

# 경계법을 이용한 형상최적화 문제의 설계민감도 해석 및 응용

## A Boundary Method for Shape Design Sensitivity Analysis in Shape Optimization Problems and its Application

최 주 호†

Choi, Joo-Ho

곽 현 구\*

Kwak, Hyun-Gu

(논문접수일 : 2004년 11월 5일 ; 심사종료일 : 2005년 9월 7일)

### 요 지

본 논문에서는 다양한 문제들의 형상 설계 민감도 해석에 대한 효율적인 경계기반 기법을 제시하였다. 우선 문제에서 정의된 일반적인 함수들에 대한 연속체 형태의 식에 근거하여, 경계 적분 형태의 해석적 민감도 식을 유도하였다. 이 식은 다양한 형상 설계 문제들의 경사를 계산하는데 편리하게 사용할 수 있다. 그리고 경계법은 형상 변분 벡터가 전체 도메인이 아닌 경계에서만 요구된다는 장점이 있는데, 여기서 경계 형상 변분은 형상 함수의 복잡한 해석적 미분 대신 형상을 미소 증분시킴으로써 편리하게 계산할 수 있다. 제시한 방법의 효율성을 보이기 위해 포텐셜 유동 문제와 필렛(fillet)에서의 응력 집중 문제에 이를 적용하였다.

**핵심용어** : 경계법, 설계민감도 해석, 형상 최적화, 투수, 초공동, 필렛

### Abstract

This paper proposes an efficient boundary-based technique for the shape design sensitivity analysis in various disciplines. An analytical sensitivity formula in the form of a boundary integral is derived based on the continuum formulation for a general functional defined in the problems. The formula can be conveniently used for gradient computation in a variety of shape design problems. The advantage of using a boundary-based method is that the shape variation vectors are needed only on the boundary, not over the whole domain. The boundary shape variation vectors are conveniently computed by using finite perturbations of the shape geometry instead of complex analytical differentiation of the geometry functions. The potential flow problems and fillet problem are chosen to illustrate the efficiency of the proposed methodology.

**keywords** : boundary method, design sensitivity analysis, shape optimization, seepage, supercavitation, fillet

## 1. 서 론

형상 최적화는 경계나 경계면(interface)과 같은 모델 형상에 대한 설계를 결정하는 문제이다. 기존의 치수 설계 문제와 달리, 형상설계는 최적화 과정 중 형상이 계속 바뀌게 되므로 더 높은 난이도를 갖는 문제로 알려져 있다. 형상 최적설계 문제는 지난 수 십 년간 많은 연구자들에 의해 이론적, 기술적 개발이 진행되어 왔으며(Haftka 등, 1986; Kwak, 1994), 현재는 이러한 기술을 실제 문제에

응용하는데 관심이 집중되고 있다.

형상 최적화 문제에서는 경사(gradient)를 이용하여 최적 형상을 찾아 나가는 방법을 많이 사용한다. 경사를 계산하는 가장 간단한 방법은 유한차분법(finite difference method, FDM)이다. 그러나 이 방법을 이용하면 정확도가 떨어지고 1회의 경사계산에 많은 시간이 필요하므로 비능률적이다. 따라서 본 연구에서는 정확하고 효율적인 경사 계산을 위한 형상 설계 민감도 해석(design sensitivity analysis, DSA) 기법을 제시하고 이를 여러 분야의 설계

† 책임저자, 정회원 · 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부 교수

전화: 02-300-0117 ; Fax: 02-3158-2191

E-mail : jhchoi@hau.ac.kr

\* 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

최적화 문제에 적용하였다.

민감도해석은 접근방법에 따라 두 가지로 구분하는데 하나는 도메인(domain)법이고 다른 하나는 경계(boundary)법이다. 도메인법에서는 민감도가 도메인 적분 형태로 표현되고 해석 방법은 통상 유한요소법(FEM)을 선택한다. 그러나, 도메인법은 설계 변수 변화로 인해 발생하는 형상 변분(shape variation) 벡터가 전체 도메인에서 정의되어야 하는 결점을 갖고 있다. 도메인법에서는 경계에서의 형상변분이 주어지면 이를 토대로 가상의 탄성해석을 수행하는데 이를 경계변위(boundary displacement)법(Hardee 등, 1999)이라 한다. 이 계산은 최적화 각 단계마다 필요하므로, 계산시간과 부담을 증가시키는 요인이 된다.

도메인법의 대안으로서 제시된 경계법은 주로 Dems (1987), Choi(1987), Meric(1995) 등에 의해 연구가 진행되었다. 이 방법에서는 민감도가 경계 형상변분만을 요구하기 때문에 도메인 형상변분은 필요가 없고, 따라서 경계변위법과 같은 부가적인 해석도 필요 없으므로 경계법의 가장 큰 이점이 된다. 이 방법에서는 주로 경계요소법(BEM)을 해석에 적용하였는데, 경계요소법은 전체 도메인에 대한 메쉬작업이 필요하지 않고, 정확한 경계해를 제공하기 때문이다. 그러나 경계요소법은 유한요소법에 비해 응용분야가 제한되어 있고 보편화되지 못하여 일반 해석에서는 그리 많이 사용되지 못하고 있다.

따라서 본 연구에서는 형상 설계민감도의 계산을 위해 경계법을 채택하면서 해석을 위해서는 유한요소법을 이용함으로써 양측의 장점을 모두 살릴 수 있는 방안을 제시하였다. 민감도 공식의 유도과정에서 전미분(material derivative) 개념과 보조변수(adjoint variable) 방법을 사용하였다. 문제 해석을 위한 해석코드는 어떠한 것을 이용해도 무방한데, 본 연구에서는 상용 소프트웨어 ANSYS(2002)를 사용하였다. 해석이 수행되고 나면 민감도 계산을 위해 MATLAB (2002)을 이용하였다. 최적화 과정은 상용 소프트웨어 Visual DOC(2003)를 사용하였으며, 여기서 MATLAB에 의해 계산된 민감도를 연계하여 최적화를 진행하였다.

대상으로 고려한 최적화 문제는 세 가지로, 이 중 두 문제는 포텐셜 유동에서 많이 고려하는 자유 경계치 문제(free boundary value problem)로서 투수(seepage)와 초공동(supercavitation)유동의 경계를 결정하는 문제이다. 자유경계치 문제는 적절한 목적함수의 설정을 통해 동등한 형상최적화 문제로 바꿀 수 있는데, 본 연구에서도 이 방법을 통해 형상최적화 문제를 정의하고 이에 대해 민감도 해석을 실시, 유한요소의 특성에 따른 민감도의 변화, 효율성 등을 분석하여 바람직한 민감도 해석을 위한

방안을 제시하였다. 마지막 문제는 2차원 탄성문제에서 많이 고려되는 필렛(fillet) 형상 결정 문제인데, 이 문제에 대해서도 역시 민감도 해석을 실시하고 바람직한 민감도 해석 방안을 제시하였다. 이들 문제에 대해 각각 민감도 해석법에 의해 경사를 계산하여 최적화 해를 구하였다.

## 2. 최적화 문제

본 논문에서 고려한 포텐셜 유동의 첫 번째 문제는 투수(seepage)문제이다. 이 문제는 자유 경계치 문제에 속하는데, 투수는 댐의 단면을 통해 물이 스며들어 흐르는 것을 말한다. 이는 댐의 전후 수압차 때문에 발생하는 것으로, 이 문제를 그림 1에 나타내었다. 댐의 높이와 폭은 단순화를 위해 단위값으로 설정하였다. 댐 왼쪽과 오른쪽에 있는 물의 높이는 각각 1과  $h$ 이다. 이 문제는 댐의 젖은 부분의 형상을 찾는 것으로, 이는 댐 설계시 고려해야 할 중요한 요소가 되기 때문이다. 그림 1에서  $u$ 는 전체 도메인에서 Laplace 방정식을 만족하는 유동의 속도 포텐셜을 의미하고,  $u_n$ 은 경계에서 수직 방향과 관련된  $u$ 의 도함수를 나타낸다. 포텐셜 값은 물과 닿아 있는 경계  $\Gamma_a$ 와  $\Gamma_d$ 에서는 1과  $h$ 로 주어지고, 공기와 닿아있는 경계  $\Gamma_b$ 와  $\Gamma_c$ 에서는 높이  $y$ 로 주어진다. 바닥면  $\Gamma_d$ 와 젖은 면  $\Gamma_c$ 에서는 불침투 조건이 주어진다. 젖은 면  $\Gamma_c$ 에서는 두 개의 조건이 부여되고 그 형상은 결정되지 않은 것이다. 이렇게 하면 이 문제는 식 (1)의 좌측식과 같은 목적함수를 최소화하는 자유경계  $\Gamma_c$ 를 찾는 등가의 형상최적화 문제로 변환할 수 있다. 여기서 목적함수는 경계 조건  $u=y$ 의 자승에러에 대한 적분이다. 그러면 경계조건은 식 (1)의 오른쪽과 같이 나타낼 수 있다.

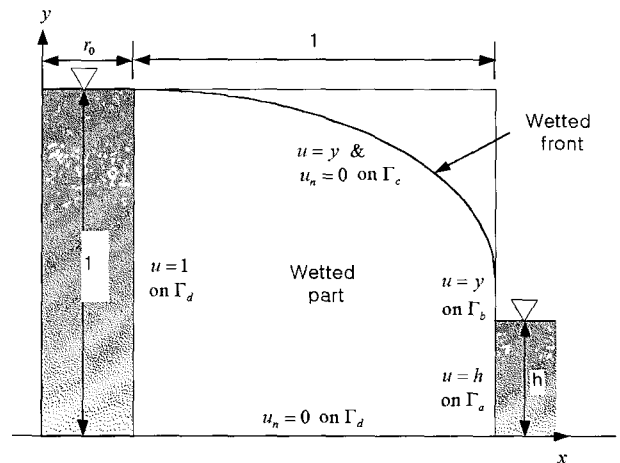


그림 1 투수(Seepage) 문제

$$\Psi = \int_{\Gamma_c} (u - y)^2 ds$$

$$\begin{aligned} u &= h & \text{on } \Gamma_a \\ u &= y & \text{on } \Gamma_b \\ u_n &= 0 & \text{on } \Gamma_c \\ u &= 1 & \text{on } \Gamma_d \\ u_n &= 0 & \text{on } \Gamma_e \end{aligned} \quad (1)$$

$\Gamma_c$ 와  $\Gamma_e$ 는 Neumann경계를,  $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_b$ 와  $\Gamma_d$ 는 Dirichlet 경계를 의미한다.

포텐셜 유동의 두 번째 문제는 초공동 유동 문제로, 어뢰와 같은 추진체가 높은 속도로 물속을 주행하는 문제이다. 추진체가 수중 주행 시 일정 속도 이상에서는 추진체의 노즈 뒤쪽으로 커다란 공동이 발생한다. 그렇게 되면 추진체는 공기방울 속을 주행하는 것과 같으며, 추진체의 노즈 부분만 물에 젖게 된다. 그리고 이로 인해 표면 마찰 항력이 급격히 줄어들게 된다. 이 문제 또한 자유 경계치 문제에 속하는데, 공동 형상은 알려지지 않았고 거기에 두 개의 경계조건이 주어지기 때문이다. 이 문제를 그림 2에 나타내었고, 문제를 단순화하기 위하여 변수들을 무차원화 하였다. 여기서  $u$ 는 유동 포텐셜을,  $u_s$ 와  $u_n$ 은 경계에서의 접선과 법선방향 속도를 의미한다. 이 문제는 초공동의 특성을 고려하여 축대칭 문제로 가정하였다. 물은 단위 크기의 속도로 축방향으로 흐르고,  $\Gamma_b$ 로 표현된 추진체의 노즈는 단위 길이를 갖는 원판으로 주어지며 원점에 고정되어 있다. 그림에서 보인 것처럼 공동은 원판의 오른쪽에서 형성된다. 문제의 단순화를 위해 Ryabushinskii 모델(Logvinovich, 1972)을 적용하여 공동의 왼쪽 절반만을 고려하였다. 공동경계  $\Gamma_c$ 에서는 두 개의 경계조건이 동시에 주어지는데 하나는 유체 불침투 조건이고 다른 하나는 동일 압력 조건이다. 첫 번째 조건은 유체가 공동 경계를 가로질러 흐를 수 없다는 것이고, 두 번째 조건은 공동 경계를 따라 나타나는 공동 압력  $p$ 가 증기압  $p_c$ 와 같아야 한다는 것으로 다음 식과 같이 표현된다.

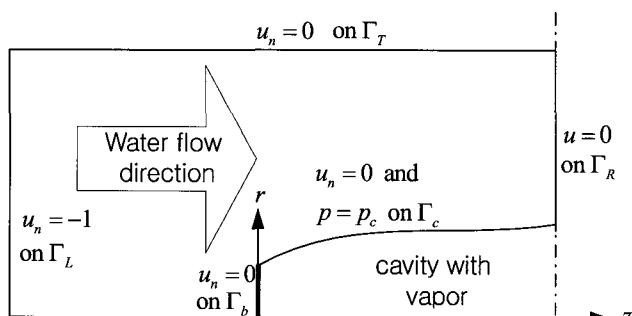


그림 2 초공동(Supercavitating) 유동 문제

$$p - p_c = 1 + \sigma - u_s^2 = 0 \quad (2)$$

여기서,  $\sigma$ 는 캐비테이션 수라고 불리며 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma = \frac{p_0 - p_c}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} \quad (3)$$

$p_0$ ,  $\rho$  그리고  $U_0$ 는 각각 상류에서의 압력과 밀도, 그리고 물의 속도를 의미한다. 그리고 초공동 유동에서 항력은 추진체의 노즈에 분포한 압력을 적분함으로써 구해진다. 이 힘은 초공동을 발생시키기 위한 추진력이기도 하므로 중요한 고려대상이다. 실제로는 항력 대신 단위면적당 힘을 의미하는 항력 계수를 다음과 같이 고려한다.

$$C_d = (1 + \sigma) - 2 \int_{\Gamma_b} u_s^2 n_z r ds \quad (4)$$

여기서,  $n_z$ 는 경계  $\Gamma_b$ 에서 단위 법선벡터의 축방향 성분이다.

이러한 자유경계치 문제는 등가의 형상 최적설계 문제로 변환할 수 있는데, 이를 위해 식 (5)의 좌측과 같은 목적함수를 정의할 수 있고, 이는  $\Gamma_c$ 에서의 두 번째 경계조건  $p = p_c$ 의 자승 오차를 적분한 것이다. 여기서, 반지름  $r$ 이 축대칭 특성 때문에 목적함수의 적분식에 나타남을 주목해야 한다. 그러면 경계조건은 일반적인 것이 되고, 식 (5)의 우측과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Psi = \int_{\Gamma_c} (1 + \sigma - u_s^2)^2 r ds$$

$$\begin{aligned} u_n &= 0 & \text{on } \Gamma_b \\ u_n &= 0 & \text{on } \Gamma_c \\ u &= 0 & \text{on } \Gamma_R \\ u_n &= 0 & \text{on } \Gamma_T \\ u_n &= -1 & \text{on } \Gamma_L \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_c$ ,  $\Gamma_L$ 와  $\Gamma_T$ 는 Neumann경계를,  $\Gamma_R$ 는 Dirichlet 경계를 나타낸다.

위에서 언급한 포텐셜 문제들은 목적함수를 다음과 같이 정의함으로써 조금 더 일반적인 형태로 나타낼 수 있다.

$$\Psi = \int_{\Gamma} \psi(u, u_n, u_s) r ds \quad (6)$$

여기서,  $\psi$ 는 경계의 포텐셜과 그것의 도함수로 구성된 함수이다. 그러면 문제는 식 (6)의 목적함수를 최소화하는

최적 경계 형상  $\Gamma$ 를 찾는 문제가 된다. 이 때  $u$ 는 다음과 같은 Laplace방정식과 경계조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= \bar{u} && \text{on } \Gamma_u \\ u_n &= \bar{u}_n && \text{on } \Gamma_n \end{aligned} \quad (7)$$

문자 위에 나타난 ‘-’는 기지값을 의미하며,  $\Gamma_u$ 와  $\Gamma_n$ 은 Dirichlet와 Neumann경계를 의미한다.

마지막 문제는 필렛(fillet) 문제이다. 이 문제는 제한조건을 만족하는 필렛의 최적형상을 찾는 문제로서, 그림 3에 나타나 있다. 경계  $\Gamma_1$ 은 형상이 변하지만 A와 B는 고정점이다.  $\Gamma_5$ 는 탄성체의 중심선으로, 이 문제에서는 대칭을 가정하여 탄성체의 위쪽 절반만을 고려하였다.  $\Gamma_6$ 에서는 균일 분포하중이 작용하며, Young’s modulus와 Poisson 비는 각각  $30.0 \times 10^6 \text{psi}$ (206.8GPa)와 0.293이다. 이 문제의 목적함수는 탄성체의 체적으로 정의하였으며, 제한조건은 주요 지점의 von-Mises응력이 허용치를 넘지 않아야 하는 조건으로 다음과 같이 각각 나타낼 수 있다.

$$f = \int_{\Omega} dx \quad (8)$$

$$g = \sigma_e - \sigma_a \leq 0 \quad (9)$$

여기서,  $\sigma_e$ 는 임의의 필렛 요소의 von-Mises응력이고,  $\sigma_a$ 는 허용응력으로 120psi(827kPa)이다.

이 문제에서 다루는 목적함수, 또는 제한조건 함수를 일반화시켜 표현하면 다음과 같다.

$$\Psi = \int_{\Omega} \phi(\sigma_{ij}) dx + \int_{\Gamma} \psi(u_i, t_i) ds \quad (10)$$

여기서,  $u_i$ 는 변위를,  $t_i$ 는 트랙션 벡터를 나타내며 다음과 같은 지배방정식과 경계조건을 만족한다.

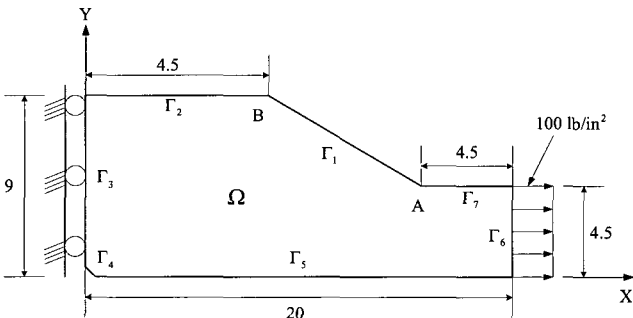


그림 3 필렛(Fillet)문제

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 \text{ in } \Omega, && u_i = \bar{u}_i && \text{on } \Gamma_u \\ & && t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i && \text{on } \Gamma_t \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 응력 텐서와 변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \quad (12)$$

### 3. 설계민감도 해석

형상 설계민감도 해석은 형상변분 때문에 발생하는 목적함수의 경사를 계산하는 것이다. 형상변분을 기술하는 잘 알려진 방법으로 전미분(material derivative) 개념(Zolesio, 1981)이 있다. 이에 의하면 어떤 점  $\mathbf{x}$ 가 미소 형상 변화 후 새로운 점  $\mathbf{x}^r$ 로 이동되는 것을 초기위치에서  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 의 속도벡터로 작은 시간  $\tau$ 후  $\mathbf{x}^r$ 점으로 이동하는 것으로 생각하고, 이러한 개념을 이용하여 설계민감도 공식을 유도한다.

포텐셜 유동의 경우  $u$ 는 포텐셜을 의미하는데, 식 (6)을 미분하고 그 속에 나타나는  $u$ 의 전미분을 보조변수를 도입하여 소거하게 되면 원하는 민감도 공식을 얻게 되며, 그 결과는 다음과 같이 주어진다(최주호 등, 2004).

$$\Psi^r = \int_{\Gamma} \left\{ -u_s u_s^* e_{ik} V_k + u_n u_n^* V_{is} + (u_n u_n^* + \psi) DV_s^+ - \psi_{u_s} u_s DV_s^+ \right\} r ds \quad (13)$$

여기서,  $u^*$ 는 보조 포텐셜을 의미하며, 다음의 경계조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} u^* &= -\psi_{u_n} && \text{on } \Gamma_d \\ u_n^* &= \bar{u}_n^* && \text{on } \Gamma_n \end{aligned} \quad (14)$$

그리고  $DV_s$ 와  $DV_s^+$ 는  $\mathbf{V}$ 의 함수로 다음과 같이 주어진다.

$$DV_s = V_{k,s} s_k, \quad DV_s^+ = DV_s + \frac{V_s}{r} \quad (15)$$

식 (13)의  $r$ 과 식 (15)의  $V_s/r$  항은 축대칭 특성 때문에 나타나는 것으로, 2차원 문제일 경우에는 이 항들이 사라지게 된다.

2차원 탄성 문제의 경우에는 식 (10)을 전미분하고 정리하면 다음과 같은 민감도 식을 얻는다(Choi, 1987).

$$\Psi' = \int_{\Gamma} \left\{ (u_{i,s} \tilde{t}_i^* + u_{i,s}^* t_i) V_s + (\epsilon_{ij} \tilde{\sigma}_{ij}^* - u_{i,s} \tilde{q}_i^* - u_{i,s}^* q_i + f_i u_i^* + \phi) V_n + (t_i u_i^* + \psi) D V_s \right\} ds \quad (16)$$

여기서  $u_i^*$  는 보조 변위를,  $\tilde{t}_i^* = t_i^* - t_i^0$  를 나타내며 다음과 같은 경계조건을 갖는다.

$$\begin{aligned} u_i^* &= -\psi_{,i} \\ \tilde{t}_i^* &= \psi_{,i} \end{aligned} \quad (17)$$

또한  $q_i$ ,  $t_i$  그리고  $\tilde{\sigma}_{ij}^*$  는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} q_i &= \sigma_{ij} s_j, \quad t_i = \sigma_{ij} n_j \\ \tilde{\sigma}_{ij}^* &= \sigma_{ij}^* - (\lambda \delta_{ij} \phi_{,\alpha\alpha} + 2\mu \phi_{,\sigma\sigma}) \end{aligned} \quad (18)$$

#### 4. 설계민감도 해석 수행

##### 4.1. 투수 문제

여기에서는 2차원 투수 문제에 대하여, 목적함수의 민감도 값을 제시한 방법으로 계산하였다. 오른쪽에서 물 높이는 0.3으로 주어졌다. 설계 변수는  $c_1 \sim c_5$ , 5개의 높이 변수로 우측에서부터 좌측으로 댐의 폭에 맞춰 등간격으로 배치되었다. 그리고 폭  $l_c$  또한 설계 변수로 고려하였다. 민감도의 정확도를 체크하기 위하여 FDM에 의해 계산된 값과 비교하였다. 각 설계변수들을 미소한 양으로 증분 시키고 FDM에 근거하여 민감도 값을 구하였으며, 그 결과 값들을 표 1에 정리하였다. 이 표에는 각각의 설계 변수들에 관련된 민감도 값들을 FDM과 DSA방법으로 계산하여 정리해 놓았다. FDM은 유한차분법을, DSA는 설계민감도 해석을 의미한다. FDM의 %값들은 설계변수들의 증분량을 의미한다. 맨 오른쪽의 값들은 DSA에 의해 구해진 값들을 FDM(0.1%)에 의해 구해진 값들로 나누고 100을 곱한 값이다. 그리고 정확도는 FDM과 DSA민감도 값이 100%에 가까울수록 좋은 것으로 간주하였다. 표 1을 살펴보면 첫 번째 설계변수를 제외한 나머지 설계변수에 대해 정확도가 높은 것을 알 수 있다. 첫 번째 설계변수에 대한 민감도 값이 부정확한 이유는 민감도의 정확도에 영향을 미치는  $u_n$ ,  $u_x$  그리고  $u_y$  같은 미분값들이 코너에서 정확하지 않기 때문으로 생각된다.

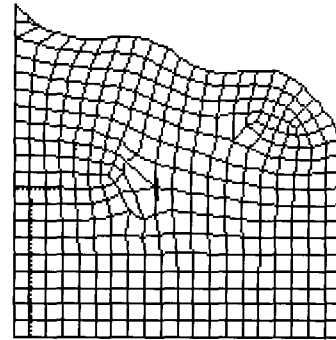


그림 4 투수 문제의 유한요소 모델

표 1 투수 문제의 목적함수에 대한 민감도 비교

function	design parameter	FDM (1%)	FDM (0.5%)	FDM (0.1%)	DSA	ratio (%)
resp = 0.0078	c1	-0.0117	-0.0115	-0.0123	0.0326	-265.1
	c2	0.0798	0.0785	0.0774	0.0771	99.7
	c3	0.0117	0.0107	0.0103	0.0103	100.6
	c4	0.0206	0.0196	0.0187	0.0181	96.7
	c5	-0.0226	-0.0238	-0.0243	-0.0242	99.5
	c6	0.0219	0.0215	0.0211	0.0257	122.1

##### 4.2. 초공동 문제

민감도 값은 압력차 적분식과 항력계수 식, 두 개의 함수에 대하여 구해졌다. 설계변수는 공동 형상을 나타내기 위하여 각각 공동의 중앙과 끝에 위치한 두 개의 높이 변수,  $c_1$ 과  $c_2$ , 그리고 공동 길이  $l_c$ 와 캐비테이션 수  $\sigma$ 를 고려하였다. 이 문제에서 자유메쉬를 사용한 초기 유한 요소 모델은 그림 5에, 맵메쉬를 사용한 모델은 그림 6에 나타나 있다. 설계민감도 해석에 의해 얻어진 민감도 값이 정확한지 확인하기 위하여 유한차분법에 의해 계산된 민감도 값과 비교하였다. 이 때 유한차분량은 1%, 0.5% 그리고 0.1%의 증분량을 사용하였고, 그 결과는 표 2에 있다. 표를 보면 비형상변수  $\sigma$ 를 제외한 다른 변수들은 민감도 값이 정확치 않음을 알 수 있다. 이는 유한차분법으로 구한 값이 일치되지 않았기 때문으로, 민감도 값이 증분량의 크기에 따라 크게 달라짐을 보이고 있다. 예를 들면, 유한차분법에 의한  $c_1$ 의 민감도 값은 1%, 0.5% 그리고 0.1%의 증분량에 따라 각각 -0.362, -0.176, 0.324를 나타낸다. 이런 현상이 발생하는 것은 자유메쉬에 기인한 것으로, 미소한 형상 변화에도 전혀 다른 메쉬를 생성해내기 때문이다. 이를 피하기 위하여 더 안정적인 메쉬 패턴을 고려하였고, 그 대안으로 그림 6에 보이는 것처럼 공동 주변에서는 맵메쉬를 생성하였다. 그리고 나서 같은 작업을 반복하였는데 그 결과가 표 3에 나타나 있다. 표에서 알

수 있듯이 맵메쉬를 이용하면 비가 잘 일치하며, 증분량 크기에 따라서도 유한차분법을 이용한 민감도가 같은 값을 보이고 있다. 그러나 설계변수  $l_c$ 는 여전히 부정확하였는데, 이것은 오른쪽 끝 경계,  $\Gamma_R$ 의 공동 근처에서 수직 속도  $u_n$ 과  $u_n^*$ 에 대한 유한요소 해가 부정확하기 때문이다. 한편, 표 2와 3의 DSA기법에 의한 민감도 값들을 비교해 보면 자유메쉬와 맵메쉬에 대한 민감도 값들이 매우 잘 일치한다는 것을 알 수 있다. 맵메쉬가 메쉬 품질 면에서 자유메쉬보다 우수하지만, 이를 만드는 것이 번거롭고 형상 변형 자유도가 제한되는 단점을 갖고 있음을 감안하면 실제 최적화 과정에서는 보다 간편하면서도 동일한 민감도를 얻을 수 있는 자유메쉬를 사용하는 것이 더 바람직하다.

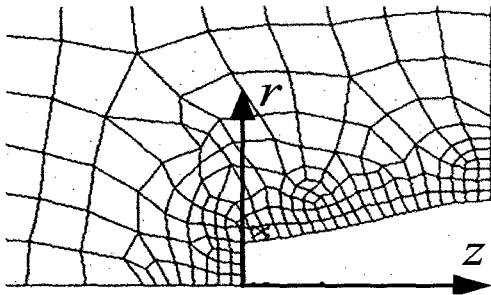


그림 5 초공동 유동 문제의 자유메쉬 유한요소 모델

표 2 초공동 유동 문제의 자유메쉬 모델에 대한 목적함수의 민감도 비교

function	design parameter	FDM (1%)	FDM (0.5%)	FDM (0.1%)	DSA	ratio (%)
pdiff. intgrl = 0.2804	c1	-0.362	-0.176	0.324	-0.681	-210.0
	c2	0.629	0.665	-3.353	0.534	-15.9
	lc	-0.074	-0.080	-0.394	-0.010	2.6
	sigma	-0.209	-0.211	-0.212	-0.212	100.1
drag coef. = 0.5976	c1	-0.371	-1.398	-1.029	0.529	-51.4
	c2	1.564	-0.963	-9.183	-0.126	1.4
	lc	-0.251	-0.884	-3.555	-0.030	0.8
	sigma	1.000	1.000	1.000	1.000	100.0

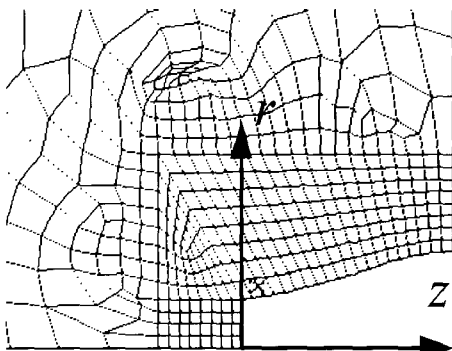


그림 6 초공동 유동 문제의 맵메쉬 유한요소 모델

표 3 초공동 유동 문제의 맵메쉬 모델의 대한 목적함수의 민감도 비교

function	design parameter	FDM (1%)	FDM (0.5%)	FDM (0.1%)	DSA	ratio (%)
pdiff. intgrl = 0.2715	c1	-0.642	-0.642	-0.642	-0.672	104.6
	c2	0.536	0.533	0.532	0.544	102.2
	lc	-0.063	-0.063	-0.064	-0.020	31.7
	sigma	-0.209	-0.211	-0.212	-0.212	100.1
drag coef. = 0.5671	c1	0.616	0.617	0.618	0.564	91.3
	c2	-0.156	-0.156	-0.156	-0.137	87.9
	lc	-0.034	-0.034	-0.035	-0.043	122.7
	sigma	1.000	1.000	1.000	1.000	100.0

### 4.3. 필렛 문제

민감도 값은 필렛의 형상을 나타내기 위하여 등간격으로 배치된 각각 2개씩의  $x$ ,  $y$ 좌표에 대해 구하였다. 그림 7과 그림 8에 맵메쉬와 자유메쉬에 대한 각각의 유한요소 모델을 나타내었다. 민감도 값은 맵메쉬와 자유메쉬 각각에 대해 FDM과 DSA법을 이용하여 계산하였고, 그 결과를 표 4에 수록하였다. 표에서 첫 번째 요소에서는 민감도 값이 부정확한 것을 알 수 있다. 이것은 앞에서 언급한 문제와 마찬가지로 코너에서는 변형률에 대한 유한요소 해가 부정확하기 때문이다. 맵메쉬에서는 코너를 지나면 민감도 값들이 점차적으로 안정되는 것을 확인 할 수 있지만, 자유메쉬에서는 민감도 값들이 일치하지 않음을 알 수 있다. 이는 앞서 말한 것처럼 민감도 값이 증분량에 따라 크게 달라지기 때문이다. 그리고 코너를 제외하고는 맵메쉬와 자유메쉬 모두 DSA법으로 계산한 민감도 값이 잘 일치함을 볼 수 있다. 따라서 앞의 문제와 마찬가지로 필렛 문제에서도 DSA법으로 민감도 값을 계산하고 자유메쉬를 이용하여 형상최적화를 수행하는 것이 현명한 것으로 판단된다.

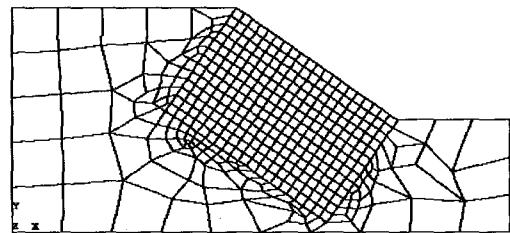


그림 7 필렛 문제의 맵메쉬 유한요소 모델

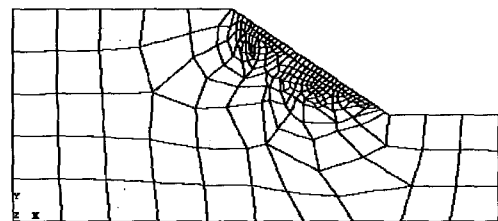


그림 8 필렛 문제의 자유메쉬 유한요소 모델

표 4 플랫 문제의 맵메쉬와 자유메쉬 모델에 대한 민감도 비교

functional name	value with map mesh	FDM	DSA	ratio(%)	value with free mesh	FDM	DSA	ratio(%)
eff. stress at 1st element	172.2	7.77E+00	-1.56E+00	-20.03	153.9	-3.14E+02	-3.19E+01	10.16
		1.14E+01	-2.11E+00	-18.49		5.73E+02	-4.58E+01	-8.00
		4.27E+00	9.92E+00	232.20		-1.13E+01	2.12E+01	-187.33
		6.14E+00	1.43E+01	232.40		9.68E+00	3.04E+01	314.54
eff. stress at 3rd element	95.2	-5.56E+01	-4.75E+01	85.47	95.8	-3.63E+02	-3.29E+01	9.06
		-7.98E+01	-6.82E+01	85.46		-1.07E+02	-4.73E+01	44.18
		2.55E+01	2.30E+01	90.30		1.36E+01	1.69E+01	124.07
		3.67E+01	3.32E+01	90.34		4.24E+01	2.43E+01	57.45
eff. stress at 5th element	74.6	-5.04E+01	-4.93E+01	97.81	74.3	-1.26E+02	-4.48E+01	35.61
		-7.26E+01	-7.10E+01	97.78		-2.69E+01	-6.45E+01	239.59
		1.86E+01	1.84E+01	98.69		1.55E+01	1.72E+01	110.97
		2.68E+01	2.64E+01	98.70		2.45E+01	2.47E+01	100.99
eff. stress at 7th element	62.1	-3.61E+01	-3.61E+01	100.13	62.1	-5.25E+01	-3.67E+01	69.88
		-5.24E+01	-5.24E+01	100.15		-4.81E+01	-5.32E+01	110.62
		6.75E+00	6.92E+00	102.51		3.33E+00	6.79E+00	203.83
		9.69E+00	9.93E+00	102.44		1.34E+01	9.74E+00	72.66

5. 최적화 수행

앞에서 공식화한 최적 설계 문제를 민감도를 이용한 알고리즘을 사용하여 최적화를 수행하였다. 최적화에 사용된 상용 소프트웨어로 유한요소 프로그램은 ANSYS를, 민감도 계산은 MATLAB을 이용하였고, 최적화는 Visual DOC을 사용하였다. 그리고 DSA와 유한차분법을 이용한 최적화 값들을 비교하였다.

5.1 투수 문제의 최적화

초기 형상은 민감도 값을 계산하기 위해 사용한 형상과 동일하다. 초기 형상과 최적화된 형상은 그림 9에, 그리고 초기 형상과 최적화된 형상에서의  $u-y$  값들은 그림 10에 나타내었다. 그림 9를 살펴보면 DSA와 FDM을 이용한 결과 모두 형상이 동일함을 알 수 있다. 그리고 그림 10에서 경계조건의 위반정도로 정의된 목적함수  $u-y$  값

이 최적화 결과, 0과 잘 일치하고 있으므로 최적화된 형상이 경계조건을 잘 만족함을 알 수 있다. 그림 11을 보면 DSA기법이 FDM보다 더 빠르게 최적해를 찾아내 더 우수함을 보이고 있다.

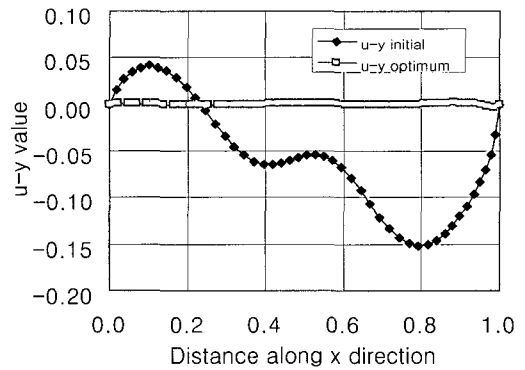


그림 10 투수 문제의 목적함수 값

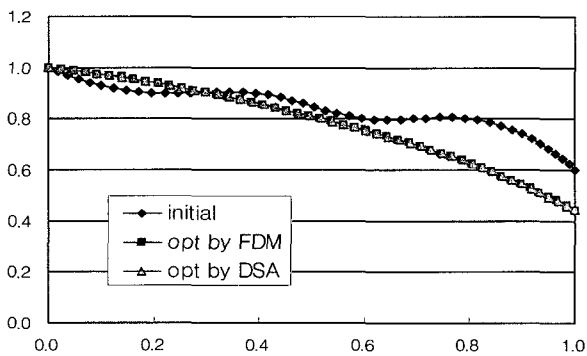


그림 9 투수 문제의 최적 형상

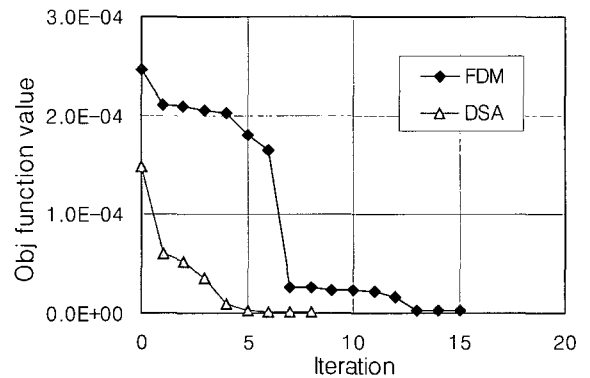


그림 11 투수 문제의 목적함수 이력

### 5.2. 초공동 문제의 최적화

설계변수는 공동경계의 형상을 정의하는 일정간격의 높이 변수 5개와 함께 캐비테이션 수  $\sigma$ 로 정의하였고 공동 길이는 5.0으로 고정하였다. 최적화는 자유메쉬 뿐 아니라 맵메쉬에서도 수행하였으며, 비교를 위해 유한차분법에 의한 민감도를 이용한 최적화도 실시하였다. FDM과 DSA법을 통해 얻은 최적 형상이 그림 12에 나타나 있다. 그리고 그림 13은 최적화 이력을 보여주고 있는데, DSA를 통한 결과는 빨리 수렴하는 반면, FDM 자유메쉬를 통한 결과는 수렴하지 않음을 알 수 있다.

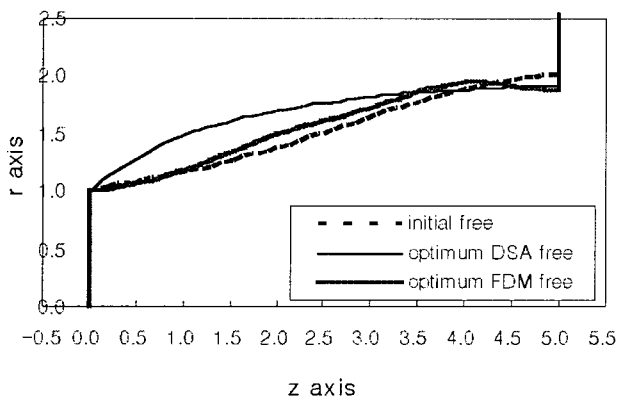


그림 12 초공동 유동 문제의 초기 및 최적 형상

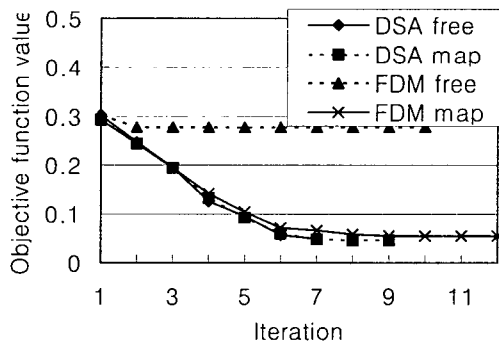


그림 13 초공동 유동 문제의 목적함수 이력

### 5.3. 필렛 문제의 최적화

설계변수는 필렛 형상을 정의하는 4쌍의  $x, y$ 좌표로 정의하였다. 민감도 값 비교 시 유한차분법에 의한 민감도 값이 일치하지 않았으므로, 여기에서는 DSA법을 이용하여 최적화를 수행하였다. 최적화는 맵메쉬와 자유메쉬 모두 실시하였다. 그 결과로 나온 최적화된 형상을 그림 14와 그림 15에, 최적화 이력을 그림 16에 나타내었다. 반복계산 횟수가 자유메쉬에서 조금 더 많았지만, 두 경우

모두 동일한 값으로 수렴하였고 최적화된 형상도 거의 같았다.

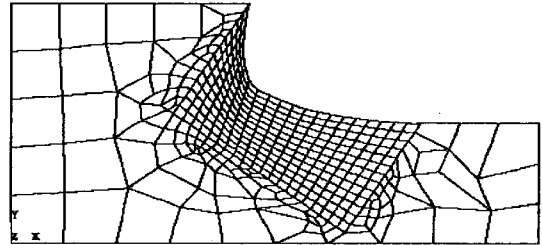


그림 14 필렛 문제의 맵메쉬 모델에 대한 최적 형상

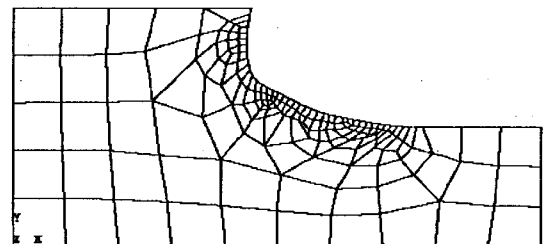


그림 15 필렛 문제의 자유메쉬 모델에 대한 최적 형상

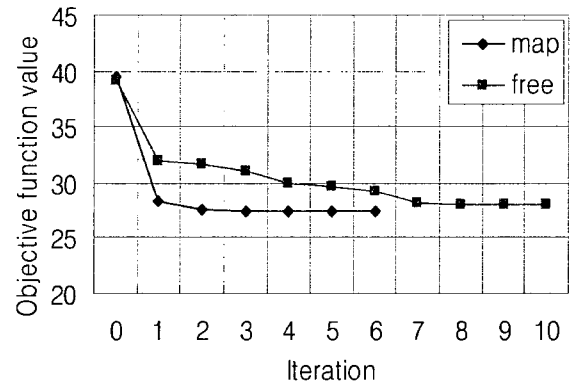


그림 16 필렛 문제의 목적함수 이력

본 연구에서는 포텐셜 유동과 탄성체 문제에서 다루는 형상최적화 문제를 효과적으로 해결하는 최적화 기법을 개발하였다. 이를 위해 문제 해석은 도메인법에서 사용되는 유한요소법을 활용한 반면 민감도의 해석은 경계법의 특성을 살려 경계에서 정의되는 공식을 이용하였다. 그리고 이의 응용 예제로서 투수 문제와 초공동 유동 문제, 필렛 문제를 고려하였으며, 이에 대한 민감도해석을 실시하고 최적화도 수행하였다. 민감도 공식에서 나타나는 형상변분은 경계형상에 대한 유한차분을 행하여 계산함으로써 간편함



과 함께 정확성도 유지하였다. 형상변분은 도메인법과 달리 경계에서만 필요하므로 도메인 메쉬를 생성할 필요가 없어 효율적이다.

민감도 계산에서, 본 방법의 정확도는 유한차분법을 통해 검증하였다. 그 결과 코너에서는 민감도 값이 부정확함을 보였으나 최적화에는 영향을 미치지 않음을 알 수 있었다. 그리고 유한차분법 이용시, 문제 해석을 위해서 자유메쉬 모델을 사용하면 민감도 값이 매우 부정확하였던 반면 맵메쉬 모델은 민감도 값을 신뢰할 수 있었다. 한편 민감도 해석법을 이용하면 자유메쉬나 맵메쉬에 관계없이 정확한 민감도 값을 계산하기 때문에 형상 최적화를 할 때에는 민감도 해석법을 이용하고 자유메쉬를 사용하는 것이 더 편리함을 알 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

- 최주호, 곽현구, Grandhi, R.V.(2004) 초공동(超空洞) 유동문제의 형상 설계 민감도 해석, 대한기계학회 논문집, 28(9), pp.1320~1327
- Ansys Inc.(2002) ANSYS 6.1 User's Manual, Ansys Inc., PA, USA.
- Choi, J.H.(1987) Shape optimal design using boundary integral equations, Ph.D., Thesis, Korea Advanced Institute of Science and Technology, p.123
- Dems, K.(1987) Sensitivity analysis in thermal problems II: structure shape variation, *Journal of Thermal Stresses*, 10, pp.1~16
- Haftka, R.T. and Grandhi, R.V.(1986) Structural shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57, pp.91~106
- Hardee, E., Chang, K.H., Tu, J., Choi, K.K., Grindeanu, I., Yu, X.(1999) A CAD based design parameterization for shape optimization of elastic solids, *Advances in Engineering Software*, 30, pp.185~199
- Kwak, B.M.(1994) A review on shape optimal design and sensitivity analysis, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering*, JSCE . 10, pp.1595~1745
- Logvinovich, G.V.(1972) Hydrodynamics of free boundary flows, translated from Russian, Israel program for scientific translations, Jerusalem.
- Meric, R.A.(1995) Differential and integral sensitivity formulations and shape optimization by BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15, pp.181~188
- The MathWorks Inc.(2002) MATLAB Release 6.5 User Guides, The MathWorks Inc., MA, USA.
- VR&D Inc.(2003) VisualDOC V3.1 How To Manual, VR&D Inc., CO, USA.
- Zolesio, J.P.(1981) The material derivative (or speed) method for shape optimization, in Haug EJ and Cea J (eds.), *Optimization of distributed parameters structures*, Sijthoff Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, pp.1152~1194