논문 2005-42TE-3-5

피드백 선형화를 이용한 비선형 시스템에 대한 최적 제어

(The optimal control for a nonlinear system using the feedback linearization)

이 종 용*, 이 원 석**

(Jong-Yong Lee and Won-Seok Lee)

요 약

대부분의 경우, 비선형 최적 제어 문제는 헤밀톤-야코비 방정식(Hamilton-Jacobi equations)을 풀어야하는데, HJEs는 해석적으로 답을 구하기가 매우 어렵다. 그래서 이러한 어려움은 비선형 시스템에 피드백 선형화를 적용하여, 선형화된 시스템을 얻고, 선형화된 선형 시스템에 대한 최적 제어 문제를 고려하게 되었다. 본 논문에서는 간단한 비선형 시스템의 예에 최적 제어 설계 기법과 피드백 선형화 제어기, 선형 제어기를 적용하여, 최적 성능을 평가함으로서, 피드백 선형화 최적 제어가 적용되는 비선형 시스템의 조건을 제시한다.

Abstract

Nonlinear optimal control problems lead to Hamilton-Tacobi equations which are not analytically solvable for most practical problems. This difficulty has led to the development of suboptimal nonlinear design techniques such as controller design based on feedback linearization(FL). In this paper, we present some simple examples where the optimal answer can be found for the optimal controller, FL controller and linear controller and determine its relative performance. As a result, we get the condition of a nonlinear system for the FL controller to an optimal design.

Keywords : nonlinear system, feedback linearization, optimal control

I. 서 론

일반적으로, 비선형 시스템의 최적 제어 문제는 비선형 시스템 식(1)에 대하여 비용 함수 식(2)를 최소화하는 제어칙 $u = \psi(x,t)$을 결정하는 문제이다.

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{1}$$

$$J = \int_{t_0}^{T} l(x,u,\tau)d\tau + m(x(T)) \tag{2}$$

여기서, $x \in R^n$는 상태, $u \in R^m$는 입력, $t \in R$는 시간을 나타내며, $l(x,u,t)$은 양의 손실 함수(loss-function)이고, $m(x)$은 양의 종단 비용 함수이로서 초기값은 $l(0,0,t) = 0$, $m(0) = 0$을 가진다.

최적 비용 함수 식(3)과 같이 정의 한다.

$$V(x_0,t_0) = \min_{u[t_0,T]} \left(\int_{t_0}^{T} l(x,u,\tau)d\tau + m(x(T)) \right) \tag{3}$$

식(3)은 헤밀톤 야코비 방정식 식(4)와 (5)를 만족한다,

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{u(t)} \left(l(x,u,t) + [\frac{\partial V}{\partial t}]^T f(x,u,t) \right) \tag{4}$$

$$V(x,T) = m(x), \forall x \tag{5}$$

최적 제어칙 $u = \psi(x,t)$을 결정하기 위하여, 다음

* 정회원, 광운대학교 교양학부
(Division of General Education, Kwang-woon University)
** 정회원, 동양공업전문대학 전기전자통신공학부
(School of Electrical Engineering, Dongyang Technical College)
접수일자: 2005년5월18일, 수정완료일: 2005년9월12일

의 두 단계로 처리된다.

먼저 입력 $u(t)$에 대하여 최적화를 실행하면 식(6)과 같은 제어칙을 얻는다.

$$u = \psi(\frac{\partial V}{\partial x}, x, t) \tag{6}$$

다음으로 식(4)에 제어칙 식(6)을 대입하고, $V(x,t)$에 대하여 식(7)의 비선형 편미분 방정식을 푼다.

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = l(x,\psi,t) + [\frac{\partial V}{\partial t}]^T f(x,\psi,t) \tag{7}$$

이때 경계 조건은 식(8)과 같다.

$$V(x,T) = m(x) \tag{8}$$

따라서, $V(x,t)$에 대하여, $\frac{\partial V}{\partial x}$를 결정하고, 식(6)을 통하여 최적 제어칙을 결정한다.

헤밀톤 야코비 방정식(HJE)이 해를 갖는다는 것은 최적의 필요조건이지만, 충분조건은 별도로 검증되어야 한다.[1,2]

또한, 식(7)를 정확히 푼다는 것은 실제로 많은 수학적 도구와 수치해석이 필요하며, 실제로 응용하기에는 많은 어려움이 있다. 이러한 어려움 때문에, 준최적(suboptimal) 비선형 제어 기법이 개발되었다. 즉, 피드백 선형화를 기초로 하여, 제어기를 설계하는 준최적 기법을 사용한다. 피드백 선형화는 비선형 시스템을 선형 시스템으로 변환하는 좌표 변환과 같은 역할을 하는 제어 입력을 산출하는 것이며, 변환된 선형 시스템에 대하여 최적화 제어칙을 산출함으로서 전체 시스템에 대한 준최적 제어칙을 적용하는 것이다.[3,4]

본 논문에서는 간단한 비선형 시스템에 대하여, 최적 제어와 피드백 선형화 제어및 선형 제어기를 적용하여, 평가함으로서 피드백 선형화 제어기가 최적 제어가 되는 비선형 시스템의 조건을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 피드백 선형화 제어기 설계

본 논문에서 고려한 시스템은 1차 비선형 시스템이며, 다음 식(9)와 같이 표현된다.[1,2,3]

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u,\ a(0) = 0,\ x, u \in R^1 \tag{9}$$

그리고 식(2)에 해단되는 비용함수는 양의 2차 함수로서, 식(10)과 같이 표현된다.

$$J = \int_0^\infty x^2 + u^2 dt \tag{10}$$

최적 제어 문제는 비용 함수 식(10)을 최소화하는 입력 $u = \psi(x,t)$를 구하는 문제이다.

본 논문에서는, 먼저 피드백 선형화가 이루어질 수 있는 영역 $b(x) \neq 0$에 대하여, 1차 비선형 시스템 식(9)에 대한 피드백 선형화 입력을 식(11)과 같이 고려한다.

$$u = \frac{1}{b(x)}(-a(x) + v) \tag{11}$$

이때, 폐루프 시스템은 $\dot{x} = v$가 된다. 여기서 v는 피드백 선형화를 위한 입력이다.

다음으로, 선형화된 시스템 $\dot{x} = v$에 대하여, 식(12)를 최소화하는 제어칙 $v = \varphi(x,t)$을 발견하는 문제로 식(10)은 다음과 같이 변환된다.

$$J = \int_0^\infty q(x,v) d\tau \tag{12}$$

여기서, $q(x,v) = x^2 + [\frac{1}{b(x)}(-a(x) + v)]^2$ 이다.

요약하면, 비선형 시스템 식(9)에 피드백 선형화를 적용하여 선형화된 시스템 $\dot{x} = v$에 선형 제어 기법을 적용하는 것이다. 그러나 식(10)의 2차 비용 함수는 입력 u의 함수이고, 실제로 선형화된 시스템의 입력이 v에 대한 최적화 기법을 적용하기 때문에 엄밀하게 최적 제어 기법이라 할 수 없다. 그래서 피드백 선형화 제어기는 일반적으로 준최적(suboptimal)이라 한다. 다음으로 간단한 예제를 통하여 제어기들을 비교하여 보자.

Ⅲ. 비선형 시스템에 적용 된 예

이 절에서는 1차 비선형 시스템의 간단한 예제에 대하여, 피드백 선형화를 이용한 제어기, 최적 제어기 및 선형 제어기를 적용하여 제어 성능을 비교한다.

1. 예제 1

식(10)과 같은 비용함수를 갖는 비선형 스칼라(scalar) 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = e^x u \tag{13}$$

이 경우에, HJE의 해를 쉽게 얻을 수 있다. 즉, 식(3)의 $V(x_0, t_0)$는 $T=\infty$이므로 $V(x_0)$로 표현되며, 비선형 시스템 식(13)은 자율(autonomous) 시스템이다. 즉, $\frac{\partial V}{\partial t}=0$이고, 식(4)는 식(14)와 같이 표현되며, 경계 조건은 없다.

$$\begin{aligned}&\min_{u(t)}\left(l(x,u,t)+[\frac{\partial V}{\partial t}]^T f(x,u,t)\right)\\ =\ &\min_{u(t)}\left(x^2+u^2+\frac{\partial V}{\partial x}e^x u\right)=0 \qquad (14)\end{aligned}$$

입력u에 대한, 식(14)의 최소화하는 입력은

$u=-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}e^x \triangleq \psi\left(\frac{\partial V}{\partial x}, x\right)$ 이고,

이를 식(14)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$x^2+\psi^2+\frac{\partial V}{\partial x}e^x\psi = x^2-\frac{1}{4}[\frac{\partial V}{\partial x}]^2 e^{2x}=0$$

이 방정식에서, 해 $\frac{\partial V}{\partial x}=-2xe^{-x}$는 불안정한 제어기를 구성하며, 해 $\frac{\partial V}{\partial x}=2xe^{-x}$는 안정한 제어기를 구성하므로, 최적 제어칙은 $u_{opt}=-x$이 된다.

다음으로 제어기의 성능을 평가하기 위하여 최적 비용함수를 산출하자.

초기값 $V(0)=0$에 대하여, $\frac{\partial V}{\partial x}=2xe^{-x}$을 적분하면 다음과 같다.

$$V(x)=\int 2xe^{-x}dx=-2(1+x)e^{-x}+2.$$

즉, 폐루프 시스템, 최적 제어칙과 최적 비용 함수는 식(15)와 같다.

$$\begin{aligned}&\dot{x}=-e^{-x}x,\ u_{opt}=-x,\\ &J_{opt}(x)=-2(1+x)e^{-x}+2 \qquad (15)\end{aligned}$$

다음으로 피드백 선형화 제어기를 고려하자. 모든 x에 대하여 입력변환을 $u=e^{-x}v$같이 고려하면, 외부 입력에 대한 선형화 시스템 $\dot{x}=v$을 얻는다. 그리고 임의 선형 제어기 $v=-kx$를 적용하자. 그리고 상수 이득의 k 최적 값을 k_{opt}로 표현하면, 이 예의 경우는 선형화의 경우와 비교하면 k_{opt}는 1이다. 식(13)에 대한 입력을 고려하면, 폐루프 시스템과 제어칙은 식(16)과 같이 얻는다.

$$\dot{x}=-x,\ u_{FL}=e^{-x}v=-xe^{-x} \qquad (16)$$

식(15)와 식(16)을 비교하면, u_{FL}은 매우 큰 상태 $|x|$ 값에 대하여 영으로 접근하고 있음을 보여준다. 제어 성능을 평가하기 위하여 피드백 선형화 제어기에 대한 비용 함수 J_{FL}를 산출하여보자. 식(16)의 폐루프 시스템으로부터 외부 입력 $v=-kx$, 상태 $x(t)=x_0e^{-t}$와 입력 $u(t)=-x_0e^{-t-x_0e^{-t}}$에 대해 비용 함수는 식(17)과 같이 표현된다.

$$J_{FL}(x_0)=\frac{1}{4}(1-e^{-2x_0}-2x_0e^{-2x_0}+2x_0^2) \qquad (17)$$

식(15)의 J_{opt}는 $x_0\to-\infty$일 때, $-x\,e^{-x}$에, $x_0\to\infty$이면 2에 점근적으로 접근하는 것을 알 수 있다. 반면에, 식(17)의 J_{FL}은 $x_0\to-\infty$일 때, $-x_0e^{-2x}$에, $x_0\to\infty$일 때는 x_0^2을 얻는다. 만약 $x_0>0$이면, 식(15)의 J_{opt}는 2로 유계되지만, J_{FL}은 유계되지 않는다. 그래서 피드백 선형화 제어기는 충분하게 큰 상태 $|x|$에 대하여 임의 나쁜 결과를 얻는다. 또한 선형 제어기의 경우도 최적이며, $J_{lin}=J_{opt}$이다. 그러므로 예제 1의 결과로 선형 제어기는 최적이며, 피드백 선형화 제어기는 선형이라는 것을 알 수 있다.

2. 예제 2

앞의 예제 1에서, 피드백 선형화 제어기가 비선형 시스템 식(9)의 비선형 항 $b(x)$에 의해, 임의 나쁜 결과를 나타나고 있음을 보여주었다. 다음의 예는 $a(x)$가 비선형인 식(18)과 같은 예를 고려하자. 이 때 비용함수는 식(10)과 같이 고려한다.

$$\dot{x}=-\frac{x}{2}(-e^{-x}+e^x)+u = a(x)+u \qquad (18)$$

이 경우 식(4)의 HJE 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\min_{u(t)}\left(x^2+u^2+\frac{\partial V}{\partial x}(a(x)+u)\right)=0 \qquad (19)$$

식(19)를 u에 대하여 최소화를 수행하면, 식(20)과 같

은 최적 입력을 얻는다.

$$u_{opt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} \triangleq \psi(\frac{\partial V}{\partial x}, x) \tag{20}$$

식(20)을 식(19)에 대입하면 식(21)과 같이 표현된다.

$$x^2 - \frac{1}{4}[\frac{\partial V}{\partial x}]^2 + a(x)\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{21}$$

식(21)를 식(18)의 $a(x)$를 대입하고, 2차 방정식을 풀면 $\frac{\partial V}{\partial x} = 2xe^{-x}$를 얻는다.

$\frac{\partial V}{\partial x}$가 앞의 예제 1과 동일하므로, $V(x)$는 예제 1과 같다. 그러므로 최적 폐루프 시스템, 최적 제어칙과 최적 비용함수는 식(22)와 같다.

$$\dot{x} = -\frac{x}{2}(e^{-x}+e^{x}),\ u_{opt} = -xe^{-x},$$
$$J_{opt}(x) = -2(1+x)e^{-x}+2 \tag{22}$$

피드백 선형화 제어기에 대하여 예제 1의 절차에 따라 살펴보면, 폐루프 시스템, 제어칙과 J_{FL}(피드백 비용함수)는 식(23)과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = -x,\quad u_{FL} = \frac{x}{2}(-e^{-x}+e^{x}) - x$$
$$\begin{aligned}J_{FL}(x) &= e^{2x}(-\frac{1}{16}+\frac{x}{8}) + e^{-2x}(-\frac{1}{16}-\frac{x}{8}) \\ &\quad + e^{x}(1-x) + e^{-x}(1-x) + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}\end{aligned} \tag{23}$$

식(22)와 식(23)을 비교하면, 먼저 제어기가 영보다 큰 매우 상태의 경우 매우 다른 결과를 얻는다. 그러나, $x \to \infty$일 때, 각각 $u_{opt} \to 0$, $u_{FL} \to 0$을 얻는다. 즉, 피드백 선형화 제어기는 큰 초기 상태에 대하여 매우 좋지 않은 결과를 얻는다는 것을 보여주고 있다. 그리고 $x \to \infty$인 경우, $J_{opt} \to 2$이나, J_{FL}은 xe^{2x}로 점근적 접근한다. 예제 1과 비교하여 피드백 선형화에 의한 비용 함수는 좀 더 심각하게 증가함을 알 수 있다.

또한 $x < 0$에 대하여, J_{opt}는 $-xe^{-x}$비율로 증가하는 반면, J_{FL}은 $-xe^{-2x}$비율로 증가하므로, J_{FL}이 J_{opt}의 증가 비율보다 나쁘다.

이 예제의 경우, 선형 제어기는 최적이 아니며, 시스템 식(18)을 대역적으로 안정화시키지 못한다. 선형제어기의 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = -\frac{x}{2}(-e^{-x}+e^{x}+2),\ u_{lin} = -x$$

실제로 예제 2에서 고려된 시스템 식(18)은 $x = 0$에서 안정한 평형점과 $x^* = ln(-1+\sqrt{2}) < 0$에서는 불안정한 평형점을 가진다. 결과적으로 x^*와 유사한 임의 초기 상태 x_0는 안정한 상태에 접근하지 못하며, 무한대의 비용 함수를 산출한다.

그러나 선형 제어기는 양의 초기 조건 $x_0 > 0$에서는 $J_{lin}(x_0) < 2J_{opt}(x_0)$이다.

3. 예제 3

식(10)의 비용함수에 대하여, $a(x)$와 $b(x)$가 모두 고려된 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = -\frac{x}{2}(1-e^{2x}) + e^{x}u \tag{24}$$

예제 2의 경우와 같은 방법으로 고려하면, 폐루프 시스템, 최적 제어칙과 최적 비용 함수는 식(25)와 같다.

$$\dot{x} = -\frac{x}{2}(1+e^{2x}),$$
$$u_{opt} = -xe^{x},\quad J_{opt}(x) = x^2 \tag{25}$$

동일한 방법으로 피드백 선형화 제어기의 경우 폐루프 시스템, 제어칙과 J_{FL}은 식(26)과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = -x,\ u_{FL} = -\frac{x}{2}(e^{-x}+e^{x})$$
$$\begin{aligned}J_{FL}(x) &= e^{2x}(-\frac{1}{16}+\frac{x}{8}) + e^{-2x}(-\frac{1}{16}-\frac{x}{8}) \\ &\quad + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}\end{aligned} \tag{26}$$

이 예제 3의 경우에도 피드백 선형화 제어기는 불안정하며, J_{FL}은 지수적으로 증가한다.

또한 선형 제어기의 경우도 예제 2와 유사하며, 불안정한 평형점 $x^* > 0$이 존재하여 대역적 안정을 달성할 수 없으나, 모든 음의 초기 조건에 대하여 $J_{lin}(x) < 2J_{opt}(x)$이다.

4. 선형 제어기과 피드백 선형화 제어기의 최적 조건

피드백 선형화 제어기나 선형 제어기가 임의 좋지 않

은 결과를 가져온다는 것을 예제를 통하여 살펴보았다. 즉, 위의 예제를 통하여 피드백 선형화 제어기는 원하지 않는 비용 함수를 산출하거나 선형 제어기는 대역적 안정화를 보장하지 못했다.

이 절에서는 선형 제어기과 피드백 선형화 제어기의 최적화를 위한 비선형 시스템 식(9)의 $a(x)$와 $b(x)$ 조건을 제시한다. 즉, 식(9)의 시스템에 대해 선형 제어기와 피드백 선형화 제어기가 최적이기 위한 필요충분 조건을 제시한다.

정리 1

비용함수 식(10)에 대하여 식(9)로 표현되는 시스템에 대한 최적 제어 문제를 고려하자.

i) 선형 제어기 $u=-kx$가 최적이기 위한 필요충분조건은 $a(x)$와 $b(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$$\frac{a'(0)}{b(0)}x=\frac{a(x)}{b(x)} \tag{27}$$

ii) 피드백 선형화 제어기 $v=-kx$, $u=\frac{1}{b(x)}[-a(x)+v]$이 최적이기 위한 필요충분 조건은 $a(x)$와 $b(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$$a^2(x)-x^2[a'(0)]^2+x^2[b^2(x)-b^2(0)]=0 \tag{28}$$

증명 :

비용함수 식(10)에 대하여, 시스템 식(9)의 HJE은 식(29)와 같이 표현된다.

$$\min_{u(t)}\left(x^2+u^2+\frac{\partial V}{\partial x}(a(x)+b(x)u)\right)=0 \tag{29}$$

이때 최적 제어칙은 $u_{opt}=-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}b(x)$로 표현된다. 최적 제어칙을 식(29)에 대입하고, $\frac{\partial V}{\partial x}$ 대하여 정리하면 식(30)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2(a(x)\pm(a(x)^2+x^2b(x)^2)^{\frac{1}{2}})}{b(x)^2} \tag{30}$$

식(30)를 u_{opt}에 대입하고, 선형 제어기 $u=-kx$와 피드백 선형화 제어기 $u=-\frac{1}{b(x)}[a(x)+kx]$와 비교 정리하고, 조건 식(27)과 식(28)을 각각 대입하면 최적 제어기가 성립함을 알 수 있다.

증명 끝

위의 정리로부터 선형 제어기와 피드백 선형화 제어기가 최적이 되는 시스템의 조건을 아래 표 1과 같이 정리할 수 있다.

즉, 예제 1의 경우와 같이 $a(x)=0$이면 선형 제어기는 임의 $b(x)$에 대하여 최적화가 성립하지만, 피드백 선형화 제어기는 $b(x)$가 상수인 경우에 최적이다. 그리고 예제 2와 3의 경우 선형 제어기는 대역적 안정화를 얻지 못함을 보여주고 있다. 예제 3의 경우 피드백 선형화 제어기는 어떤 범위의 상태 x에서는 최적화가 성립함을 보여주고 있다. 일반적으로 피드백 선형화 제어기가 최적이기 위해서는 식(31)과 식(32)을 만족하여야 한다.

$$a(x)=x\sqrt{a'^2(0)+b^2(0)-b^2(x)} \tag{31}$$

$$b(x)=\sqrt{b^2(0)+a'^2(0)-\frac{a^2(x)}{x^2}} \tag{32}$$

즉, 피드백 선형화 제어기가 최적이라면, 모든 x에 대하여 $a(x)$가 선형 함수로 유계되여하며 ($|a(x)|<c|x|$), $|b(x)|$는 임의 유계되어야 한다. 만약 이 경우가 아니면 식(31)과 식(32)를 어떤 x의 집합에서도 정의할 수 없으므로, 피드백 선형화 제어기는 최적이 아니다.

표 1. 드백 선형화와 선형 제어기가 최적이기 위한 매개변수 조건

Table 1. The parameter conditions of FL & Linear controller is optimal.

피드백 선형화 제어기	선형 제어기
$a(x)=0$, $b(x)=$ 상수	$a(x)=0$, $b(x)=$ 임의 값
$a(x)=$ 선형 , $b(x)=$ 상수	$a(x)=$ 상수 , $b(x)=$ 상수
$x<\frac{1}{2}ln(1+b^2(0))$ 로 정의된 경우, $a(x)=xe^x$, $b(x)=\sqrt{1-e^{2x}+b^2(0)}$	모든 x에 대하여 $a(x)=xe^x$, $b(x)=e^x$

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 피드백 선형화 제어기를 적용하한 몇 가지 예를 통하여, 선형 제어기와 피드백 선형화 제어기가 최적이기 위한 필요충분조건을 유도하였다. 이 정리는 피드백 선형화 제어기를 적용한 경우 최적이기 위한 검사를 하는데 유용한 정리가 될 것이다.

참 고 문 헌

[1] Alberto Isidori, Nonlinera Control Systems, Springer-Verlag, pp.145-172, 1989.

[2] M. Vidyasager, Nonlinear Systems Analysis, Prentice-Hall, pp. 427-437, 1993.

[3] Alberto Isidori, Nonlinera Control Systems Ⅱ, Springer-Verlag, pp.79-89, 1999.

[4] A. J. van der Schaft, "L2-Gain Analysis of Nonlinear System and Nonlinear State Feedback Hinf Control", IEEE AC-37, no-6, pp.770-784, 1992.

저 자 소 개

이 종 용(정회원)

1983년 한양대학교 원자력공학과 학사 졸업.

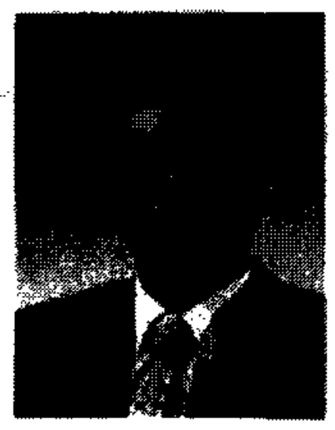
1988년 광운대학교 전자공학과 석사 졸업.

1993년 광운대학교 전자공학과 박사 졸업.

1991년~2004년 광운대학교 정보과학 교육원 교수

2005년~현재 광운대학교 교양학부 조교수

<주관심분야 : 제어, 컴퓨터, 신호처리>



이 원 석(정회원)

1976년 광운대학교 응용전자 공학과 공학사

1979년 한양대학교 전자통신 공학과 공학석사

2001년 광운대학교 전자공학과 공학박사

1980년~현재 동양공업전문대학 전기전자통신 공학부 교수

<주관심 분야 : Modem, 전자 통신 회로 및 시스템 디자인, Channel Coding>