

---

# 사영된 영상의 고차원 비-스플라인을 이용한 복원법

## Projected Image Reconstruction Using Higher Order B-Spline

---

김성수

충북대학교 전기전자컴퓨터공학부

Sung-Soo Kim(sungkim@chungbuk.ac.kr)

---

### 요약

본 논문은 렌즈 등에 의한 왜곡현상을 가지고 있는 위성사진이나 의료 영상을 기하학적 변환을 통하여 보정하는 경우나, 영상 광고 등 많은 영상 관련 분야에 필요한 복원을 위하여 역사영 변환을 보다 더 효율적으로 하기 위한 고차의 비-스플라인을 적용한 방법을 제안한다. 사영은 정확한 정보를 오차가 존재하는 왜곡된 정보공간으로의 변형과정으로서, 정보에서 손실의 존재를 당연히 하고 있는 과정이다. 또한, 역사영에서는 관측된 정보가 왜곡된 정보이기 때문에, 관측에 의존하여 사영과정에서 손실된 정보를 추정해 나가는 과정이 매우 어려운 난제로 연구되고 있다. 본 연구에서는 선형적으로 변형된 영상의 복원 방법 개선을 위하여 비-스플라인 내간법을 적용한 방법 중에서, 비-스플라인의 차수를 높인 방법을 사용한 새로운 방법을 제안하여, 역사영의 과정에서 적은 오차를 갖고 원래영상으로 복원하는 방법을 제안하였다. 실험에서는, 제안된 고차의 비-스플라인 내간법을 적용한 결과로서, 원래의 영상에 가까이 복원을 시키는 제안된 역변환 방법의 우수성을 보였다.

■ 중심어 : | 역사영 | 비-스플라인 | 의료영상 | 에일리어징 |

### Abstract

In this paper a method of reconstructing a desired image through the geometrical transformation and the interpolation techniques is presented by comparing different interpolation schemes. Several different interpolation schemes are compared with respect to the amount of error that is the difference between the original and the reverse-projective transformed images. Higher ordered B-spline interpolation turned to be superior to other techniques in reconstructing the image which is desired to be close to the unskewed image as much as possible. In the results, this paper demonstrates that the reverse projection using the higher ordered B-spline interpolation is superior to those conventional interpolation methods, linear, cubic spline for reconstructing image. In experiments, the error decreases as the order of B-spline increases. The proposed technique is useful for various practical and theoretical applications in the area of satellite, medical, and commercial image processing.

■ keyword : | Reverse Transformation | B-spline | Medical Imaging | Aliasing |

---

\* 본 연구는 한술연구진흥재단 2002년도 신진교수연구과제 D00343 연구비 지원으로 수행되었습니다.

접수번호 : #051012-004

심사완료일 : 2005년 10월 27일

접수일자 : 2005년 10월 12일

교신저자 : 김성수, e-mail : sungkim@chungbuk.ac.kr

## I. 서론

사영변환의 과정에서 왜곡(찌그러짐)을 가지고 있는 영상을 원래의 영상에 가장 비슷한 영상으로 변환하여 재생하는 과정은 중요한 문제이다. 이는 영상정보의 중요성이 산업사회에서 정보사회로의 전환에 있어서 영상정보를 이용한 광고, 또는 정밀한 의료 영상 처리가 필요한 부분 등의 정보의 표출에 있어서 중요한 부분으로 인식되고 있다. 일반적으로 관측된 영상의 정보가 관측자와 피사체와의 기하학적인 위치에 따라 서로 다른 정보를 제공한다. 일반적으로 기하학적인 정보와 영상의 관측자와의 기하학적인 위치 정보에 바탕을 두고 원래의 영상을 보간법을 적용한 기하학적 변환이라고 한다. 기하학적 변환은 영상처리 방법 중 하나로 원 영상의 좌표 변환을 통하여 새로운 좌표로 표출되는 영상을 얻는다. 유사 변환은 원 영상의  $(x_1, y_1)$ 에 위치한 화소 값이 이동, 회전, 크기 변환, 전단 등의 선형 조합에 의해 결과 영상의  $(x_2, y_2)$  위치로 사영(mapping)되는 2차 기하학적 변환의 중요한 부분이다. 유사 변환의 경우는 거울을 통한 반사 왜곡이나 원근 표현처럼 직선을 직선으로 변환시키기는 하지만 평행 성질을 보존하지 못하는 변환은 설명하지 못하는데, 일반적으로 직선을 직선으로 변환시키는 가장 일반적인 변환이 투시변환 또는 사영 변환(Projective Transform)이다.

변환 과정에서 잃어버린 정보를 보상하기 위하여, 원래의 영상정보로의 재생의 과정에 보간법을 널리 사용하는데, 여러 가지 보간법 중에서, 가장 쉬운 방법으로 잃어버린 정보를 주위의 정보를 이용하여 찾는 인근치 보간법(Nearest neighbor interpolation)이 연구되고 있다. 그 외의 다른 보간법에는 선형 보간법(Linear Interpolation), 큐빅 보간법(cubic interpolation), 그리고 비-스플라인 보간법(B-spline interpolation) 등 또한 많이 연구되고 있다. 인근치 보간법은 화소의 값을 할당하기 위하여 주변 화소들의 값의 가중치를 이용하게 되는데, 최대한 많은 주변의 화소들을 참조하는 것이 일반적으로 영상의 질을 향상시키는 방법이다[2]. 결국, 이러한 여러 가지 보간법의 특성에 따라 복원된 영상의 질이 결정되어 진다. 물론 복원된 영상이 원래의 영상과

오차도 없이 정확히 동일 할 수는 없지만, 보간법을 사용하여 복원된 영상의 질을 원래의 영상에 최대한 가깝게 하고자 하는 것이 영상 복원에 관계된 여러 연구의 목표이다. 본 논문에서는 선형, 큐빅 스플라인, 비-스플라인 보간법들의 사영변환을 통한 왜곡된 영상으로부터 원래의 영상을 재구성하는 과정에서의 역할에 대하여 연구하였다. 일반적으로 기존의 연구에서는 응용 분야에 따라, 여러 가지의 보간법들이 각각의 특성을 활용하는 의미에서 적용되고 있다.

본 연구에서는 제안된 고차의 비-스플라인 보간법을 이용한 결과 영상이 앞에서 언급한 다른 두 가지 방법들을 이용한 결과 영상보다 향상됨을 보였고, 같은 방법의 보간법을 사용한 경우에는 저차수를 사용한 경우[1]보다 보간의 차수가 높아질수록 향상된 결과를 가져오는 것을 실험을 통하여 확인하였다.

본 논문의 구성은 2장에서 여러 보간법 중에 가장 좋은 결과를 가져오는 비-스플라인에 대하여 설명하고, 3장에서는 제안된 고차의 비-스플라인을 이용한 영상의 사영 변환에 대하여 설명한다. 4장에서는 위의 기존의 보간법과 비-스플라인 보간법을 이용하여 복원한 결과 영상을 비교 분석하고, 끝으로 5장에서 총체적 결론을 맺었다.

## II. 비-스플라인 보간법

영상 처리에서 보간 과정은 관측된 이차 이산 신호  $s(k, l)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ 로부터 원래의 이차원 신호  $s(x, y)$ ,  $s, x, y \in \mathbb{R}$ 을 재구성하는 과정이다. 신호의 한 점  $(x, y)$ 에서의 크기는 그 점에 이웃에 있는 이산 점들로부터 추정하는데, 이러한 과정은 식(1)이 나타내는 것과 같이 연속 2차 임펄스 응답  ${}_{2D}\beta(x, y)$ 과 이산 영상의 컨볼루션(convolution)의 형태로 나타낼 수 있다[1].

$$s(x, y) = \sum_k \sum_l s(k, l) \cdot {}_{2D}\beta(x-k, y-l) \quad (1)$$

일반적으로, 대칭이며 분리 가능한 보간 커널(kernel)들은 다음과 같이 사용된다.

$${}_{2D}\beta(x, y) = \beta(x) \cdot \beta(y) \quad (2)$$

Schoenberg[7]의 논문의 결과를 참고로 스플라인의 특성은 다음과 같은 비-스플라인 전개식으로 정의되어 있다[3].

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x-k) \quad (3)$$

식 (3)에서 정의된 식은  $\beta^n(x)$ 에 의해 정의되어진  $n$  차 비-스플라인의 중심을 정수 배 이동시킨 것을 나타내며,  $\beta^n(x)$ 는 식(4)과 같이 쓸 수 있다. 그리고 비-스플라인 계수  $c(k)$ 는 모델의 파라미터를 나타낸다.

$$\beta^n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(x - k + \frac{n+1}{2}\right)^n \quad (4)$$

위 식(4)은  $\beta^n(x)$ 이  $n$ 차의 piecewise 다항식임을 보여준다. 스플라인 함수들 중에서 작은 굴곡 특성 때문에 많이 사용되는 큐빅 비-스플라인(Cubic B-spline, 3차 비-스플라인)함수를 식(4)을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\beta^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |x|^2 + \frac{|x|^3}{2}, & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{(2-|x|)^3}{6}, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

또한 큐빅 비-스플라인(5)의 적분에서 아래의 식을 구할 수 있다.

$$\text{여기서 필터는 } B_1^3(z) = (z+4+z^{-1})/6$$

$$\begin{aligned} (b_1^3)^{-1}(k) &\leftrightarrow \frac{6}{z+4+z^{-1}} \\ &= 6 \left( \frac{1}{1-z_1 z^{-1}} \right) \left( \frac{-z_1}{1-z_1 z} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

이며,  $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ 이다.

입력  $\{s(k)\}_{k=0, \dots, N-1}$ 와  $c^-(k) = c(k)/6$ 을 이용하여, 위 식(6)의 오른쪽은 다음과 같은 반복 알고리즘을 유도한다.

$$c^+(k) = s(k) + z_1 c^+(k-1), \quad (k=1, \dots, N-1) \quad (7)$$

$$c^-(k) = z_1 (c^-(k-1) - c^+(k)), \quad (k=N-2, \dots, 0)$$

첫 번째 필터는 인과(causal)이며 왼쪽에서 오른쪽으로 진행하고, 두 번째 필터는 비인과(anti-causal)이며 오른쪽에서 왼쪽으로 진행한다. 두 반복 알고리즘의 근사 초기 값( $c^+(0), c^-(N-1)$ )을 다음과 같다[3].

$$\begin{aligned} c^+(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} s(k) z_1^k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (z_1^{2N-2})^i \sum_{k=0}^{2N-3} s(k) z_1^k \\ &= \frac{1}{1-z_1^{2N-2}} \sum_{k=0}^{2N-3} s(k) z_1^k \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c^-(N-1) &= \frac{z_1}{(1-z_1^2)} (c^-(N-1) \\ &\quad + z_1 c^+(N-2)) \end{aligned} \quad (9)$$

기존의 연구에서는 B-스플라인의 차수를 5차까지 영상에 응용했다. 본 연구에서는 2차에서 5차까지는 물론 10차까지 스플라인의 필터를 설계하고 필터의 pole값을 구하여 영상에 적용하였다. 디자인된 스프라인 필터는 다음과 같이 6차에서 10차까지 디자인하였다.

$$\begin{aligned} s_6(k) &= \frac{1}{46080} ((t(k-3) + 722t(k-2) \\ &\quad + 10543(k-1) + 23548t(k) \\ &\quad + 10543t(k+1) + 722t(k+2) \\ &\quad + t(k+3)) \end{aligned}$$

$$s_7(k) = \frac{1}{5040} ((t(k-3) + 7120t(k-2) + 1191t(k-1) + 2416t(k) + 1191t(k+1) + 7120t(k+2) + t(k+3))$$

$$s_8(k) = \frac{1}{10321920} ((t(k-4) + 6552t(k-3) + 331612t(k-2) + 2485288t(k-1) + 4674762t(k) + 2485288t(k+1) + 331612t(k+2) + 6552t(k+3) + t(k+4))$$

$$s_9(k) = \frac{1}{362880} ((t(k-4) + 502t(k-3) + 14608t(k-2) + 88234t(k-1) + 156190t(k) + 88234t(k+1) + 14608t(k+2) + 502t(k+3) + t(k+4))$$

$$s_{10}(k) = \frac{1}{3715891200} (t(k-5) + 59038t(k-4) + 9116141t(k-3) + 178300904t(k-2) + 9069232824t(k-1) + 1527092468t(k) + 906923282t(k+1) + 178300904t(k+2) + 9116141t(k+3) + 59038t(k+4) + t(k+5))$$

### III. 영상의 사영변환

기하학적 변환은 원 영상의 좌표 변환을 통하여 새로운 좌표와 결과 영상을 얻는 것이다. 즉, 입력 영상과 출력 영상의 각 포인트 사이의 기하학적인 관계를 정의하는 것으로서, 일반적으로 입력 영상은 각각의 좌표에 대해 화소 값이 모두 정확하게 알려져 있고, 출력 영상은 변형된 데이터들로 이루어져 있다. 이러한 입력과 출력과의 관계를 나타내는 일반적인 변환 함수는 다음과 같이 표현될 수 있다[9].

$$\begin{aligned} (x, y) &= [X(u, v), Y(u, v)] \\ (u, v) &= [U(x, y), V(x, y)] \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $(u, v)$ 는 입력 영상의 좌표를 나타내고  $(x, y)$ 는 출력 영상의 좌표를 나타낸다. 또한  $X, Y, U, V$ 는 기하학적 변환을 정의하는 함수라고 할 때  $X$ 와  $Y$ 는 순방향 변환 함수라고 할 수 있고,  $U$ 와  $V$ 는 역방향변환 함수라고 할 수 있다.  $U$ 와  $V$ 를 각각  $X^{-1}, Y^{-1}$ 로 표시하기도 한다. 다음은 기하학적 변환 중 하나인 유사 변환을 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

식(11)을 다시 쓰면 순방향 변환 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x &= a_{11}u + a_{12}v + a_{13} \\ y &= a_{21}u + a_{22}v + a_{23} \end{aligned} \quad (12)$$

유사 변환의 가장 큰 특징은 평행한 두 직선을 평행한 직선으로 변환시키는 것이다. 그래서 이러한 유사 변환의 특성 때문에 회전, 평행이동 등과 같이 제한된 기능만을 수행하고 거울을 통한 반사 왜곡이나 원근 표현처럼 직선을 직선으로 변환시키기는 하지만 평행 성질을 보존하지 않는 변환은 설명하지 못한다. 이러한 변환을 설명하려면 계수  $a_{31}$ 와  $a_{32}$ 가 '0'이 되어서는 안 된다. 이와 같이 직선을 직선으로 변환시키는 가장 일반적인 변환은 투시 변환 또는 사영 변환이라고 하고, 일반적으로 아래와 같이 표현한다.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서  $x = x'/z'$   $y = y'/z'$ 을 나타낸다. 식(13)의 파라미터( $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{31}, a_{32}$ )를 구하여 입력 영상을 사영 변환시킨다. 파라미터를 결정하는 과정은 다음 장에서 설명한다.

### VI. 사영과 역사영 변화의 관계

관측된 영상을 해석하고자 하는 방향으로 임의의 역사영 변환을 하기 위해서 식(13)에서 보여준 파라미터를 사용할 수 있다. 이는 해당하는 8개의 파라미터를 구하기 위해 4쌍의 좌표 쌍 추출이 필요함과 동시에, 원 영상의 네 개의 꼭지점의 좌표를 추출하고 변환 될 영상의 네 꼭지점의 좌표를 추출하면 네 쌍의 좌표 쌍을 얻는데 사용된다.

일반적으로 식(13)을 이용할 경우, 원래의 영상의 좌표(U, V)와 변환 후의 좌표(X, Y)의 관계식은 다음과 같이 주어지는데,

$$X = \frac{k_{11}U + k_{12}V + k_{13}}{k_{31}U + k_{32}V + 1} \tag{14}$$

$$Y = \frac{k_{21}U + k_{22}V + k_{23}}{k_{31}U + k_{32}V + 1} \tag{15}$$

이를 X와 Y에 관한 식으로 정리하여 사영변환을 얻는다. 결국 역사영을 얻는 과정은 이 방법의 역순이 되는 것이다.

$$\begin{aligned} X &= k_{11}U + k_{12}V + k_{13} - k_{31}UX - k_{32}VX \\ Y &= k_{21}U + k_{22}V + k_{23} - k_{31}UY - k_{32}VY \end{aligned} \tag{16}$$

구한 좌표 쌍을 식(16)에 대입하여 사영변환에 필요한 8개의 파라미터를 구한다[9]. 이렇게 얻어진 파라미터를 이용하여, 원래의 영상에서 변환 영상의 좌표를 구하고, 내간법을 이용하여 영상의 값을 정확하게 된다. 비-스플라인 내간법을 이용하여 영상의 특정한 위치 (x, y)에서의 값은 다음과 같이 주어진다[3].

$$f(x, y) = \sum_{k=k_1}^{(k_1+K-1)} \sum_{l=l_1}^{(l_1-k-1)} c(k, l) \beta^n(x-k) \beta^n(y-l) \tag{17}$$

여기서,

$$k_1 = k_1(x) = \left\lfloor x - \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

$$l_1 = l_1(y) = \left\lfloor y - \frac{n+1}{2} \right\rfloor \text{ 이고 } K = n+1 \text{이다.}$$

또한, 덧셈의 범위를 특정한 위치 (x, y)이 '0'이 아닌 가중치를 갖게 하기 위해 제한하고, 비-스플라인 보간법을 이용한 사영변환 알고리즘은 일반적으로 다음과 같은 과정을 통하여 설정된다. 먼저 화소 값 f(k, l)을 필터링 과정을 통해 비-스플라인 계수 c(k, l)을 계산하게 되는데, 이는 설명한 1차원의 필터링 알고리즘을 행과 열을 따라 구하는 방식을 사용한다. 다음으로 영상의 점 (u, v)을 식(16)의 사영 변환 파라미터를 이용해 변환하고, 결과의 각 위치 (x, y)에서 원 영상 (u, v)에 대응하는 계수 값을 정한다. 그리고 실제 영상 값을 식(17)에 따라 계산한다. 이 과정을 통하여 영상의 사영 변환이 이루어진다[6].

선형적 역사영은 이러한 사영의 과정을 역으로 취하게 되는 것이다. 다시 언급하면, 사영은 정상적인 영상에서 왜곡된 영상으로의 변환이라 볼 수 있고, 역사영은 그 반대의 과정이라 언급할 수 있다. 정보의 관점에서 본다면, 사영은 정확한 정보를 오차가 존재하는 왜곡된 정보공간으로의 사영과정이라 볼 수 있어서, 있는 정보에서 손실의 존재를 당연시 하고 있는 과정이고, 어려움이 이러한 면에서 존재한다. 또한, 역사영에서는 관측된 정보가 왜곡된 정보이기 때문에, 관측에 의존하여, 사영 과정에서 손실된 정보를 추정해 나가는 과정이 매우 어려운 난제로 연구되고 있는 것이다.

### V. 실험 및 고찰

실험에서는 사영 변환된 영상을 복원하는 과정에서의 오차를 최소화 하는 기법을 고찰하였다. 사영 변환된 영상에 관한 기하학적인 정보는 고려하지 않고, 복원 과정에서 내간법만을 적용하였다. 실험에서, 선형 내간법, 큐빅 내간법과 본 논문에서 논한 비-스플라인 내간법을 적용하였다. [그림 1]은 원 영상을 보여 주고 있다. 이 원 영상을 두 가지의 왜곡된 영상으로 사영 변환하여 실험하였다. 첫 번째의 사영 변환된 영상은 [그림 2][그림 3][그림 4]에 나타난 영상의 위와 아래의 길이가 상

대적으로 변한 경우이고, 두 번째로 사영 변환된 영상은 [그림 13][그림 14][그림 15]의 경우로 수직성분과 수평 성분 모두가 변환된 경우이다.

첫 번째로 [그림 2]는 비-스플라인 내간법을 이용하여 사영 변환한 결과 영상을 보여주고, [그림 3]은 선형 내간법을 이용하여 얻은 영상, 그리고 [그림 4]는 큐빅 내간법을 사용한 사영 변환된 영상들이다. 그리고 [그림 5]는 [그림 2]를, [그림 6]은 [그림 4]를 다시 원 영상으로 복원한 결과 영상들이다.



그림 3. 선형 내간법을 사용한 사영 영상



그림 1. 원 영상



그림 4. 큐빅 내간법을 사용한 사영 영상



그림 2. 3차 비-스플라인을 이용한 사영된 영상



그림 5. 그림 2에서 역사영된 영상



그림 6. 그림 4에서 역사영된 영상

사영된 영상을 다시 원 영상으로 복원한 후 결과 영상들의 질을 확인하기 위해 원 영상([그림 1])과 복원된 영상들([그림 5][그림 6])의 차를 구하여 원 영상과의 차가 '1' 이상인 점들을 검게 나타내었다. [그림 7]과 [그림 8]은 비-스플라인 함수 3차와 10차를 이용하여 사영 변환한 영상을 다시 비-스플라인 함수 3차와 10차를 이용하여 원 영상으로 복원한 영상의 오차를 나타낸다. 3차를 이용한 경우의 오차는 10차를 이용한 경우에 비하여 많이 남아 있을 정도로 크다는 것을 알 수 있다.

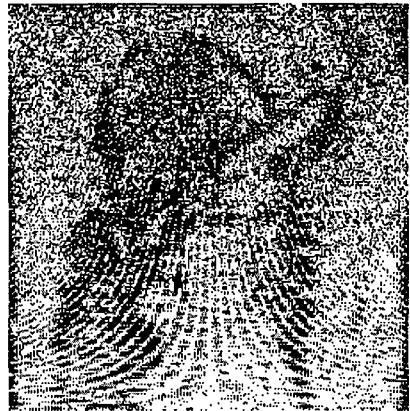


그림 8. 3차 비-스플라인을 이용한 사영 변환된 영상의 10차 비-스플라인을 이용한 역 사영과 원영상과의 오차

[그림 9]와 [그림 10]은 선형 내간법을 이용하여 구한 사영 변환 영상([그림 3])을 비-스플라인 내간법을 이용하여 원 영상으로 복원한 결과의 오차를 보여주고 있다. [그림 9]는 선형 내간법으로 변형되었던 영상을 비-스플라인 함수 3차를 이용하여 역사영 변환한 영상과의 오차이고, [그림 10]은 선형 내간법으로 변형되었던 영상을 비-스플라인 함수 10차를 이용하여 역 사영 변환한 영상의 오차를 나타낸다.



그림 7. 3차 비-스플라인을 이용한 사영 변환된 영상의 3차 비-스플라인을 이용한 역사영 영상과 원영상과의 오차



그림 9. 선형 내간법을 적용한 사영된 영상의 역사영에 3차 비-스플라인 적용한 경우의 오차



그림 10. 선형 내간법을 적용한 사영된 영상의 역사영에 10차 비-스플라인 적용한 경우의 오차



그림 12. 큐빅 보간법을 적용한 사영된 영상의 역사영에 10차 비-스플라인 적용한 경우의 오차

아래의 [그림 11]과 [그림 12]는 원 영상과 큐빅 내간법을 이용하여 사영 변환한 영상([그림 4])을 비-스플라인 함수 3차와 10차를 이용하여 복원한 영상([그림 6])의 오차를 보여 준다.

[그림 9]부터 [그림 11]의 경우는 비-스플라인 함수를 이용한 [그림 7]과 [그림 8]에 비해 많은 오차를 가지고 있다. 위의 결과에서 3차의 비-스플라인을 이용하는 경우보다 10차의 비-스플라인을 이용하는 경우에 오차가 감소하는 것을 알 수 있다.



그림 11. 큐빅 보간법을 적용한 사영된 영상의 역사영에 3차 비-스플라인 적용한 경우의 오차

두 번째로 아래의 [그림 13]은 더 왜곡된 영상의 경우를 살펴보기 위해 4차 비-스플라인 함수를 사용하여 사영 변환한 영상을 보여 주고 있다. 첫 번째와 마찬가지로 네 개의 좌표 쌍을 구하고, 구한 좌표를 이용하여 사영 변환 파라미터를 구해 영상을 변환하였다. [그림 14]는 선형 내간법을 이용한 사영 변환 영상을 나타내고 있으며, [그림 15]는 큐빅 내간법을 이용하여 사영 변환한 영상을 보여 주고 있다. 첫 번째의 경우처럼 이 세 가지 영상([그림 13][그림 14][그림 15])을 다시 3차와 10차의 비-스플라인 내간법을 이용하여 원 영상으로 역사영 변환하였다.



그림 13. 4차 비-스플라인을 사용하여 사영된 영상





그림 14. 선형 내간법을 사용하여 사영된 영상



그림 15. 큐빅 보간법을 사용하여 사영된 영상



그림 16. 그림 15에서 10차 비-스플라인을 사용하여 역사영한 영상

[그림 17]과 [그림 18]까지는 비-스플라인 내간법을 이용하여 찌그러진 영상을 복원하여 각 비-스플라인 함수에 따른 원 영상과의 오차를 나타낸다.



그림 17. 4차 비-스플라인 함수를 사용하여 사영 변환한 영상을 3차 비-스플라인을 이용하여 역사영한 영상과 원영상과의 오차

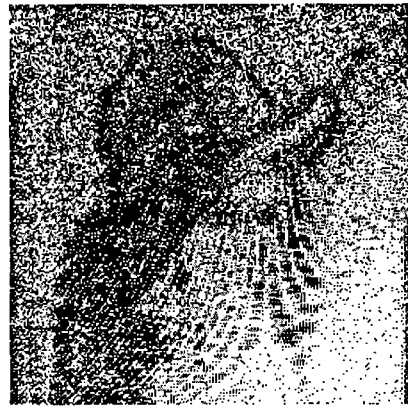


그림 18. 4차 비-스플라인 함수를 사용하여 사영 변환한 영상을 10차 비-스플라인을 이용하여 역사영한 영상과 원영상과의 오차



그림 19. 선형 내간법을 사용하여 사영 변환한 영상을 3차 비-스플라인을 이용하여 역사영한 영상과 원영상과의 오차



그림 21. 큐빅-스플라인 함수를 사용하여 사영 변환한 영상을 3차 비-스플라인을 이용하여 역사영한 영상과 원영상과의 오차



그림 20. 선형 내간법을 사용하여 사영 변환한 영상을 10차 비-스플라인을 이용하여 역사영한 영상과 원영상과의 오차



그림 22. 큐빅 내간법을 사용하여 사영 변환한 영상을 10차 비-스플라인을 이용하여 역사영한 영상과 원영상과의 오차

[그림 19]와 [그림 20]은 선형 내간법을 사용하여 사영 변환한 영상을 비-스플라인 3차와 10차 함수를 이용하여 원 영상으로 복원 한 경우의 오차를 각각 보여주고 있다.

큐빅 내간법을 이용하여 구한 찌그러진 영상을 3차와 10차의 비-스플라인 함수를 이용하여 원 영상으로 역사영 변환을 하였고, 이렇게 복원된 영상과 원 영상의 오차를 구하여 [그림 21]과 [그림 22]에 나타내었다. [그림 19]부터 [그림 22]를 살펴보면 비-스플라인 함수를

이용하여 사영 변환한 영상의 경우인 [그림 17]과 [그림 19]에 비해 많은 오차를 가지고 있음을 알 수 있다. 또한, 3차의 비-스플라인을 이용한 경우보다, 10차의 비-스플라인을 이용한 경우에 더 오차가 감소함을 알 수 있다.

그림을 통하여 여러 개의 내간법들을 이용한 변환 영상의 오차를 살펴보았다. 세 가지의 내간법으로 사영 변환한 두 가지의 영상([그림 2][그림 13])을 비-스플라인 함수를 통해 역사영 변환한 경우 큐빅 내간법이나 선

형 내간법을 이용한 사영 변환 영상이 비-스플라인 내간법을 이용한 사영 변환 영상보다 전체적으로 검게 나타나 오차를 더 많이 가짐을 알 수 있었다.

찌그러진 영상을 내간법을 사용하여 복원한 후 원 영상과 비교하여 얻은 최소 자승 오차 값을 비-스플라인 함수의 차수를 3차부터 10차까지 적용하여 [표 1]과 [표 2]에 나타내고 있다. [표 1]은 첫 번째 영상의 경우의 오차를 보여 주고 있으며, [표 2]는 두 번째의 변환 영상의 오차 값을 나타내고 있다. [표 1]과 [표 2]를 살펴보면 선형 내간법과 큐빅 내간법과 비교하여 비-스플라인 내간법이 최소 자승 오차가 비-스플라인 3차 함수부터 10차 함수까지 모두 가장 작음을 알 수 있다. [표 1]에서 비-스플라인 내간법이 선형 내간법의 최소 자승 오차에 대해 약 85%에서 88% 작은 최소 자승 오차 값을 가지며, 큐빅 내간법과 비교하여 약 86%에서 89% 작은 오차 값을 가진다. [표 2]에서도 두 내간법에 대해 약 90% 작은 최소 자승 오차를 가진다.

표 1. 최소 자승 오차(첫 번째의 경우)

	비스플라인	선형보간법	큐빅보간법
3차 BS	23.5913	116.6024	174.9313
4차 BS	19.2485	169.9875	180.4692
5차 BS	19.3501	170.5142	181.5567
6차 BS	19.6382	170.7135	181.9180
7차 BS	19.9614	170.9436	180.3650
8차 BS	19.2953	170.0659	180.7559
9차 BS	19.6499	170.2449	180.0419
10차 BS	18.9254	169.3734	179.2246

표 2. 최소 자승 오차(두 번째의 경우)

	비스플라인	선형보간법	큐빅보간법
3차 BS	32.7953	274.9679	293.9268
4차 BS	29.0239	284.6558	307.4341
5차 BS	29.6421	286.1329	309.7290
6차 BS	30.2585	286.7138	310.6926
7차 BS	30.9080	287.3130	311.6314
8차 BS	30.4711	287.8049	311.4290
9차 BS	30.0529	287.1976	310.9797
10차 BS	30.0334	287.4694	310.5176

위의 각 내간법을 사용하여 사영 변환한 영상들을 비-스플라인 내간법을 이용하여 복원한 결과를 그림과 표

를 통하여 살펴보았다. 두 가지 경우의 영상 모두 비-스플라인 내간법을 이용하여 원 영상으로 복원 할 경우 선형 내간법이나 큐빅 내간법에 비하여 비-스플라인 내간법으로 사영된 영상이 더 많은 정보를 가지고 있어 복원된 후에 원 영상과의 차이가 매우 작음을 알 수 있다. 즉, 다른 내간법을 이용한 영상 내간법보다 제안된 고차의 비-스플라인 내간법을 이용한 역사영 영상 변환이 훨씬 좋은 결과를 가져온다는 것을 보여 주고 있다.

## VI. 결론

본 논문에서는 거울을 통한 반사 왜곡이나 원근 표현을 수행하기 위한 사영 변환 영상의 역사영 변환에서의 제안된 고차의 비-스플라인 내간법을 사용한 역사영 기법을 제안하였다.

본 실험의 결과에 의하면, 제안된 고차의 비-스플라인을 이용한 역사영 기법에서는, 선형내간법이나 큐빅 내간법보다는 상대적으로 좋은 결과를 가져오는 우수성을 갖고 있음을 실험을 통하여 확인하였다. 하지만, 좀 더 향상된 결과를 위해서는 사영과 역사영에의 선형과 비선형의 사영에 관한 많은 연구가 필요하다고 본다.

## 참고 문헌

- [1] T. M. Lehmann, C. Gunner, and K. Spitzer "Addendum : B-Spline Interpolation in Medical Image Processing," IEEE Trans. Medical Imaging, Vol.20, No.7, pp.660-665, 2001.
- [2] T. M. Lehmann, C. Gunner, and K. Spitzer, "Survey : Interpolation Methods in Medical Image Processing," IEEE Trans. Medical Imaging, Vol.18, No.11, pp.1049-1072, 1999.
- [3] M. Unser, "Splines - A Perfect Fit for Signal and Image Processing," IEEE Signal Processing Magazine, pp.22-38, November,

1999.

- [4] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, "B-Spline Signal Processing: Part I - Theory," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol.41, No.2, pp.821-833, 1993.
- [5] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, "B-Spline Signal Processing: Part II - Efficient Design and Applications," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol.41, No.2, pp.834-848, 1993.
- [6] P. Thvenaz, Spline Interpolation [Online]. Available: <http://bigwww.epfl.ch/thevena/interpolation>. Mar, 2000.
- [7] I. J. Schoenberg, "Continuous to the problem of approximation of equidistant data by analytic function," *Quant. Appl. Math.*, Vol.4, pp.45-99, pp.112-141, 1946.
- [8] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, "Polynomial Spline Signal Approximation: Filter Design and Asymptotic Equivalence with Shannon's Sampling Theorem," *IEEE Trans. Information Theory*, Vol.38, No.1, pp.95-103, 1992.
- [9] 이충희, 김중화, "디지털 projection TV 에서의 화상 왜곡 보정 알고리즘 개발", 2000.

저자 소개

김 성 수(Sung-Soo Kim)

정회원



- 1997년 12월 : University of Central Florida(공학박사)
- 1999년 3월~2001년 8월 : 우석대학교 전기공학과 조교수
- 2001년 9월~현재 : 충북대학교 전기공학과 부교수

<관심분야> : 신호처리, 통신이론, 인공지능