비적합변위형의 미분에 적용한다면, 일정변형률상대에서 비적합변위형에 의해서 변형에너지를 야기하지 않을 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{|J(\xi, \eta)|} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi_\alpha} J_{j\alpha}^{-1}(0,0) \right) J(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (23)$$

비적합변위형의 미분값이 식 (23)을 만족시키기 위하여 상수값 $C_j \alpha$ 를 도입하여 수정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial x_k} \right)^* &= \frac{1}{|J(\xi, \eta)|} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ J_{j\alpha}^{-1}(0,0) \left(\frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi_\alpha} + c_{j\alpha} \right) \right\}, \\ c_{j\alpha} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial \xi_\alpha} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (24)$$

즉, 비적합변위형의 자연좌표계에 대한 미분값을 수정계수 $C_j \alpha$ 를 이용하여 직접 수정함으로써 비적합변위에 의한 바람직하지 못한 변형성분이 제거되고 조각시험을 통과하는 것이 보장된다.

그러나 회전변위장에 비적합 변위형을 추가하면 식의 \bar{B}_s 에서 알 수 있듯이 비적합 변위형의 미분값이 아니라 비적합 변위 자체에 대한 식으로 표현되므로 본 연구에서는 다음과 같이 직접수정방법을 확대 적용하여 비적합 변위형 자체에 대한 수정이 이루어지도록 하였다.

$$\int_{\Omega} \bar{N}_j^* d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{|J(\xi, \eta)|} (\bar{N}_j + d_j) d\Omega = 0, \quad d_j = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N}_j d\xi d\eta \quad (25)$$

여기서, d_j 는 j 번째 비적합 변위형에 대한 수정 계수이며, 수정된 비적합 변위형은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{N}_1^* &= \xi(1-\xi^2), \quad \bar{N}_2^* = \eta(1-\eta^2), \\ \bar{N}_3^* &= \xi\eta(1-\xi^2), \quad \bar{N}_4^* = \xi\eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_5^* = (1-\xi^2)(1-\eta^2) - \frac{4}{9} \end{aligned} \quad (26)$$

회전변위장에 추가되는 식 (26)과 같은 비적합 변위는 요소 내에서 평균적으로 0이므로 별도로 B-bar방법에 의하지 아니하고도 조각시험을 통과하는 것이 보장된다. B-bar방법을 수행하지 않기 때문에 해석 코드의 효율화가 가능하며 또한 절점당 다른 회전 변위가 발생할 수 있도록 제약을 완화시키고자 하는 비적합 변위형의 원래 목적에도 부합된다. 이와 같이 구한 개선된 비적합 변위형을 이용하여 \bar{B}_s^* 를 구할 수 있다.

전단에 대한 변형도 변위 관계 행렬을 대체하면 최종적으로 다음과 같이 변형도를 구할 수 있다.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \bar{B}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \bar{U} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_b \\ \bar{B}_s^* \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} \bar{B}_b^* \\ \bar{B}_s^* \end{bmatrix} \bar{U} = \begin{bmatrix} B_b & \bar{B}_b^* \\ \bar{B}_s & \bar{B}_s^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \bar{U} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

여기서, B_b 는 휨변형률행렬, \bar{B}_s 는 대체전단변형률장에 의해 수정된 전단변형률행렬, \bar{B}_b^* 와 \bar{B}_s^* 는 비적합모드의 휨 및 전단변형률행렬이다. 식 (27)의 변형률행렬에 의해 구성되는 전체강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_{cc} &= \int_V B_b^T E_b B_b dV + \int_V \bar{B}_s^T E_s \bar{B}_s dV \\ K_{cm} &= \int_V B_b^T E_b \bar{B}_b^* dV + \int_V \bar{B}_s^T E_s \bar{B}_s^* dV \\ K_{mm} &= \int_V \bar{B}_b^{*T} E_b \bar{B}_b^* dV + \int_V \bar{B}_s^{*T} E_s \bar{B}_s^* dV \end{aligned} \quad (28)$$

식 (28)에서 몇 가지의 다양한 요소를 구성할 수 있다. 본 연구에서 보다 향상된 거동을 나타내는 요소개발을 위해 사용된 세 가지 개선 방법은 회전자유도에 대한 비적합모드의 추가, 선택적 감차적분의 사용 그리고 대체전단변형률장의 사용이다. 요소의 구성과정에서 비적합모드는 식 (26)에 제시된 형상함수들을 다양하게 추가할 수 있으나,

2개의 비적합모드(\bar{N}_1, \bar{N}_2)를 적용한 평판요소 NMS-8DMM(Nonconforming Modified integration Shear substituted 8-node Direct Modification Method)가 가장 우수한 것으로 판명되었다.

6. 동적평형방정식 및 시간적분방법

NMS-8DMM 요소를 사용한 구조물의 동적평형방정식은 다음과 같이 널리 알려진 행렬식으로 표현가능 하다.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R(t) \quad (29)$$

여기서, M, C, K 는 각각 구조물의 질량행렬, 감쇄행렬, 강성도행렬을 의미하고, $R(t)$ 는 임의의 시간 t 에서의 외력 벡터를 의미한다.

평판유한요소의 질량행렬은 요소의 변위성분을 근사화 하는데 사용하는 형상함수와 동일한 것을 사용하면 다음과 같이 구할 수 있다. 즉, 요소 내 두께가 일정하다고 가정하고, i 와 j 를 요소 내 절점이라고 하면 요소의 질량행렬은 다음과 같다.

$$M_{ij} = c_{ij} \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^2}{12} \end{bmatrix} \quad (30)$$

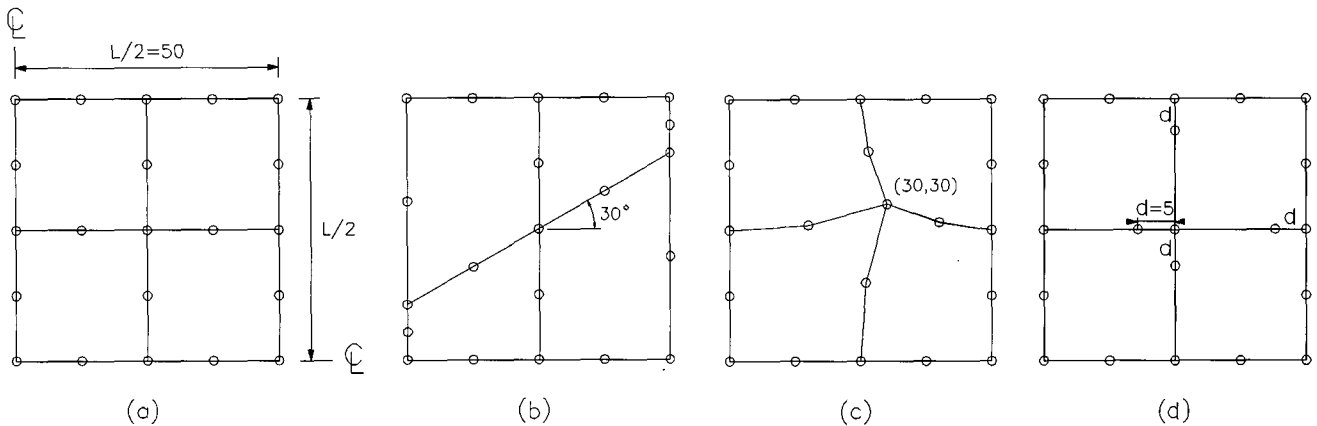
여기서, c_{ij} 는 질량행렬의 계수로서 다음과 같이 형상함수로부터 계산이 가능하다.

$$c_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho N_i N_j |J| d\xi d\eta \quad (31)$$

여기서, ρ 는 평판구조물의 단위질량을 의미한다.

본 연구에서 제안한 평판유한요소 NMS-8DMM의 질량행렬 계산에서는 식 (31)의 질량행렬 계수 계산 시 8절점 요소의 형상함수만을 사용하고 비적합변위형의 추가는 생략하였는데, 이는 질량행렬에 있어서 비적합변위형의 영향이 매우 작기 때문이다. 감쇄행렬의 경우 강성행렬과 질량행렬의 선형조합으로 나타내는 Rayleigh Damping방법을 사용하였다.

식 (29)의 구조물 동적평형방정식을 계산하기 위해서 본 연구에서는 여러 시간적분방법 가운데에서 일정평균가속도방법으로서 조건 없이 안정된 결과를 보여주고 있는 Newmark방법을 사용하였다.



$E = 3.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.3, L = 100 \text{ cm}$

그림 4 전단잠김현상 시험에 사용된 요소형태(고정지지된 정사각형 평판의 1/4)

7. 수치해석

7.1 고유치 시험과 기하학적 등방성

본 연구에서 개발된 요소에서의 가상적인 제로에너지모드 (Spurious zero energy mode)의 존재여부를 검토하기 위하여 개별 요소강성행렬을 이용한 고유치해석을 수행하였다. 평판형 요소는 구속조건이 없는 하나의 요소에 대하여 3개의 제로에너지모드가 존재하여야 한다(허명재 등, 2000). NMS-8DMM은 강체모드에서 3개의 제로에너지 모드만이 존재하였고 가상적인 제로에너지모드는 없는 것으로 판명되었다. 또한 본 연구에서 검토된 평판유한요소들에 대한 기하학적 등방성 유지 여부도 benchmark 문제에 대하여 검토하였으며, 검토한 모든 유한요소들은 기본적으로 기하학적 등방성을 유지함을 알 수 있었다.

7.2 전단잠김 시험

제안된 요소의 전단잠김 시험을 위하여 고정지지된 정사각형 평판구조물에 대하여 다양한 두께-폭 비에서 일련의 불규칙적인 요소형태에 대한 구조해석을 수행하였다. 시험에 사용된 요소형태는 그림 4와 같다. 그림에서 (a)는 정사각형 형태로 모형화한 경우이고, (b)는 30°경사를 갖는 형태로 모형화한 경우이다. 또한 (c)는 곡선형태로 모형화한 경우이고, (d)는 요소 내 질점의 위치를 이동시켜 모형화한 경우이다. 전단잠김시험을 위하여 4가지 유한요소형태에 대하여 두께-폭 비를 1/10에서 1/10000까지 변화시켜 가면서 해석을 수행하였으며, 등분포하중을 받는 경우에 대하여 중앙점에서의 수직처짐을 정규화시켜 그림 5

에 나타내었다. 그림 5에 나타난 바와 같이 본 연구에서 제안한 NMS-8DMM요소는 모든 형태의 요소에서도 전단잠김현상이 발생하지 않음을 보여주었다.

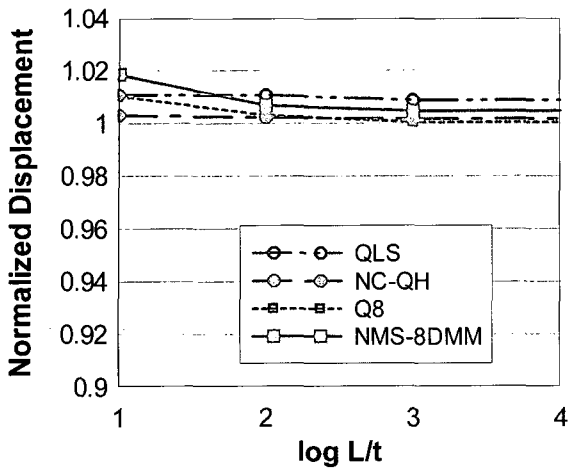
7.3 정사각형 평판의 수렴성 및 부재력분포

본 연구에서 제안한 요소의 수렴성을 검증하기 위해 두께/길이의 비가 1/100인 정사각형 평판에 대한 해석을 수행하였다. 등분포 하중을 재하하고 전체구조물의 1/4모델링으로 1×1, 2×2, 4×4의 체눈에 대한 해석결과를 단순지지(SS) 및 고정지지(CL) 경계조건에 대하여 각각 구하였다(그림 6 참조). 그림 6에서 나타난 바와 같이 NMS-8DMM요소를 비롯하여 검토된 모든 요소들이 정확해에 잘 수렴하고 있음을 알 수 있다.

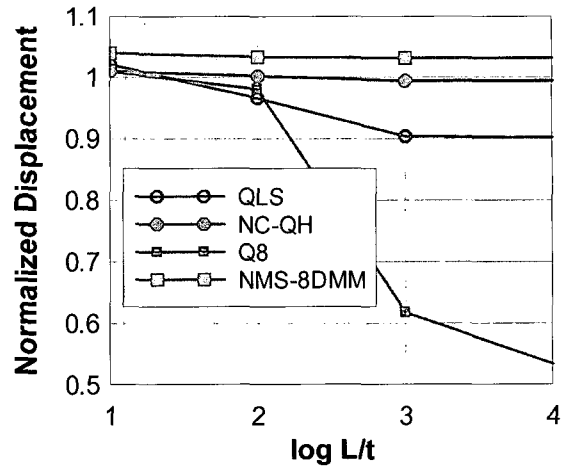
또한 등분포하중이 재하된 단순지지 정사각형 평판구조물의 1/4를 그림 7과 같이 모델링하여 발생하는 부재력의 분포를 살펴보았다. 그림 8에 나타난 바와 같이 x축방향으로 가우스 적분점에서의 휨모멘트 및 전단력분포를 다른 요소들의 결과와 비교 하였다. 전단력분포에 있어서 Q8(Donea 등, 1987)과 MITC8(Bathe, 1982) 요소가 불안정한 분포를 보이는 반면에 NMS-8DMM요소는 안정된 결과를 나타내는 것을 알 수 있다.

7.4 동적 응답 시험

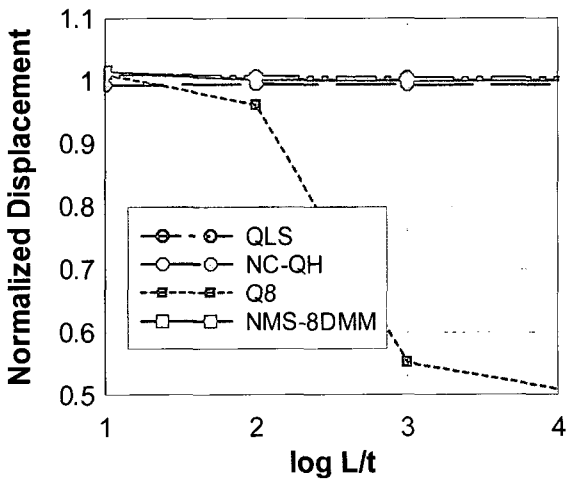
요소의 동적응답시험을 위해 고정지지된 원형평판구조물에 면에 수직인 방향으로 균등 단위분포하중이 갑자기 작용하는 경우(Suddenly applied uniform load)에 대한 해석을 수행하여 시간변화에 대한 평판중심점에서의 수직변위



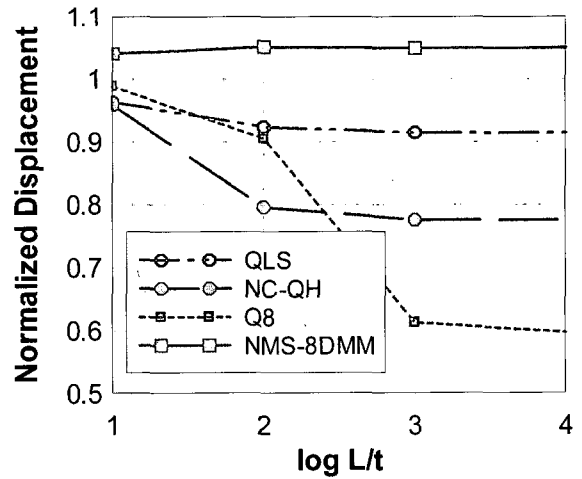
(a) 요소형태 (a)



(b) 요소형태 (b)

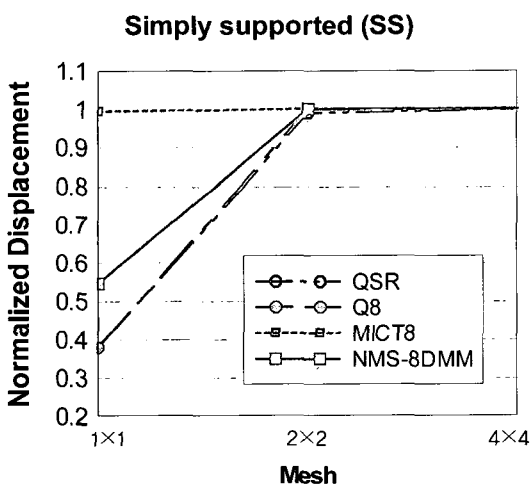


(c) 요소형태 (c)

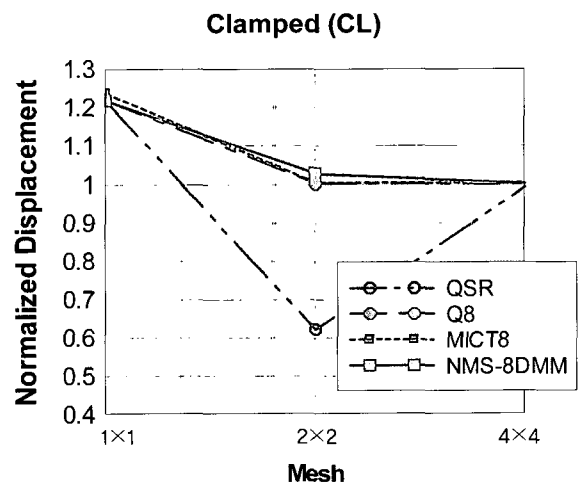


(d) 요소형태 (d)

그림 5 전단잠김시험 결과



(a) 단순지지



(b) 고정지지

그림 6 정사각형 평판의 중앙에서의 정규화된 변위

값의 변화를 검토하였다. 해석대상 구조물은 그림 9와 같이 대칭성을 이용하여 전체 구조물의 1/4만을 모형화하였다. 해석구조물의 형상과 재료특성치는 그림 9와 같다.

Newmark방법에 의한 시간적분방법을 도입하여 중심점에서의 시간에 따른 수직변위의 변화를 Reismann의 결과(Reismann 등, 1969)와 비교하여 그림 10에 나타내었다. 해석은 시간간격(DT)이 25sec와 1sec인 경우에 대하여 수행하였다. 해석결과는 해석시간 간격을 줄임에 따라 비교해인 Reismann solution에 근접하여 시간간격이 1sec인 경우 거의 일치함을 보여주었다. 또한 시간간격이 1sec인 경우에 대하여 구조물의 중앙점 부근에서 응력(σ_x)의 변화를 그림 11에 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 본 연구에서 제안한 평판유한요소의 응력해석결과는 이론해와 잘 일치함을 보여주고 있다.

8. 결 론

본 연구에서는 기존의 평판요소들에서 나타나는 문제점을 개선한 평판유한요소를 제시하였다. 이 요소는 비적합

변위형과 선택적 감차적분방법 그리고 대체전단변형률장을 복합적으로 적용하여 각각의 장점들을 포함하는 향상된 거동을 보여주고 있다. 특히, 입체요소에 적용성이 검증된 바 있는 직접수정법을 평판요소에도 확대 적용하였으며, 비적합변위형의 미분값만이 아니라 비적합변위형에 직접적으로 적용하여도 만족할만한 결과를 나타냈음을 입증하였다. 대표적인 검증문제에 대한 수치해석작업을 통하여 본 연구에서 개발한 NMS-8DMM요소는 조각시험을 통과하고 있으며, 가상적인 제로에너지모드 및 전단잠김현상의 발생과 같은 문제를 나타내지 않음을 알 수 있었다. 특히 찌그러진 형상으로 모형화 한 경우와 경계조건이 억제된 문제에 있어서도 잠김현상이 발생하지 않았으며, 본 연구에서 수행한 동적반응해석 시험에 있어서도 이론해와 잘 일치하는 결과를 보여주었다.

감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초전력연구원(과제관리번호 R-2004-B-217-0-00) 주관으로 수행된

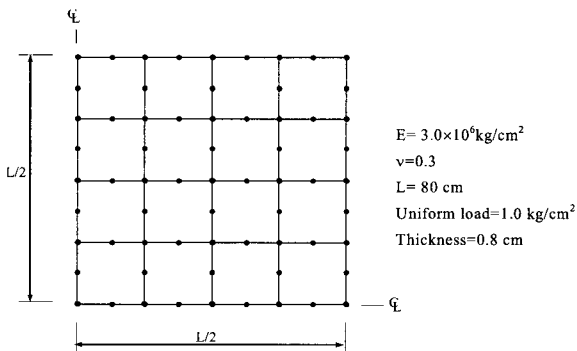


그림 7 정사각형 평판 예제 (4x4 mesh)

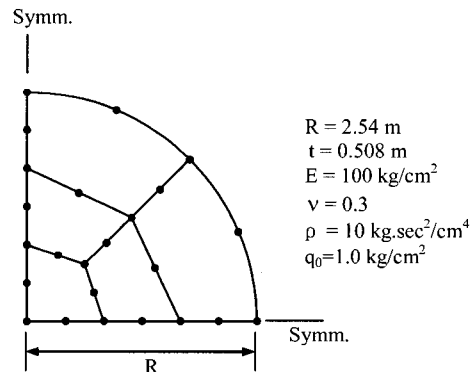
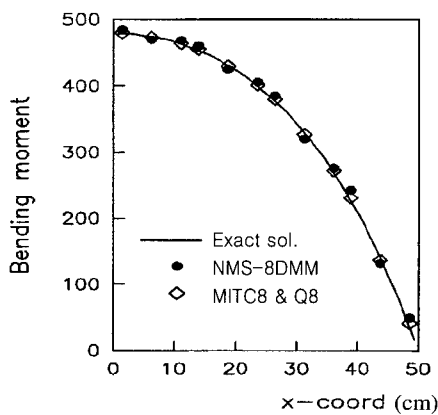
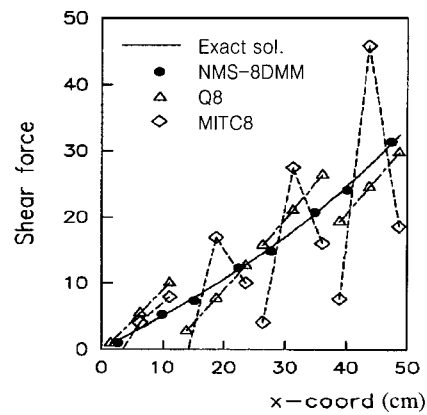


그림 9 원형 평판 모델



(a) 휨모멘트



(b) 전단력

그림 8 단순지지된 정사각형 평판의 부재력 분포

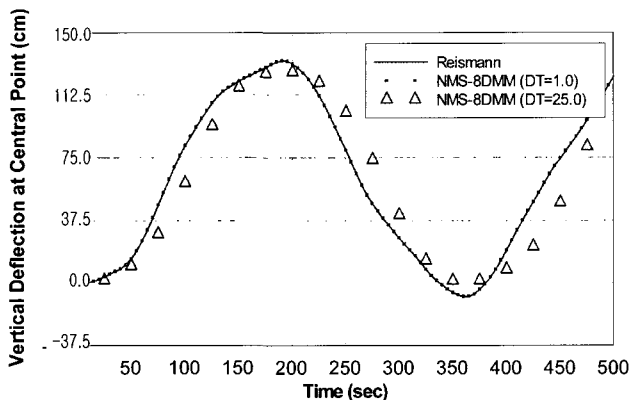


그림 10 중앙에서의 수직변위변화

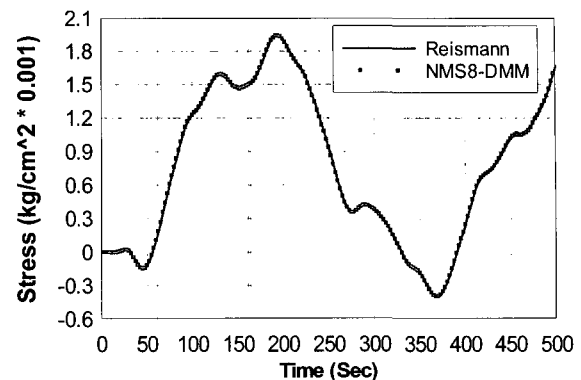


그림 11 중앙에서의 응력변화 (σ_x)

과제 내용의 일부를 정리한 것입니다. 첫 번째 저자는 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

김선훈, 최창근(1988) Mindlin 평판유한요소의 개선, 한국전산구조공학회 논문집, 1(2), pp.83~90
 최창근(2002) 유한요소법, 테크노프레스, 대한민국, pp.650
 허명재 외(2000) 개선된 쉘 요소를 이용한 쉘 구조의 유한요소해석, 한국전산구조공학회 논문집, 13(4), pp.449~459
 Bathe, K.J.(1982) Finite Element Procedures, Prentice Hall, NJ, pp.1039
 Choi, C.K., Kim, S.H.(1988) Reduced Integration, Nonconforming Modes and Their Coupling in Thin Plate Elements, *Computers and Structures*, 29, pp.57~62
 Choi, C.K., Kim, S.H.(1989) Coupled Use of Reduced Integration and Non conforming Modes in Quadratic Mindlin Plate Element, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28, pp.1909~1928
 Choi C.K., Chung K.Y., Lee T.Y.(2001) A Direct Modification Method for Strains due to Non Conforming Modes, *Structural Engineering and Mechanics*, 11(3), pp.325~340
 Choi, C.K., Yoo, S.W.(1991) Combined Use of Multiple Improvement Techniques in Degenerated Shell Element, *Computers and Structures*, 39, p.557~569
 Donea, J., Lamain, G.(1987) A Modified Representation of Transverse Shear in C0 Quadrilateral Plate Element, *Comp. Meth. Appl. Mech.*

Eng., 63, pp.183~207

Hinton, E., Huang, H.C.(1986) A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements with Substitute Shear Strain Fields, *Computers and Structures*, 23, pp.409~431
 Huges, T.J.R., Cohen, M.(1978) The 'Heterosis' Finite Element for Plate Bending, *Computers and Structures*, 9, pp.445~450
 Kim, S.H., Choi, C.K.(1992) Improvement of Quadratic Finite Element for Mindlin Plate Bending, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 34, pp.197~208
 Pugh, E.D.L., Hinton, E., Zienkiewicz, O.C. (1978) A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 12, pp.1059~1079
 Reismann, H., Lee, Y.(1969) Forced Motions of Rectangular Plates, *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, 4.
 Taylor, R.L., Beresford, P.J., Wilson, E.L. (1976) A Non conforming Element for Stress Analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10(6), pp. 1211~1219
 Wilson, E.L., Ibrahimvegovic, A.(1990) A Use of Incompatible Displacement Modes for the Calculation of Element Stiffness and Stresses", *Finite Elements in Analysis and Design*, 7, pp.229~241
 Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.(1989) The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems, Vol. I, McGraw Hill, London, p.648