

다양한 적층 배열을 갖는 복합 신소재 판 구조물의 유한차분 비선형 해석

Finite Difference Nonlinear Analysis of Composite Plate Structures with Various Layer Sequences

이 상 범*

Lee, Sang Bum

이 상 열**

Lee, Sang Youl

이 래 철***

Lee, Rae Chul

Abstract

This study carries out a finite difference nonlinear analysis of anisotropic advanced composite plate structures with various layer sequences. In the numerical analysis of various mechanical problems involving complex partial differential equations, the finite difference method (FDM) developed in this study has an advantage over the finite element method in its ability to avoid mesh generation and numerical integration. Many studies in FDM have been made on clamped or simple boundary conditions using merely an energy approach. These approaches cannot be satisfied, however, with pivotal points along the free boundary. Therefore, this study addresses the nonlinear problem of anisotropic plates by adopting a finite difference modeling elimination of pivotal difference points in the case of a free boundary condition. Complex nonlinear behaviors of composite plate structures for various parameters, especially for layer sequences, are analyzed using the proposed approach.

요 지

본 연구는 다양한 적층 배열을 갖는 비등방성을 보이는 첨단 복합 신소재 판구조물의 유한 차분 비선형 해석을 수행한다. 복잡한 편미분 방정식으로 표현되는 역학문제들을 수치해석 하는 경우 본 연구에서 사용한 유한차분법은 유한요소법에 비하여 체는 생성 및 수치적분 과정을 피할 수 장점을 갖는다. 유한 차분법을 이용한 많은 연구들은 단지 에너지 방법을 사용한 고정 혹은 단순 경계조건에 대하여 수행되었다. 그러나 이러한 접근방법은 자유경계에 대하여 불가피하게 발생하는 가상점 문제를 충분히 만족시킬 수 없다. 그러므로 본 연구에서는 임의의 경계조건을 갖는 비등방성 복합 적층판의 비선형 거동 문제를 보다 효과적으로 해결할 수 있는 유한차분식을 정식화 하였다. 적층 배열 변화를 비롯한 다양한 매개변수에 대하여 본 연구에서 제안한 접근방법을 사용하여 적층판의 복잡한 비선형 거동을 분석하였다.

Keywords : Composite Plates, Nonlinear Analysis, Finite Difference Method, Layer Sequence, Free Boundaries

핵심 용어 : 복합 재료 판, 비선형 해석, 유한차분법, 적층 배열, 자유 경계 조건

* 정회원, SQ엔지니어링(주) 이사, 공학박사

** 정회원, SQ엔지니어링(주) 기술연구소, 공학박사

*** 정회원, SQ엔지니어링(주) 대표이사, 공학박사

E-mail: leesangyoul@hanmail.net, 010-3011-4696

• 본 논문에 대한 토의를 2005년 12월 31일까지 학회로 보내 주시면 2006년 4월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

다양한 구조형식 중 판구조는 구조공학적인 효율성이 높아 널리 사용되는 구조형식중의 하나로써 특히 본 연구는 복합 재료 중 보강섬유로 보강된 직교이방성 판을 2개 이상 서로 겹쳐서 만든 적층판을 다룬다. 이러한 적층판은 각층을 이루고 있는 판의 성질이 서로 결합되어 재료적, 역학적으로 우수한 장점을 갖는다. 복합 적층판은 각 층의 화이버 보강 상태나 적층 재료의 특성에 따라 다양한 구조적 특성을 나타내며, 비등방성 재료라 할 수 있다. 강재와 같은 등방성 재료와는 확연히 다른 특성을 나타낼 수 있기 때문에 구조형식에 따라 역학적 거동을 예측하기가 난해하다. 따라서 구조형식 및 복합재료의 적층특성에 따른 역학적 거동 분석을 수행하여야 한다. 복합재료는 탄성계수와 전단탄성계수의 비가 매우 커서 전단변형을 무시한 고전적인 방법에 의한 해는 많은 오차를 야기시킴으로 복합적층판의 해석에서는 필히 전단변형을 고려하여야 한다. 또한 일반적으로 선형이론에 근거하여 설계 시 허용응력을 파괴응력보다 작은 범위에서 안전율을 적용하므로써 구조안전성을 확보할 수 있으나 구조물의 경제성, 안전성을 모두 만족시키는 설계를 하기 위해서는 필히 비선형해석을 수행하여 구조형식에 따른 구조물의 거동특성을 이해하고 이에 맞는 설계가 이루어지도록 하여야 한다. 특히 적층판과 같이 적층 형태에 따라 각각 상이한 거동 특성을 보이는 경우는 비선형 해석이 반드시 필요하다고 판단된다. 따라서 본 연구에서는 1차 전단변형을 고려한 복합 신소재 적층판의 기하학적 비선형 해석을 수행하여 화이버 보강 각도의 변화 등에 따른 변위를 분석한다. 또한 본 연구에서는 수치해석 기법으로서 유한차분법을 적용하는 것에 초점을 둔다. 유한차분법은 고전적인 수치해석 방법이기도 하나 유한요소법에 비하여 모델링이 간편하고 수치적분 과정을 필요로 하지 않기 때문에 비등방성을 보이는 복합재료 적층판의 비선형 거동과 같은 난해한 해석에 있어서 적합한 방법으로 판단된다.

본 연구에서 적용한 기하학적 형상은 직사각형 판으로써 단면의 두께는 일정하며, 지지조건은 마주보는 양변이 단순지지이고 타단이 자유단인 직사각형판에

대하여 전단변형을 고려한 선형해석과 기하학적 비선형해석을 수행한다. 유한차분법의 적용에 있어서 자유 경계는 불가피한 가상점(Pivotal points)이 발생하므로 이에 대한 처리 방법이 다소 난해하다고 할 수 있다(이상열 등, 2000; 유용민 등, 2000; 이상열 장석윤, 2002). 따라서 대부분의 기존 연구는 단순지지 또는 고정 경계를 갖는 판에 국한하여 기하학적 방법이나 에너지 방법을 적용하여 경계조건 문제를 단순화시켜 해결하였다(Ng and Bencharif, 1989; Bencharif, 1988; Langhaar, 1962). 그러나 판의 비선형 거동까지 고려하는 경우는 자유 경계조건에 대하여 기존의 방법으로 충분히 만족할 만한 결과를 얻지 못하는 경우가 발생하게 된다. 따라서 본 연구에서는 적층 판의 자유 경계에 대한 유한차분법 적용에 있어서의 가상점 처리 과정을 정식화하며, 이러한 접근 방법을 사용하여 적층 개수 및 각도 배열 등을 다양하게 변화시키면서 예측하기 매우 난해한 판의 선형 및 비선형 거동을 상세 분석하기로 한다.

2. 기본 이론

본 논문에서 적용한 1차전단변형 판이론은 Reddy의 적층판 이론(Reddy, 1997; 유용민 등, 2000)을 비롯한 국내외의 여러 연구가 진행되었으므로 참고문헌화 하여 상세한 기술은 생략하며 비선형 이론의 전개상 필요한 부분을 중심으로 기술한다.

2.1 좌표계 및 변위장

본 연구에서 사용된 평판요소에 대한 좌표계는 오른손 직교좌표이며 1차전단변형을 고려하였으므로 기본적으로 판은 5개의 자유도를 갖는다. 판의 중립면에서 X, Y, Z 축방향에 대한 변위 u_0, v_0, w_0 와 X 축과 Y 축 방향에 대한 회전각 변위 ϕ_x, ϕ_y 는 Fig. 1과 같이 정의한다.

2.2 전단변형을 고려한 적층판의 비선형

전단변형을 고려하는 Mindlin 판 이론을 복합적층

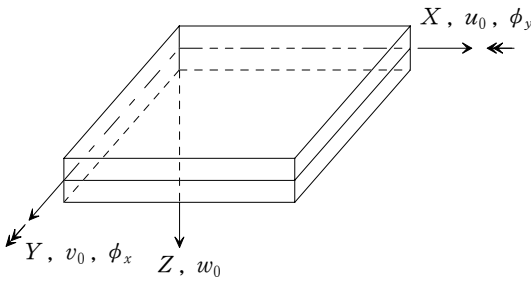


Fig. 1 좌표계 및 변위장

판에 적용하여 판의 해석에서 전단변형을 고려한 유한 변형이론에 의한 복합적층판의 기하학적 비선형항을 포함하는 변형도-변위 관계식을 제외한 모든 식은 미소변형일 때의 Mindlin 판 이론과 동일한 식으로 사용한다.

먼저, 3차원 탄성체의 변위-변형도 관계식으로부터 Von Karman의 판에 대한 변위-변형도 관계식을 다음 식과 같이 정의 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_{xz} &= \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \epsilon_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (1)$$

식 (1)로부터 다음과 같은 변형도-변위 관계식을 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_x^0 + z k_x, \quad \epsilon_y = \epsilon_y^0 + z k_y \\ \epsilon_z &= 0, \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{xz}^0, \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{yz}^0 \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{xy}^0 + z k_{xy}\end{aligned}\quad (2)$$

여기서,

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2,$$

$$\begin{aligned}\epsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \epsilon_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \epsilon_{xz}^0 &= \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \epsilon_{yz}^0 = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ k_x &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \\ k_{xy} &= \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y}\end{aligned}$$

이다. 한편, 1차전단변형 판이론에서 비선형항을 고려한 단면력-변위의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ \vdots & \vdots \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij}^k dz$$

$(i, j = 1, 2, 6)$ 이며,

$$A_{ij} = K \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^k dz \quad (i, j = 4, 5).$$

여기서, A_{ij} 는 면내력 강도, B_{ij} 는 면내력-휨 연계 강도, D_{ij} 는 휨 강도, A_{ij} 는 전단 강도라고 각각 정의하며, K 는 전단보정계수이고 사각형 판인 경우에 보통 5/6 을 사용한다.

에너지 방법에 의해 판의 비선형 평형방정식을 구하기 위하여 판 전체에 대한 포텐셜에너지 Π 를 구하면 다음과 같다(Langhaar, 1962).

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz}] dx dy dz \\ &\quad - \int_s P_i \delta x dy \\ &= \int_V \left[N_x \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad + N_x \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ &\quad + M_x \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \Big] dx dy \\ &\quad - \int_s P_i \delta x dy\end{aligned}\quad (4)$$

여기서, P_i 는 외력벡터를, q_x, q_y, q_z 는 X, Y, Z 방향의 하중, m_x, m_y 는 ϕ_x, ϕ_y 방향의 모멘트, 그리고 δ 는 각 절점의 자유도벡터 $\delta = \{u_0 \ v_0 \ w_0 \ \phi_x \ \phi_y\}^T$ 을 각각 의미한다.

에너지함수의 1차변분 원리를 이용하면 다음과 같은 비선형 평형방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\delta u_0 : \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= -q_x \\ \delta v_0 : \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= -q_y \\ \delta w_0 : \quad & \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \\ &= -q_z(x, y) \\ \delta \phi_x : \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= -m_x \\ \delta \phi_y : \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= -m_y\end{aligned}\quad (5)$$

위의 평형방정식에 단면력과 변위관계식 식 (3)을 대입하면 평형방정식을 힘과 변위의 지배방정식(부록

참조)이 유도되는데 이는 유한차분법을 적용하기 위한 형태라 할 수 있다.

3. 유한차분법의 적용

유한차분법은 테일러 급수를 이용하는 수치해석 기법이며 테일러 급수를 이용하기 때문에 오차의 범위를 선택적으로 결정할 수 있다. 이와 같이 유한차분법은 오차의 범위를 선택적으로 결정함으로써 해의 정확도를 조절할 수 있는 장점을 갖는다. 즉, 오차범위의 결정이란 임의의 점에 대한 차분방정식 구성시 그 점 주위의 기지점의 수, 필요한 차분점의 수를 결정하는 것을 의미한다. 또한 미분방정식으로 구성된 구조물의 평형방정식을 차분식을 이용해 변환함으로써 해석가능한 연립방정식의 형태를 갖추는데 편리한 장점을 가지고 있다. 유한차분법은 알고자 하는 점의 함수값을 구현하기 위해 사용되는 기지점의 종류에 따라 전진차분법, 중앙차분법, 후진차분법으로 구분된다. 전진차분법은 전방의 기지값만을 이용하며, 중앙차분법은 전방과 후방의 값을 후진차분법은 후방의 기지값을 이용하여 선택한 오차 한계 내에서 원하는 점의 값을 구현한다(Al-Khagaji and Toley, 1986).

본 연구에서는 \mathcal{L}^2 의 오차한계를 갖는 유한차분식을 이용하여 지배방정식을 유한차분방정식으로 변환하는 방식을 적용하였다.

판의 지배방정식에 유한차분법을 적용하는 경우 특히 자유단을 포함하는 판의 경우는 그 처리방법은 매우 중요하다. 즉, Fig. 2와 같이, 판의 내부점에 대해서는 중앙차분법을 이용하여 표현하고 경계선상에서의 차분방정식은 자연경계조건과 강제경계조건을 이용하여 가상점을 소거한 내분점만의 차분방정식을 구성해야 한다. 만약, 판이 자유단을 갖는 경우, $y=0$, $y=b$ 선상에서 임의의 x 축 상에서의 가상점 소거 방법을 설명하면, $y=0$, $y=b$ 에서 경계조건은 $N_{xy}=0$,

$N_y=0$, $M_{xy}=0$, $M_y=0$, $Q_y=0$ 가 되므로 가상점에 대한 매트릭스 방정식으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다. $y=0$ 및 $y=b$ 에서의 경계조건에 대한 차분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} A_{66} & A_{26} & 0 & B_{66} & B_{26} \\ A_{26} & A_{22} & 0 & B_{26} & B_{22} \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ B_{66} & B_{26} & 0 & D_{66} & D_{26} \\ B_{26} & B_{22} & 0 & D_{26} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i,j-1} &= \frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} A_{16} & A_{66} & 0 & B_{16} & B_{66} \\ A_{12} & A_{26} & 0 & B_{12} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{45} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{66} & 0 & D_{16} & D_{66} \\ B_{12} & B_{26} & 0 & D_{12} & D_{26} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i-1,j} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i,j} \\
+ \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} A_{16} & A_{66} & 0 & B_{16} & B_{66} \\ A_{12} & A_{26} & 0 & B_{12} & B_{26} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{66} & 0 & D_{16} & D_{66} \\ B_{12} & B_{26} & 0 & D_{12} & D_{26} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i+1,j} &+ \frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} A_{66} & A_{26} & 0 & B_{66} & B_{26} \\ A_{26} & A_{22} & 0 & B_{26} & B_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_{66} & B_{26} & 0 & D_{66} & D_{26} \\ B_{26} & B_{22} & 0 & D_{26} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i,j+1} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} A_{66} & A_{26} & 0 & B_{66} & B_{26} \\ A_{26} & A_{22} & 0 & B_{26} & B_{22} \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ B_{66} & B_{26} & 0 & D_{66} & D_{26} \\ B_{26} & B_{22} & 0 & D_{26} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i,j+1} &= \frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} A_{66} & A_{26} & 0 & B_{66} & B_{26} \\ A_{26} & A_{22} & 0 & B_{26} & B_{22} \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ B_{66} & B_{26} & 0 & D_{66} & D_{26} \\ B_{26} & B_{22} & 0 & D_{26} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i,j-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i,j} \\
+ \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} A_{16} & A_{66} & 0 & B_{16} & B_{66} \\ A_{12} & A_{26} & 0 & B_{12} & B_{26} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{66} & 0 & D_{16} & D_{66} \\ B_{12} & B_{26} & 0 & D_{12} & D_{26} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i-1,j} &+ \frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} A_{66} & A_{26} & 0 & B_{66} & B_{26} \\ A_{26} & A_{22} & 0 & B_{26} & B_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_{66} & B_{26} & 0 & D_{66} & D_{26} \\ B_{26} & B_{22} & 0 & D_{26} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}_{i,j+1} \quad (7)
\end{aligned}$$

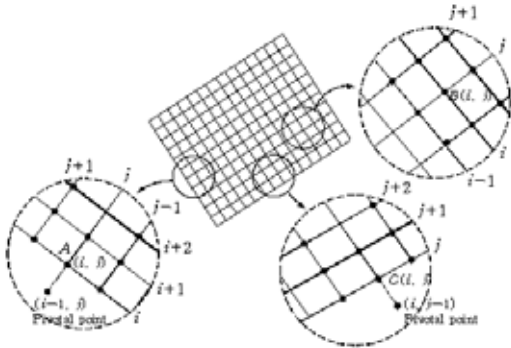


Fig. 2 판구조에서의 각 경계별 가상점

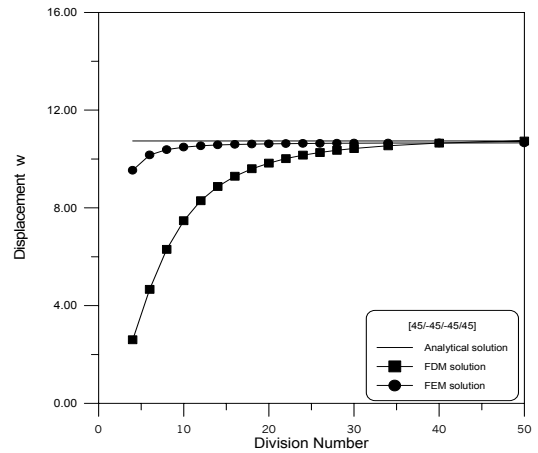
식 (6)과 (7)을 매트리스 형태로 다시 변환하고 가상점에 대한 차분계수매트릭스(좌향)에 대한 역매트릭스를 구하여 우향의 내부점에 대한 차분계수매트릭스에 곱하면 자유단에 대한 가상점을 내부의 점만으로 표현할 수 있는 식을 구할 수 있다. 이러한 경계조건의 처리는 과정이 다소 복잡할 수 있으나 자유단의 경우 외력과 변위의 조건을 유한차분식을 사용하여 효과적으로 변환 적용함으로써 경계에서의 발생하기 쉬운 역학적 거동의 오차를 감소시키는 장점을 갖는다고 할 수 있다.

4. 수치예제 및 결과 분석

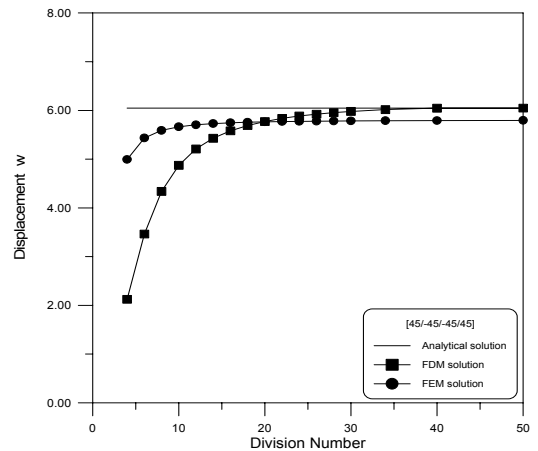
본 연구에서 해석 예로 사용된 재료는 boron fiber가 epoxy matrix에 재료축 방향으로 묻혀있는 복합 재료이며 자세한 물성치는 Table 1과 같다. 또한 해석 예의 기하학적 형상은 사각형 판이며, 지지조건은 마주보는 두변이 단순지지이고, 타단은 자유단인 복합 적층판에서 대하여 선형 및 비선형해석을 실시하였다.

4.1 프로그램 검증

개발된 유한차분 해석 프로그램의 검증을 위해서 마주보는 양변이 단순지지이고 타단 자유단인 판을 해석해와 비교하여 수렴도를 분석하였다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 Levy의 해석적방법과 유한요소 상용프로그램(LUSAS)의 결과를 비교하였으며 절점 수 증가에 따른 판 중앙 점 변위를 구하여 무차원 ($w = w_0 E_2 h^3 / a^4 q$)화 하였다(Crisfield, 1991, Fertis, 1993). 요소의 분할수 증가에 따른 수렴은 탄성 계수비의 관계없이 유한요소법에 의한 수치해석 결과가 유한차분에 의한 수치해석 결과보다는 수렴속도가 다소 빠른 것으로 나타났다. 그러나 요소의 분할 수가 많아지면서 점차 유한차분에 의한 수치해석 결과가 유한요소법에 의한 수치해석 결과 보다 정확도면에서는 해석 해에 가깝게 수렴함을 알 수 있다. 두 가지 경우에 대하여 유한요소법에 의한 수치해석 결과는 해석해와 오차를 두고 수렴하는 것을 볼 수 있다. 그러나 유



(a) $E_1:E_2 = 2:1$



(b) $E_1:E_2 = 10:1$

Fig. 3 절점 및 요소 증가에 따른 판의 중앙점 변위 ([45/-45/-45/45])

한차분법에 의한 수치해석 결과는 요소의 분할 수가 증가함에 따라 해석 해의 값과 일치하여 수렴함을 관찰할 수 있다.

4.2 화이버 보강각도 변화에 따른 하중-변위곡선의 비교

본 예제에서는 판의 두께와 적층수는 일정한 상태에서 화이버의 보강각도 변화에 따른 결과를 도출하였으며, 재료 I에 대하여 판의 두께(t)는 1, 판의 길이는

Table 1 사용재료의 재료 특성치

구 분	재료 I	재료 II
탄성계수	$E_1:E_2 = 25:1$	$E_1:E_2 = 2 \text{ or } 10:1$
전단탄성계수	$G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$ $G_{23} = 0.2E_2$	$G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ $G_{23} = 0.5E_2$
적층판의 길이(a)	10t	10t
적층판의 폭(b)	10t	10t
적층판의 두께(t)	1.0	1.0
프라이머 비	$\nu_{12} = 0.25$	$\nu_{12} = 0.30$

Table 2 대칭적층판의 각도변화에 따른 중앙점에서의 선형 및 비선형 변위($w = w_0 E_2 t^3 / qa^4 \times 10^2$)

보강각도	선형		비선형	
	FDM	FEM	FDM	FEM
[0/90/90/0]	1.115	1.115	1.126	1.126
[90/0/0/90]	2.037	2.148	2.032	2.144
[30/-30/-30/30]	1.658	1.724	1.657	1.722
[45/-45/-45/45]	3.831	4.108	3.824	4.063
[60/-60/-60/60]	9.397	10.594	9.309	9.788
[30/60/60/30]	1.848	1.911	1.847	1.909

$x = y = 10t$, 적층판의 수는 4-layer이다. Table 2는 대칭 적층에 대하여 본 해석 결과와 유한요소법을 사용한 LUSAS의 결과를 비교한 것이다. 표와 같이 화이버 보강각도 [60/-60/-60/60]일 경우가 선형 및 비선형 변위가 최대값을 나타내었고, 화이버 보강각도 [0/90/90/0]인 경우가 선형 및 비선형 변위에서 최소값을 나타내었다. 또한 같은 각도로 배열한 [0/90/90/0]과 [90/0/0/90]에서 처짐의 차이가 나는 것은 휨강도인 D_{ij} 중 본 예제에 적용된 지지조건에서는 D_{11} 의 크기가 처짐에 크게 영향을 주기 때문이다. 즉 [90/0/0/90]보다는 [0/90/90/0]인 경우가 D_{11} 이 크기 때문으로 판단된다.

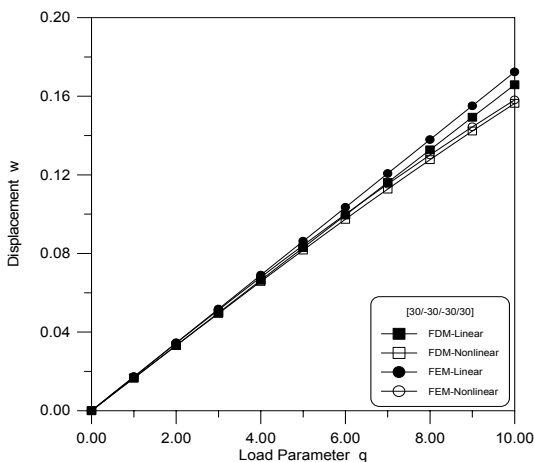


Fig. 4 [30/-30/-30/30]인 경우 판의 중앙점에서의 선형 및 비선형에 대한 하중-변위곡선

Table 3 역대칭 적층판의 각도변화에 따른 중앙점의 선형 및 비선형 변위($w = w_0 E_2 t^3 / qa^4 \times 10^2$)

보강각도	선형		비선형	
	FDM	FEM	FDM	FEM
[0/90/0/90]	1.629	1.660	1.605	1.659
[90/0/90/0]	1.629	1.660	1.605	1.659
[30/-30/30/-30]	1.630	1.682	1.629	1.680
[45/-45/45/-45]	3.741	3.981	3.734	3.945
[60/-60/60/-60]	9.304	10.420	9.211	9.692
[60/30/-30/-60]	5.859	6.748	5.763	6.520

역대칭적층판으로 Table 3과 같이 6종류의 적층판에 대하여 선형 및 비선형 해석을 실시하였다. 해석 결과 대칭인 경우와 유사하게 [60/-60/60/-60]인 경우가 선형 및 비선형 변위가 최대값을 나타내었고, 화이버 보강각도 [0/90/0/90]과 [90/0/90/0]인 경우가 Fig. 5와 같이 선형 및 비선형 변위에서 최소값을 나타내었다. 또한 앵글-플라이 적층시 같은 각도로 대칭 적층한 경우와 역대칭 적층한 경우를 비교해보면 역대칭 적층한 경우가 처짐이 더 작음을 알 수 있다. 따라서 앵글-플라이 적층 설계시 대칭적층보다는 역대칭으로 배열하는 것이 처짐에 유리한 것으로 판단된다.

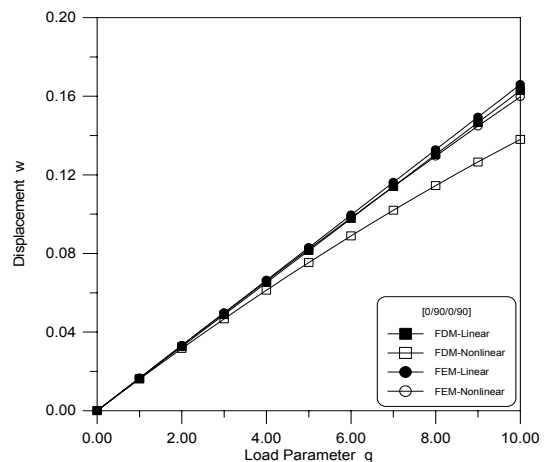


Fig. 5 [0/90/0/90]인 경우 판의 중앙점에서의 선형 및 비선형에 대한 하중-변위곡선

4.3 적층수 변화에 따른 비선형 변위 비교

본 해석 예에서는 판의 두께와 화이버 보강각도[30/60]인 경우로 적층요소의 수를 변화시켜가면서 비선형 변위를 분석하였다. 사용된 재료는 재료 I이며 판의 두께(t)는 1, 판의 길이는 $x = y = 10t$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 로서 적층판의 수는 2, 4, 6, 8, 10-layer이다.

Table 4에서 보는 바와 같이 해석결과 적층요소 수가 가장은 작은 $n=1$ 인 경우의 선형 및 비선형 변위 값이 가장 크게 나타났다. 또한 적층요소수가 늘어남에 따라 선형 및 비선형 변위 및 단면력의 크기도 작아지는 것을 관찰할 수 있다. 특히 $n=2$ 인 적층 요소 수 4이상에서는 변위 값의 차가 작게 나타남을 알 수 있다. 따라서 적층요소수가 늘어남에 따라 변위가 줄어드는 양은 점점 작아짐을 알 수 있다. 복합적층판 설계시 가능한한 많은 수의 적층요소를 사용하는 것이 변위제어에 유리하게 작용한다. 따라서 최소 적층요소 수를 4-layer이상으로 하는 것이 유리하다.

4.4 폭-두께비 변화에 따른 비선형 변위

화이버 보강각도[10/20/-20/-10]인 경우로 적층요소의 수는 4-layer로서 폭(a)과 두께(t)의 비를 변화시켜가면서 비선형 변위 및 단면력 결과를 분석하였다. 재료 I을 사용하였으며 판의 폭-두께비는 2.0, 2.5, 5.0, 10.0, 20.0인 경우에 대해 해석하였다. 결과는 단위등분포하중을 받는 적층판의 변위분포를 그래프로 나타내어 변위의 변화 경향을 분석하였다.

Table 4 적층수 변화에 따른 판 중앙점에서의 선형 및 비선형 변위 ($w = w_0 E_2 t^3 / qa^4 \times 10^2$)

n	선형		비선형	
	FDM	FEM	FDM	FEM
1	3.200	3.285	3.197	3.273
2	2.702	2.783	2.689	2.777
3	2.660	2.729	2.624	2.723
4	2.642	2.711	2.601	2.705
5	2.626	2.703	2.589	2.697

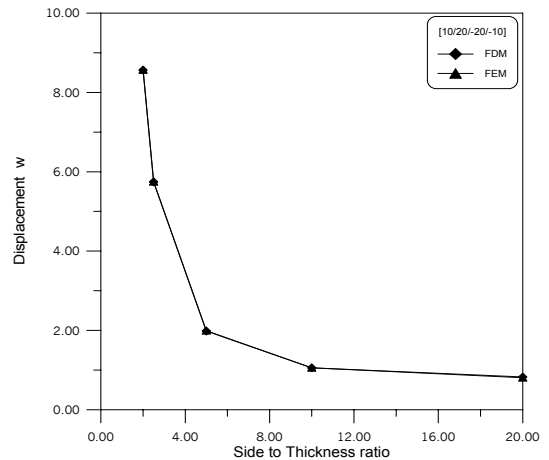


Fig. 6. 폭-두께비 변화에 따른 판 중앙점에서의 비선형변위 w 의 변화 ($w_0 E_2 t^3 / qa^4$)

Fig. 6에서 보는 바와 같이 폭-두께비가 증가할 수록 비선형 변위는 감소하는 것으로 나타났으며, 특히 폭-두께비 10 이상부터는 감소의 비율이 현저히 줄어들어 일정하게 수렴해가는 것을 관찰할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 1차 전단변형을 고려한 자유단을 갖는 복합적층판의 비선형 거동에 대하여 유한차분법을 적용하여 경계조건 처리를 유도하고 다양한 경우에 대하여 변위를 분석하였다.

프로그램 검증은 해석해 및 유한요소법에 의한 해와 비교하였으며 모든 경우에 대해 공학적 오차 범위 내에서 수렴하였으며, 또한 정확도도 만족할 만한 결과를 보였다. 또한 비선형 해석에 대한 수치해석 방법으로는 하중증분법인 Newton-Raphson방법을 사용하였다.

본 연구에서는 제안한 유한 차분법을 사용하여 대칭 앵글-플라이, 역대칭 앵글-플라이로 구분하여 화이버의 보강각도 변화에 따른 하중-변위곡선 변화를 분석하였으며 적층요소수의 변화와 판의 폭-두께비 변화 등에 따른 선형 및 비선형 변위를 분석하였다. 분석결과 다음과 같은 공학적 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 하중-변위 분포곡선 분석결과 휨강성이 큰 판구조가 휨강성이 작은 경우에 비하여 같은 하중단계에서 선형과 비선형의 변위 차이가 크지 않다. 그러나 휨강성이 작은 판구조는 선형과 비선형 변위의 차가 커서 이러한 경우 비선형 해석을 해야 한다.
- 2) 적층요소의 배치시 휨강성을 크게 할 수 있는 적층요소를 바깥쪽에 배치하고 적은 요소를 안쪽으로 배치함으로써 판구조에 발생하는 변위를 효율적으로 제어 할 수 있다.
- 3) 비선형 거동의 경우 앵글-플라이 적층시 대칭적층에 비하여 역대칭 적층이 변위가 작았다. 그러나 역대칭 적층 형태 중에서도 [60/-60/60/-60]은 최대 처짐을 보였음에 유의해야 할 것이며, 반면 [0/90/0/90] 또는 [90/0/90/0]인 경우는 최소 처짐을 보여서 추천할 만 하다.
- 4) 같은 두께에 대해 적층 요소수를 가능한 많이 적층하는 것이 변위 제어에 더 효과적이며 최소한 적층 개수를 4-layer이상으로 하는 것이 유리하다.

위의 결과로부터 자유단을 갖는 복합적층판의 거동은 화이버의 보강각도, 적층형태, 적층요소의 수, 일방향과 이방향 탄성계수비, 탄성계수와 전단탄성계수의 비 등 여러 요인에 의하여 거동특성이 매우 상이하게 나타나는 것을 알 수 있다. 이러한 요인들은 직접적으로 구조물의 강성에 영향을 주는 요인이다. 즉, 위의 요인에 따라 구조물의 강성이 커질 수도 있고 작아질 수도 있게 된다. 특히 다양한 적층형태 및 보강각도를 갖는 복합 적층판의 경우는 비선형 해석을 통하여 거동 특성을 정확히 규명할 필요가 있다.

참고문헌

1. 이상열, 임성순, 장석운 (2000), "임의의 경계조건을 갖는 비등방성 탄성체의 3차원 유한차분 해석", 한국강구조학회 논문집 제12권 3호 pp.303~316.
2. 유용민, 이상열, 장석운 (2000), "자유경계를 갖는 비등방성 판의 유한차분 안정성 해석", 한국강구조학회 논문집 제12권 2호 pp.221~230.
3. 이상열, 장석운 (2002), "Stress Distributions of Anisotropic Three-dimensional Semi-infinite Bodies by a Refined Finite Difference Formulation", KSCE Journal of Civil Engineering, Vol.6, No.4 pp.447~455.
4. M.A. Crisfield (1991), "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", Wiley.
5. Henry L. Langhaar, (1962), "Energy Methods in Applied Mechanics," John Wiley & Sons, Inc.
6. J. N. Reddy, (1997) "Mechanics of Laminated Composite Plates, CRC Press.
7. NG S. F. and Bencharif N. (1989), "A Finite Difference Computer Program for the Modelling of Thick Rectangular Plates," Computer & Structures, Vol. 33, No.4, pp.1011-1016.
8. Al-khafaji, A.W. and Toley, J. R., (1986), "Numerical Methods in Engineering Practice", Holt, Rinehart and Winston, inc., pp. 342~370.
9. N. Bencharif, (1988), "Application of Finite Difference Method to the Deflection of Clamped and Simply Supported Thick Rectangular Plates", M. A. Sc. Thesis, Ottawa University Ontario.
10. Demeter G. Fertis (1993), "Nonlinear Mechanics," CRC press, inc.
11. Ted Belytschko, Wing Kam Liu, and Brian Moran (2000), "Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures," John Wiley & Sons, Ltd.

(접수일자 : 2004년 12월 22일)

부 록

1차 전단변형을 고려한 5개의 자유도를 갖는 적층 판의 비선형 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\
 & + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \\
 & + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial x} \left\{ A_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial y} \left\{ A_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \\
 & = -q_x \\
 & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\
 & + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \\
 & + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial x} \left\{ A_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial y} \left\{ A_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} = -q_y \\
 & A_{55} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + A_{44} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 & + A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\
 & + A_{45} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \\
 & = -q_z(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} - A_{45} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 & + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - A_{55} \phi_x \\
 & + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - A_{45} \phi_y \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial x} \left\{ B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial y} \left\{ B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \\
 & = -m_x \\
 & B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & - A_{45} \frac{\partial w_0}{\partial x} - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 & + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - A_{45} \phi_x \\
 & + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - A_{44} \phi_y \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial x} \left\{ B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \\
 & - \frac{\partial w_0}{\partial y} \left\{ B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} = -m_y
 \end{aligned}$$