한국초등수학교육학회지 9(2), 85-110. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 9(2), 85-110.

초등 수학 문제해결 과정에 사용되는 표현 방법에 대한 연구

김 유 정[1] · 백 석 윤[2]

시각적 표현은 문제해결을 이끄는 안내자의 역할을 수행하며, 문제해결의 결정적 단서를 제공하는 유용한 도구이다. 수학과 교수-학습에서 교사는 시각적 표현의 중요성을 강조하여야 하며, 아동은 문제상황에 대한 감각을 길러야 한다. 따라서 본 연구의 목적은 아동이 문제해결 과정에서 사용하는 시각적 표현의 특징을 분석하고 성공적으로 문제를 해결한 학생들의 표현 유형을 정리하여, 아동이 문제에서 제시하는 여러 가지 조건을 적절한 시각적 표현 방법으로 조직화하게 하는데 시사점을 주고자 하는데 있다. 이러한 연구 목적을 달성하기 위하여 아동의 문제해결지를 분석한 결과, 초등 수학 문제해결 과정에서 대부분의 아동은 다양한 방법으로 조건을 표현하는데 익숙하지 못하였으며 시행착오 단계를 거치지 않고 처음 선택한 전략을 끝까지 사용하는 경향을 보여 문제를 읽고 생긴 처음 이미지가 문제해결에 중요한 영향을 끼친다는 것을 알았다. 또한 성공적으로 문제를 해결한 아동은 계산식에 의존하기보다는 여러 가지 정보를 해결할 수 있는 형태로 표현하여 문제를 해결하였으며, 문제해결 과정을 직관적으로 파악할 수 있을 정도의 명료하고 조직화된 그림을 그린다는 것을 알 수 있었다.

[주제어] 수학문제해결, 표현 방법

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학교육에서 문제해결 교수법은 너무 사실과 규칙, 그리고 절차를 강조하는 알고리즘적 접근 방법을 사용하였다. 그리고 학생들은 문제를 체계적으로 해결하고, 한 가지 방법으로 해결할 수 있는 것처럼 배워왔다. 교사들도 학교에서 이러한 방법으로 배워왔기 때문에 알고리즘적 접근 방법은 가르치기에 가장 편안한 방법이다. 그러나 많은 교사들이 알고리즘적 접근이 아동의 문제해결력 신장에 장애가 되는 것을 인정한다. 학생들이 문제를 해결하는 절차를 배웠지만, 이와 비슷한 문제를 해결하지 못하는 것을 종종 볼 수 있다. 이는 문제해결 방법의 개념적 이해를 하지 못하거나 문제에 적당한 해결 방법으로 변환하지 못하는 것이다. 최근의 교과서에는 문제해결 전략의 학습내용이 포함되어 있으나 그것으로는 충분하지 않다. 실세계 문제는 여러 가지 정보가 뒤섞여 있으며, 모든 문제가

1) [제1저자] 서울 중흥 초등학교.
2) 서울 교육 대학교 수학교육과.

한 가지의 해결 방법을 가지고 있는 것은 아니다. 아동이 문제해결을 위해 한번에 여러 가지의 정보를 기억하는 것은 쉽지 않다. 그러므로 아동의 문제해결력 신장을 위해 알고리즘적 접근 방법뿐만 아니라 시각화 능력이 좀 더 강조되어야 할 것이다.

이 연구는 학생들에게 시각화하는 것을 장려하는 것이 문제해결에 도움이 된다는 이론을 바탕으로 한다(Hembree, 1992; Lester, 1982; Wheatley, 1991; Wheatley & Brown, 1994; van Essen & Hamaker, 1990; Yackel & Wheatley, 1990; Yancey, Thompson & Yancey, 1989). 그러므로 이 연구에서는 아동이 문제를 해결하는데 시각화 방법을 사용하도록 권유할 것이다. 시각화 방법을 사용하는 것이 아동뿐만 아니라 교사들에게도 수학 문제해결과정이 한 가지 이상임을 받아들이는 것이 쉽게 할 것이다. 또한 시각화 방법의 사용은 수학적 감각 기르기를 강조함으로써 학생들이 교사에 의해 설명된 상황을 받아들이기보다 스스로 상황에 대한 감각을 갖게 하며, 나아가 원리나 전략을 발견할 수 있는 능력을 갖게 할 것이다.

수학 문제해결 과정에서 문제해결자는 문제에 주어진 상황을 내적 이미지로 바꾼 후에, 문제를 구성하는 요소들을 해석하는 것으로 문제해결을 시작한다. 이때, 주어진 문제의 여러 조건들을 문제해결자가 직접적인 인식을 통하여 이해하기는 쉽지 않다. 이러한 경우에 주어진 문제를 구체적이고 확실하며 다루기가 편리한 시각적 표현으로 변형하는 것은 유용하고 효과적인 방안이 될 수 있다(이대현, 2003).

표현은 일종의 기하학적 언어로 관련된 요소를 공간적, 동시적으로 나타내는 것이 가능하며, 사고를 요약해 주고 문제해결 과정에서 사고를 돕는 등 매우 중요한 수학적 수단이 된다. 표현의 힘은 표면상 전연 무관한 것을 학습자가 연결하게 하는 그 힘으로 기술될 수도 있으며, 이는 특히 수학 학습-지도에서 결정적인 것이다(우정호, 2002).

학생들은 각자 스스로의 시각적 표현을 구성하도록 격려되어하며, 시각화의 다양한 방법에 익숙해져야 한다. 이를 통해 문제 상황에 대한 감각을 갖고, 수학적 지식이나 원리, 전략을 종합하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 길러야 한다. 또한 시각적 표현의 한계를 스스로 인식하고, 그 한계를 극복하여 문제해결의 유용한 도구로 이용하도록 해야 할 것이다.

2. 연구 문제

본 연구에서는 아동이 문제해결 과정에서 사용하는 표현 방법을 분석하여 시각적 표현을 지도하는 수학과 교수-학습에 시사점을 주고자 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 초등 수학 문제해결 과정에서 아동이 사용하는 표현 방법은 어떤 특징을 가지고 있는가?

둘째, 초등 수학 문제해결에서 성공적으로 문제를 해결한 아동은 어떤 유형의 표현 방법을 사용하는가?

II. 이론적 배경

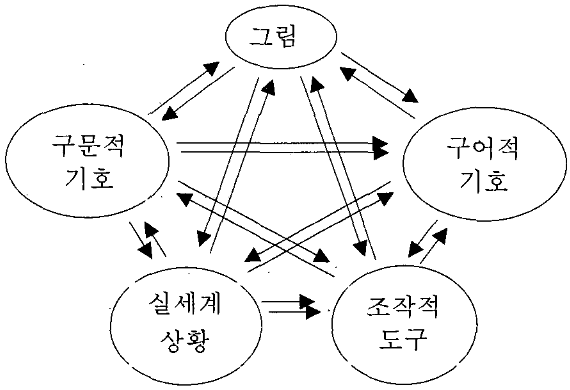
1. 표현에 관한 연구

가. 표현에 관한 선행연구

지식의 구조를 강조하는 1960년대의 학문중심 교육과정의 사조는 Bruner의 저서 <교육의 과정>(1963) 가운데에 나오는 구조, 발견, 학습의 준비성, 직관적 사고와 같은 핵심어 가운데 잘 표현되어 있다. 이 사조는 각 학문 분야는 그 학문의 독특한 기본적인 구조, 곧 기본적인 개념이나 원리 및 탐구방법을 가지고 있으며 학교 교육과정은 그것을 중심으로 하여 조직되어야 한다는 것이다. 그리고 "어떤 교과 내용이든 어떤 발달단계에 있는 어떤 아동에게든 어떤 지적으로 정직한 형태로 효과적으로 지도할 수 있다"는 그의 유명한 가정으로 대변되어 왔다. 이는 각 교과의 교육에서는 관련 학문의 구조, 곧 기본적인 아이디어를 다루어야 하며, 그러한 기본적인 아이디어는 학문적인 표현방식으로 표현하는 것이 아니라, 아동의 사고양식에 맞게 적절한 표현수단으로 재구성하여 제시하면 초등학교 단계의 아동들에게도 지도할 수 있다는 주장이다.

이러한 Bruner 의 주장에 따르면, 어떤 지식이든 어떤 학습자라도 이해할 수 있도록 적절한 형태로 제시될 수 있다. 지식의 구조는 그것을 이해하는 학습자의 능력에 영향을 미치는 표현양식과 그 경제성 및 효력으로 특징 지워지며, 이는 학습자의 연령과 학습양식 및 교과내용에 따라 변한다. 어느 분야의 지식이든 어떤 문제이든 적절한 일련의 행동에 의해(행동적 표현, enactive representation), 어떤 개념을 완전히 정의하지는 않지만 그것을 나타내는 일단의 대략적인 이미지나 그림에 의해(영상적 표현, iconic representation), 명제를 형성하고 변형하는 규칙과 법칙에 의해서 지배되는 어떤 상징체계로부터 이끌어 낸 일단의 상징적 혹은 논리적 명제에 의해(상징적 표현, symbolic representation) 세 가지 방식으로 표현될 수 있다 이것이 소위 Bruner의 EIS 이론이다.

Bruner의 이론이 교과 전반에 걸친 일반론이라는 것과 E→I→S로의 발달만을 생각하므로 양방향의 상호작용이 고려되지 않는다는 단점을 보완한 Lesh(1983)의 표현 체계가 있다. Lesh는 수학 교과에 국한된 표현을 다섯 가지로 세분화하고 각 표현 체계 간의 상호작용을 생각하였다. Bruner의 활동적 표현(E)을 실세계 상황으로, 영상적 표현(I)을 조작적 도구와 정적인 그림 모델로, 상징적 표현(S)을 구어적 기호 및 구문적 기호로 세분화한다. Lesh 이론의 특징은 표현 체계 간의 상호작용인 번역이 수학의 의미 충실한 학습 및 기억, 전이를 설명하는 데 유용함을 주장하는 것이다.

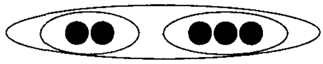


<그림 1> Lesh의 표현 체계

그러나 Lesh의 표현에 대한 분류에서 구어적 기호는 모든 표현에 부수적인 것으로 볼

수 있고, 구분적 기호 중 수학 기호와 일상적 구어는 분리시킬 필요가 있다는 생각에서 Nakahara(1984, 1994)는 다음과 같이 분류하고 있다.

[표 1] Nakahara의 표현 분류

표현 분류	표현 방법	예
실제적 표현	실세계의 대상을 사용한 표현	사과 2개와 3개를 함께 놓기
조작적 표현	인위적인 대상을 사용한 표현	정육면체 2개와 3개를 함께 놓기
그림 표현	정적인 그림, 도형을 사용한 표현	
언어적 표현	문어적인 일상 언어를 사용한 표현	둘과 셋을 더하기
기호적 표현	수학 기호를 사용한 표현	2 + 3

그리고 Nakahara는 표현 사이의 상호관계를 ss육면체를 써서 표현하면서 기호적 표현을 최상의 자리에 위치시켰다. 그 의도는 수학 수업의 목표를 수학 기호를 사용한 표현을 이해시키는 것으로 보기 때문에 다른 표현들은 Bruner의 주장대로 그러한 목표에 도달하기 위한 과정 중의 도구적 역할로 간주하려는 것이다.

위의 분류와는 달리, Skemp(1986)는 수학에서 이용되는 기호 체계를 이분화 하여, 언어-대수적 기호와 시각적 기호로 나누어 제시하고 있다. 그는 모든 종류의 다이어그램이나 기하학적 도형들을 시각적 기호의 예로 제시하고, 이것들이 직관적 사고에 유용하다고 진술하면서, 두 사고 체계를 [표 2]와 같이 비교하여 제시하고 있다.

[표 2] 시각적 기호와 언어-대수적 기호

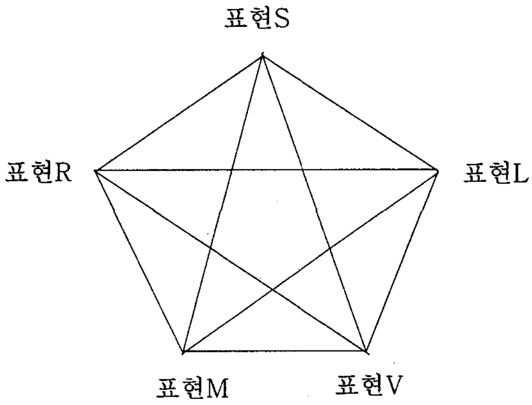
시각적 기호	언어-대수적 기호
· 모양, 위치 등 공간 성질의 추상화 · 의사소통이 어려움 · 보다 개별적인 사고를 표상 · 통합적, 구조를 명시 · 동시적 · 직관적	· 수와 같이, 공간적 형태와 무관한 성질의 추상화 · 의사소통이 쉬움 · 보다 사회화된 사고를 표상 · 분석적, 세부사항을 명시 · 순서적 · 논리적

특히, Skemp에 의해 시각적 기호로 제시되고 있는 시각적 표현은 직관적 사고와 관련하여 수학적 사실을 즉각적으로 이해하도록 도와주며, 문제해결 과정에서도 유용한 단서나 해결책을 제공해 주는 도구이다.

나. 표현 체계의 분류

표현 체계에 있어서는 수학 교과 내용을 고려할 때 Bruner의 표현 양식을 좀 더 세분화할 필요가 있으며, Lesh나 Nakahara의 연구는 표현 체계 분류에 도움이 된다. 장혜원

(1997)은 이를 바탕으로 학교 수학에 등장하는 표현 체계를 학습자의 인지 특성을 고려하여 다음과 같이 분류하였다.



<그림 2> 장혜원의 표현 분류

표현 R : 실제적 표현-실세계 대상 및 그에 대한 행동
표현 M : 조작적 표현-수학학습을 위해 고안된 교육 자료 및 그것을 다루는 행동
표현 V : 시각적 표현
V1. 구체적 그림
V2. 추상성을 띤 다이어그램이나 도형
V3. 표현 규약을 알아야 표현 및 표상 가능한 그래프, 표
표현 L : 언어적 기호-문장제와 같은 일상 언어의 사용
표현 S : 기호적 표현-수학 기호, 숫자, 문자

Rational Number(RN), Proportional Reasoning(PR) Project에 대한 등의 연구 결과들을 바탕으로 Lesh, Behr, Post(1987a)는 수학 학습과 문제해결에서 일어나는 표현 체계를 다섯 가지 유형으로 분류하였다.

① 경험에 근거를 둔 '산문(script)' - 문제 상황을 해석하거나 해결하기 위한 일반적인 문맥으로 이용되는 '실세계'의 사건들로 조직되는 지식이다.
② 조작 가능한 모델(manipulative models, 예를 들면 Cuisenair 막대, 산술 블록, 수직선 등) - 개별적으로는 의미를 갖지 않지만, 일상적 상황들과 합치되는 관계와 조작을 '구성'하는 요소들이다.
③ 그림(picture) 또는 다이어그램(diagram) - 조작 가능한 모델들처럼 '이미지'로서 내면화될 수 있는 정적이고 도형적인 모델들이다.
④ 구어(spoken language) - 논리와 같은 영역에 관련된 특수한 하위 언어들도 포함한다.
⑤ 기호(written symbol) - $x+3=7$, $A \cup B$와 같은 특수화된 문장이나 구절들뿐만 아니라 구어처럼 정상적인 일상어 문장과 어구를 포함할 수 있다.

2. 문제해결에서의 표현에 관한 연구

가. 문제해결에서 표현의 의의

현재 Polya는 문제해결 분야에 있어서 Polya 이전과 이후라는 두 시대의 경계선을 긋는 인물로 평가되고 있고, 오늘날의 문제해결은 'Polya식의 문제해결' 이라 해도 과연이 아닐 것이다(1993, 이애경 재인용).

Polya는 문제 풀이의 진전과 성취에 본질적인 것이 무엇이냐는 물음에 대해 다음과 같이 답하고 있다.

문제를 풀려고 시도할 때, 우리는 문제의 여러 가지 측면을 차례로 고려하게 되고, 그것을 마음속에서 끊임없이 굴리고 또 굴리게 된다. "문제의 변형" 은 우리의 연구에 본질적인 것이다. 우리는 요소의 "분해와 결합" 에 의해, 그리고 그 어떤 항의 "정의" 로 되돌아감으로써 문제를 변형할 수 있으며 "일반화" "특수화" 및 "유추" 라는 커다란 자원을 이용할 수도 있다. 문제의 변형으로 "보조 요소" 또는 보다 해결하기 쉬운 "보조 문제" 의 발견에 이를 수도 있다.

모든 종류의 문제에서, 특히 그리 단순하지 않은 수학 문제에서 적당한 "표기법" 과 기하학적 "그림" 은 큰 도움이 되며, 가끔씩 없어서는 안 될 도움을 주기도 한다(Polya, Op.cit, 1993, P.270, 이애경).

그리고 그의 "How to solve it"이라는 발견술 소사전에서 문제해결 전략에 대한 다양한 논의를 하고 있다. 그 대표적인 제목은 다음과 같다.

· 그림 그려 보기	· 거꾸로 연구하기
· 귀납	· 귀류법과 간접 증명법
· 대칭	· 문제의 변형
· 방정식 세우기	· 보조 요소
· 일반화	· 특수화

특히 「그림」이라는 항목에서 그림이 문제해결에서 하는 역할에 대해서 다음과 같이 설명하고 있다.

그림은 기하 문제의 대상일 뿐 아니라 처음에는 기하학적인 것과 무관하던 문제에서도 중요한 도움을 주는 경우가 많다. 그림은 우리의 상상 속에 있을 수도 있고 종이 위에 그려질 수도 있다. 세세한 내용이 많을 때 그들을 동시에 상상할 수는 없지만 종이 위에서는 그들을 모두 함께 나타낼 수 있다. 우리의 상상 속에 그려진 세세한 내용은 잊혀 질 수 있지만 종이 위의 내용은 그대로 남아 있어 사고를 다시 회상하는 어려움을 덜어 준다. … 종이 위에 그린 그림은 알아보기 쉽고, 기억하기도 쉽다. 기하학적인 표현이나 그래프 그리고 여러 가지 다이어그램은 모든 과학에서, 즉 물리학, 화학, 자연과학 뿐 아니라 경제학, 심리학에서조차 사용하고 있다. 기하 문제가 아닐 지라도 그림을 그려 볼 필요가 있다. 비기하학적인 문제에 대한 적절한 기하학적인 표현을 찾아보는 것은 해결을 위한 중요한 진전이 될 수 있을 것이다(Polya, 1991, P.148-153).

한편, Schoenfeld는 Polya의 이론이 너무나 포괄적이라고 지적하며, 문제해결과정의 각 단계별로 사용 가능한 전략들을 상세히 제시하였다. 특히 문제해결의 최초 단계인 「분석」 단계에서 그리기의 방법을 가장 처음으로 권고하고 있다. Kurlic과 Rudnick은 문제해결 과정을 '문제 읽기, 탐색, 전략의 선택, 해결, 검토 및 반성' 의 여섯 단계로 나누어

제시하였고, 문제해결의 전략을 선택하기 위한 전 단계인 「탐색」 단계에서 다이어그램이나 모델을 이용하도록 한다.
이상에서 보듯이 다이어그램, 모델, 도표, 그림 등의 시각적 표현은 특히 문제해결의 시작 단계에서 중요한 역할을 한다. 또한 Polya의 문제해결의 과정 마지막 단계인 「반성」 단계에서 '결과를 한 눈에 알 수 있는가' (Polya, 1991, P.38-41)를 자문하도록 요구하고 있는데 이때 시각적 표현은 좋은 방안이 된다.

나. 문제해결에서 표현의 방법

수학 문제해결과 관련하여 학생들은 주어진 문제 상황을 시각적 표현으로 재구성함으로써 문제해결에 옳은 몇 가지 경로를 발견한다. 이러한 측면에서, 다음에 제시된 몇 가지 문제들은 시각적 표현을 이용하여 직관적으로 문제해결의 단서나 해결책을 구할 수 있는 예시이다.

<예시>
Sharon은 Danny보다 6인치 더 크고, Danny는 Jesse보다 1인치 더 작다. Jesse의 키가 4피트라면 Sharon의 키는 얼마나 되는가?

Sharon is 6 inches taller than Danny, who is 1 inch shorter than Jesse. If Jesse is 4 feet tall, how tall is Sharon?

이러한 문제를 풀기 위해서 아동은 어떻게 시작할 것인가? 문장제를 푸는 방법을 이해한 아동은 그 단어들이 행하도록 요구하는 것이 무엇인지를 먼저 생각한다. 예를 들면, 학생들은 첫 번째 문장에서 "who" 가 Danny를 언급하는 것이며 "보다 큰(taller)"와 "보다 작은(shorter)" 의 관계를 깨달아야 한다. 이것은 문제를 자기 자신의 단어로 재구성하는 것을 의미한다.

(풀이 1) 문제의 단어 또는 아동의 언어적 번역을 통하여 문제를 푸는 방법이다. 소괄호 내에 있는 내용은 문제 진술을 해석하기 위해 필요한 처리과정을 제시한 것이다.

Jesse의 키는 48인치이다. (4피트는 12인치 곱하기 4와 같다. 이 식은 피트와 인치의 관계에 대한 저장된 지식을 사용)
Danny는 Jesse보다 1인치 작다. (문제에서 "who"는 Danny를 의미)
그러므로 Danny는 47인치이다. (Jesse보다 1인치 작다면 Jesse의 키에서 1을 뺌)
Danny는 Sharon보다 6인치 작다. ("Sharon은 Danny보다 6인치 더 크다" 를 변형)
Danny는 47인치이다. (앞의 처리과정에서 기억)
따라서 Sharon의 키는 53인치이다. (Sharon이 Danny보다 6인치 크다면 Danny의 키에 6을 더함)

앞에서 (풀이 1)은 영어의 일반적인 구조와 문제에서 주어진 정보가 언어적으로 표현되기 위해 상당한 지식이 필요함을 보여준다. 이 점만으로도 아동들이 문제의 진술을 간단한 수식으로 대응하여 계산하는 언어적 지식을 요하는 문장제를 어려워하는 이유를 설명할 수 있다. 더욱이 이 방법으로 문제를 해결하기 위해서는 얼마나 많은 것을 기억해야 하는가를 생각하면 그 어려움은 더더욱 납득이 간다. 제한된 용량을 가진 작동 기억을 고려해 볼 때, 아동들이 문제에 주어진 언어를 완벽하게 이해한다 하더라도 때로는 이미 수행한 계산 또는 계산 결과를 잊을 수 있다. 그러므로 시각적 표현을 사용하는 (풀이 2)는 이러한 기억상의 부담을 줄이는 데 도움이 될 수 있다.

(풀이 2)

<그림 3> 문장제를 시각적으로 표현

문제에 대한 언어 분석에 기초하여 키가 비슷한 세 명의 아동들이 나란히 앉아 있는 모습을 머릿속에서 상상할 수 있다. <그림 3>과 같이 아동들의 키를 시각화하고 그 차이를 수학적으로 표현함으로써, 이 문제는 쉽게 해결된다. 시각적 표현은 계산을 수행하는 동안 문제의 정보를 접근할 수 있는 상태로 유지하고, 따라서 기억상의 부담을 덜어 주게 되어 오류의 가능성을 줄이게 한다.

(풀이 3) 대수를 알고 있는 사람은 기억상의 부담을 줄이는 방법으로 대수적 표현방법을 사용할 수 있다. 이 방법은 문제의 정보를 바탕으로 식을 세우고 나중에 모든 계산을 하게 된다. 다음은 문장제를 대수적 식으로 변환하여 해결하는 방법이다.

Sharon은 Danny보다 6이 더 크다 : $S = D + 6$
Danny는 Jesse보다 1이 더 작다 : $D = J - 1$
Jesse는 48인치이다 : $J = 48$
Sharon은 얼마인가? : $S = ?$

이 간단한 문제는 위의 세 가지 해결 -언어적 번역, 시각적 표현, 대수적 방법- 이 가능하다. 모든 사람들이 이 중 어느 한 가지만으로 문제를 해결하는 것은 아니다. 실제로 여러 가지의 방법이 있으며, 최종적인 문제해결 과정을 위해서는 하나 또는 몇 가지 방법이 결합되어 사용될 수 있다. 중요한 것은 문제해결 방법의 적절한 선택이 성공적인 문제해결을 좌우한다는 것이다.

문제해결의 지도에 대한 실험 연구는 많은 학자들에 의해 계속되고 있으며 다양한 결과를 보이고 있다. Scheonfeld(1979)는 전문가의 문제풀이를 체계적으로 그리고 다량으로 관찰함으로서, 뛰어난 문제해결자에 의해 사용되는 발견 전략을 확인하고 특성화하는 것이 가능하다고 보았다. 그리고 이렇게 발견된 문제해결 전략을 지도함으로서 학생은 스스로 그 전략을 발견하는데 드는 어려움을 감소시킬 수 있다고 하여 문제해결 전략의 지도를 강조하였다. 그러나 Lester(1983)의 "Trends and issues in Mathematical problem-solving research" 에 제시되고 있는 MPSP(Mathematical Problem Solving Project)의 연구 결과를 보면 실제 아동의 문제해결에 관한 일반적인 특징을 알 수 있다. MPSP에서는 학생들이 문제를 해결할 때의 특징을 다음과 같이 정리하고 있다.

첫째, 학생들은 일반적으로 어떠한 전략도 사용하지 않는다.

둘째, '시행착오' 는 계산에 의해 직접 답이 나오지 않는 경우에 가장 보편적으로 사용하는 방법이다.

셋째, 대부분의 학생들은 문제에서 제시되는 복합적인 조건의 수용과 정리에 어려움을 겪는다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 실험 대상은 서울특별시 중랑구에 위치하고 있는 J초등학교 4학년 학생 240명이다. 연구 대상으로 있는 학교의 아동은 선진도 선행학습이 많이 이루어지지 않으며, 평범한 4학년의 보통 수준의 수학 지식을 가지고 있다.

본 연구에서는 연구자가 초등학생의 일반적 수준을 논할 수 있다고 판단되는 중 학년인 4학년의 학생을 연구 대상으로 선정하였으며, 4-나 단계의 학습이 거의 이루어진 12월에 연구 문제를 해결하게 하였다.

2. 자료 수집 및 분석 방법

가. 자료 수집 방법

(1) 2003학년도 1학기동안 서울 J초등학교 4학년 3반 학생 35명을 대상으로 예비검사를 실시하였다. 이 예비 검사는 초등학교 재량시간을 활용하여 일주일에 1시간씩 퀴즈 게임 방법과 문제지 해결 방법으로 여러 가지 문제를 해결해 보도록 하였다. 이는 연구 대상인 초등학교 4학년 학생들에게 적당한 난이도의 문제를 선정하고, 학생들이 사용하는 문제해결 방법을 미리 예측하여 시각적인 표현방법을 사용하는 문제지를 작성하기 위함이다.

(2) 연구 문제는 4-나 단계 수학교과서와 수학 익힘책의 여러 가지 문제 단원, 한국교육개발원의 생각하는 수학공부, 한국수학학력평가(KME)의 문제에서 연구 대상에게 적합한 난이도의 문제와 주로 시각적 표현방법을 사용하여 해결할 수 있는 20문제를 선정하였다.

(3) 선정된 20문제로 각 4문제씩 (가), (나), (다), (라), (마)의 5가지의 연구 문제지를 제작하였다. 이 연구 문제지는 4학년 수학 학습이 거의 다 이루어진 2003년 12월에 실시되었으며, 각 반 담임교사의 감독 하에 40분 평가 방식으로 연구 대상에게 투여되었다.

나. 실험 문제의 유형 분류

연구 대상에게 적합한 난이도와 주로 시각적 표현방법을 사용하여 해결할 수 있는 문제로 선정된 20문제는 4학년 교과 단원의 특성과 관련하여 예상되는 문제해결 방법이 유사한 문제들을 묶을 수 있었다. 제작된 자료의 문제는 다음과 같이 5가지 문제 유형으로 분류된다.

유형 A. 논리적인 추론 문제

조건에 충실하게 문제를 정리하여 대응되는 값을 찾는 문제이다. 이 유형은 조건을 순서대로 제시하여 자료의 정리를 명료하게 할 수 있도록 유도하고 있다.

유형 B. 분수 문제

이산량 전체에 대한 상대적인 양을 표현하기 위한 문제이다.

유형 C. 같은 경우 찾기

두 가지의 변화량을 정리하여 만나는 횟수 또는 만나는 경우를 찾는 문제이다.

유형 D. 문제에 그리기 방법의 힌트가 되는 용어를 포함

조건에 알맞은 그림을 그리고, 이 그림을 이용하여 단계적으로 해결하는 문제이다.

유형 E. 문장제를 수식으로 나타내기

문장제를 수식으로 나타내기 위한 과정으로 그림 그리기를 이용하는 문제이다. 이 유형은 그림을 이용하여 문제를 해결하는 유형과 달리 옳은 식을 세우기 위한 전 단계에 해당된다.

다. 자료 분석 방법

(1) 자료 분석하기

수집된 자료를 조직화하여 분류하는 단계이다. 연구자는 연구 자료를 정밀하게 읽으며 아동이 문제해결에서 사용한 표현 방법을 코멘트 한다. 코멘트를 하는 도중에는 연구 문제를 스스로 여러번 질문하여 일관된 관점으로 분석할 수 있도록 하고, 되도록 많은 코멘트를 쓰도록 한다. 코멘트 작성이 끝나면 자료를 전면적으로 검토해 보고 발견된 내용을 메모한다. 이렇게 발견된 몇 가지의 표현 방법은 자료를 표로 정리하는 기준이 된다.

코멘트가 기록되어 있는 연구 자료를 표로 정리한다. 해당되는 부분에 중복적으로 *표시를 하고, 기준에 없는 표현 방법은 표의 아래에 서술로 정리하여 표현 방법의 특징을 발견하는데 도움이 되게 한다. 이때 코멘트 단계에서 관점이 흐려진 부분을 수정하고 보완하여 연구 관점이 일관되게 한다.

(2) 자료의 범주화 및 패턴 찾기

조직화된 자료들을 관련된 영역끼리 범주화하는 단계이다. 이 단계에서 연구자는 각 문제별로 정리된 표를 이용하여 아동들이 문제해결에서 사용하는 표현 방법을 유형화한다.

표는 세로 방향과 가로 방향으로 분석될 수 있다. 세로 방향의 분석은 표의 합계를 이용하여 결과를 얻는 방법이다. 표를 작성하는데 기준으로 사용되었던 표현 방법에 따라 합계를 구한다. 이때 높은 수치를 갖는 내용은 많은 아동이 문제해결에서 사용하는 표현 방법이다.

다음으로 표를 가로 방향으로 분석하여 정답자와 오답자의 표현 방법을 분석한다. 표를 가로 방향으로 분석하는 것은 성공적으로 문제를 해결한 아동이 사용하는 표현 방법을 알아볼 수 있고, 나아가 표현 방법 간의 관련성을 찾아볼 수 있다.

표를 읽고 파악된 내용은 A, B, C, D, E 문제 유형에 따라 요약하여 기록한다. 이때 조사 과정 중에서 발견된 주요 사례와 특징을 예로 들어 제시한다.

(3) 종합화

각 문제 유형에 따라 정리된 표현 방법의 유형을 종합하는 단계이다. 이 단계에서는 아동이 문제해결에서 사용하는 표현 방법에 관해 일반적인 결론을 얻는다. 이것이 <연구문제 가> 수학 문제해결 과정에서 사용되는 표현 방법 분석이다. <연구문제 가>에서 발견된 내용을 바탕으로 연구 자료의 정답과 오답을 고려하여 <연구문제 나>에서는 성취도가 높은 아동이 사용하는 표현 방법을 정리한다.

Ⅳ. 분석 및 논의

1. 표현 유형 분석

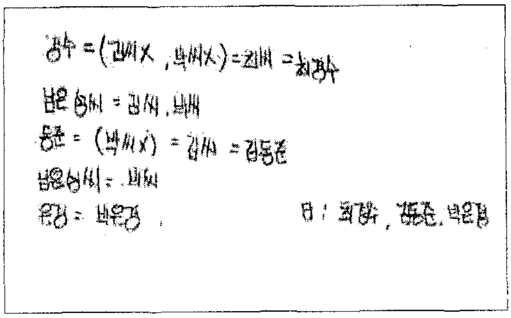
가. 문제 유형 A

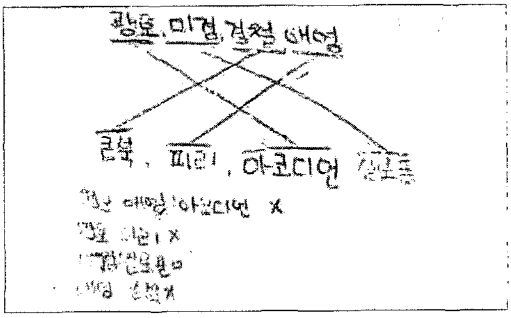
문제 유형 A는 논리적인 추론 문제로 조건에 충실하게 문제를 정리하여 대응되는 값을 찾는 문제이다. 이 문제의 해결과정에서 대부분의 아동은 그림을 그릴 때 문제에서 사용한 용어를 약어나 다른 기호로 바꾸지 않고 그대로 사용하였으며, 이 문제 유형은 그리기 방법을 사용할 힌트가 되는 단어가 없기 때문에 주로 재진술 방법을 시도하였다. 그러나 재진술 방법은 문제를 다시 쓰는 수준에 머물러 문제해결에 도움이 되지 못하였다. 이 유형의 문제해결에 가장 적합한 방법인 표 그리기의 사용 방법에 익숙하지 못한 면을 보였지만 이와 유사한 방법을 사용하였다.

다음은 문제 유형 A를 성공적으로 해결한 아동의 표현 방법이다.

이 문제 유형을 성공적으로 해결한 학생들은 시각적으로 표현한 그림에서 조건간의 관계를 명확히 하였다. 예를 들어 4마리의 말을 앞뒤 순서대로 나열하고, 말 사이의 간격을 숫자로 표기하여 정확하게 표현하려고 하였다. 재진술 방법을 사용한 아동 중에서 정답자들은 문제를 다시 요약하는 수준에서 벗어나 조건을 간단히 정리해 가면서 문제를 해결하여 재진술이 끝남과 동시에 정답을 도출하였다. 다음의 예는 재진술 방법을 사용하여 성공적으로 문제를 해결한 아동의 표현 방법이다.

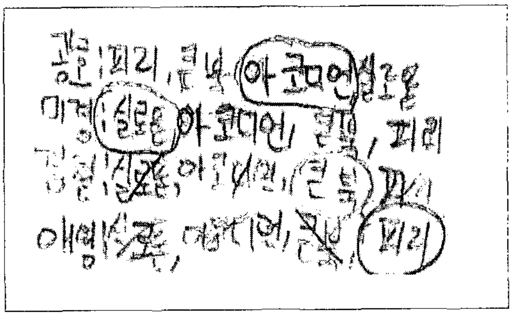
< 문제 A-2. 재진술 방법 사용 - 정답 >

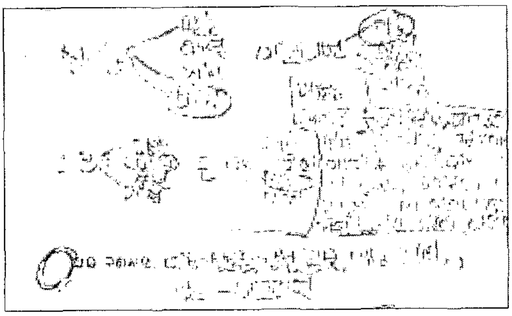




성공적으로 문제를 해결한 아동은 표 그리기 방법을 정확하게 사용하지 못하지만 다른 유사한 방법을 사용하였다. 다음은 표 그리기와 유사한 방법을 사용하여 성공적으로 문제를 해결한 예이다.

< 문제 A-3. 표 그리기와 유사한 표현 - 정답 >

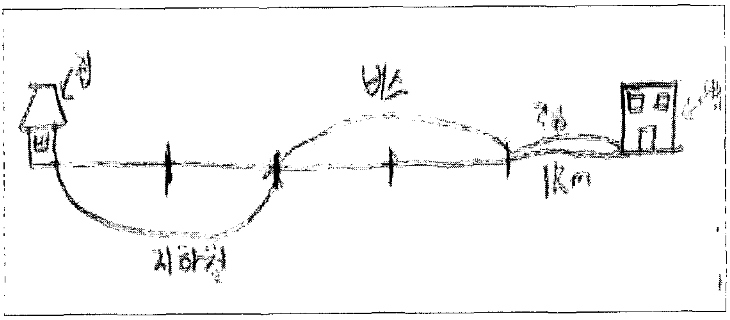




나. 문제 유형 B

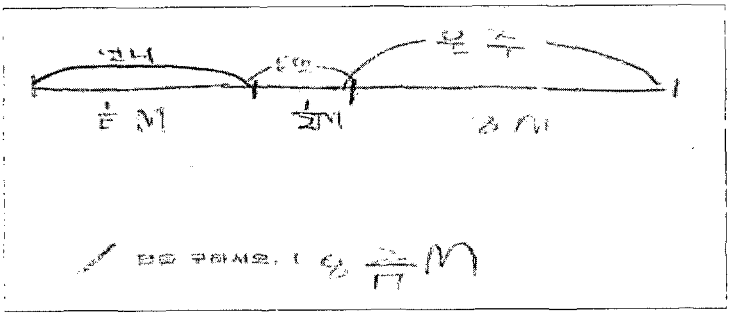
문제 유형 B는 분수 문제로 이산량 전체에 대한 상대적인 양을 표현하여 해결하는 문제이다. 이 문제의 해결 방법에서 예상되었던 것처럼 대부분의 아동은 분수 문제를 해결하기 위해 여러 가지 정보를 한 개의 그림에 나타내려는 시도를 하였다. 즉, 전체의 양을 직선이나 띠그래프로 나타내고 문제에 제시된 분수만큼 이 직선이나 띠를 분할하였다.

< 문제 B-1. 여러 가지 분수를 한 개의 그림에 나타냄 - 정답 >

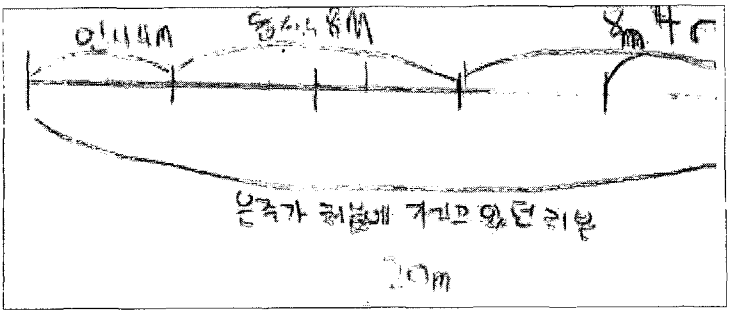


주어진 분수만큼 전체의 양에 상대적인 양을 표현하지 못한 아동의 그림은 문제해결에 도움을 주지 못하였고, 상황 그림을 그리지 않는 경우도 있었다. 이 아동들은 문장제에 주어진 수치만으로 식을 세워 문제를 해결하려는 경향을 보였다. 분수 문제의 상황을 표현할 때에는 그림에 분수 값을 표기하는 것보다는 문제해결 과정에서 구한 값을 표기하는 것이 더 좋은 방법이다. 다음의 예는 이 두 가지 경우를 비교한 것이다.

< 문제 B-2. 분수를 그대로 그림에 표기 - 오답 >



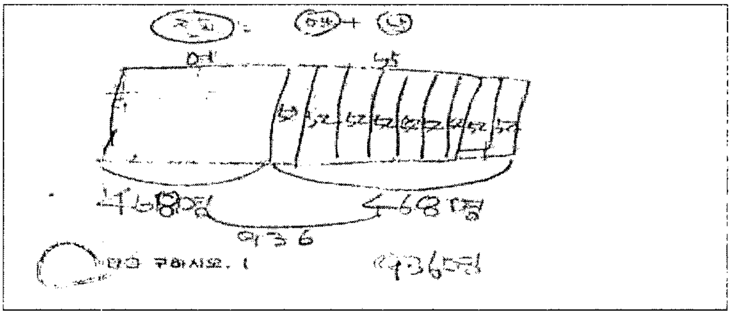
< 문제 B-2. 문제해결 도중에 구한 값을 그림에 표기 - 정답 >



다음은 문제 유형 B를 성공적으로 해결한 아동의 표현 방법이다.

이 문제를 성공적으로 해결한 아동은 문제에 제시된 분수에 따라 전체를 분할하였다. 그리고 이 그림을 이용하여 직관적으로 문제를 해결하고, 문제해결 과정을 한 눈에 알아 볼 수 있게 하였다. 특징적인 것은 조건에 주어진 분수를 그림에 그대로 표기하지 않고, 문제해결 과정에서 구한 값을 표기한 것이다.

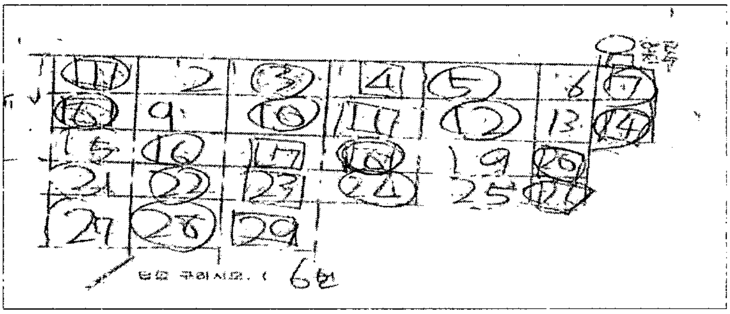
< 문제 B-3. 분수 값을 구하여 그림에 표기 - 정답 >



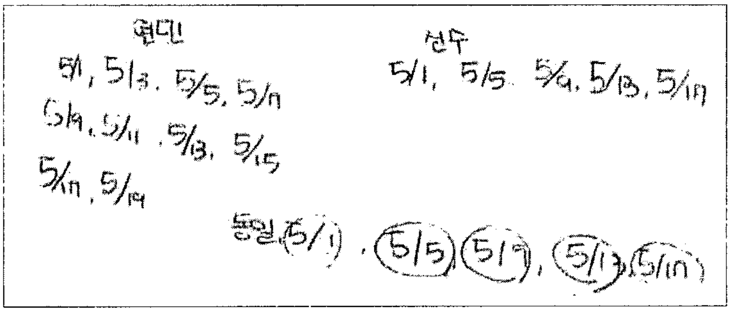
다. 문제 유형 C

문제 유형 C는 같은 경우 찾기 문제로 두 가지의 변화량을 정리하여 만나는 횟수 또는 만나는 경우를 찾는 문제이다. 이 문제의 해결을 위해 두 가지의 변화량을 하나의 그림이나 표에 정리하는 아동과 두 개의 그림이나 표에 정리하는 아동은 반반씩 차지하였다.

< 문제 C-1. 두 변화량을 한 개의 그림에 표현 - 오답 >

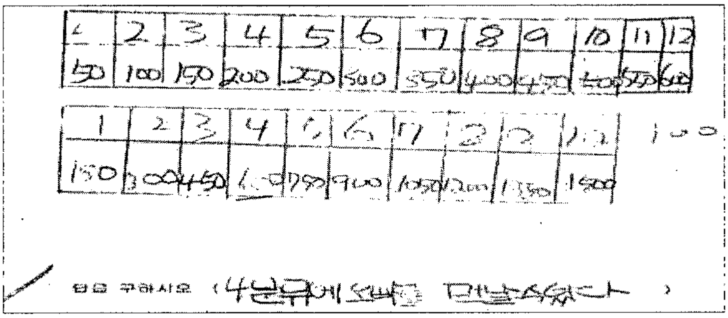


< 문제 C-1. 두 변화량을 각각 정리한 표현 - 정답 >

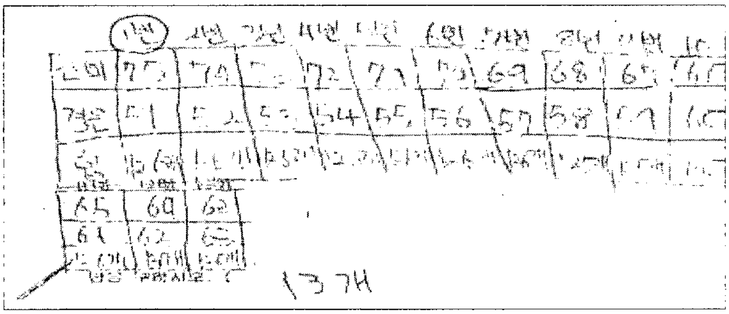


대부분의 학생들은 문제 유형 C의 해결에 유익한 표 그리기 방법을 사용하지 않았다. 그리고 몇몇의 표 그리기를 사용한 아동들도 이 방법을 사용하는데 서툴렀다. 즉, 두 변화량을 정리한 후 의미 있게 관련짓지 못하거나, 바르게 완성된 표를 잘못 해석하는 오류를 나타내었다.

< 문제 C-2. 2분 후의 값과 4분 후의 값을 일치한다고 해석 - 오답 >

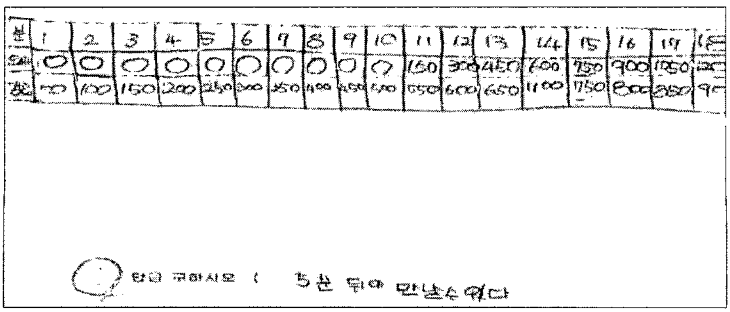


< 문제 C-3. 12번을 13번으로 횟수를 잘못 해석 - 오답 >

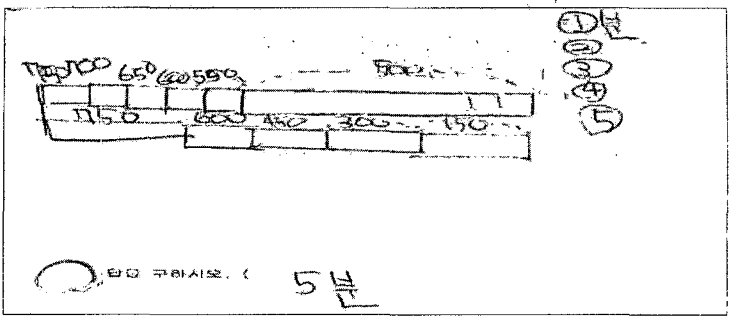


다음은 문제 유형 C를 성공적으로 해결한 아동의 표현 방법이다.
이 문제 유형을 성공적으로 해결한 학생들은 두 변화량의 상관관계를 고려하며 자료를 정리하였다. <문제 C-2>의 해결과정에서 표를 사용한 아동은 1분이 지날 때마다 동시에 변하는 값을 명료하게 기록하였다. 또한 그림을 이용한 아동은 1분이 지날 때마다 두 막대의 길이를 늘여가며 만나는 시간을 시각적으로 알 수 있게 하였다.

< 문제 C-2. 두 변화량을 관련지으며 정리한 표 - 정답 >



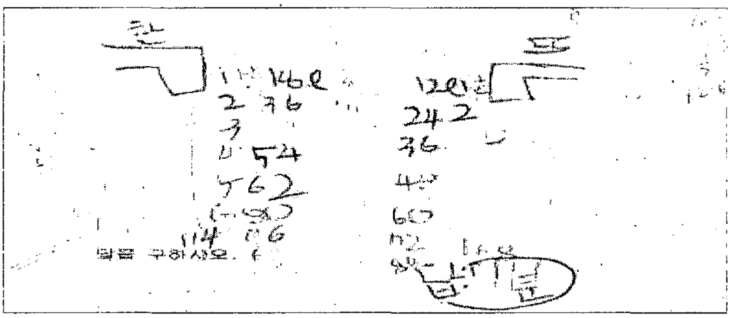
< 문제 C-2. 두 변화량을 2개의 막대 길이로 그린 그림 - 정답 >



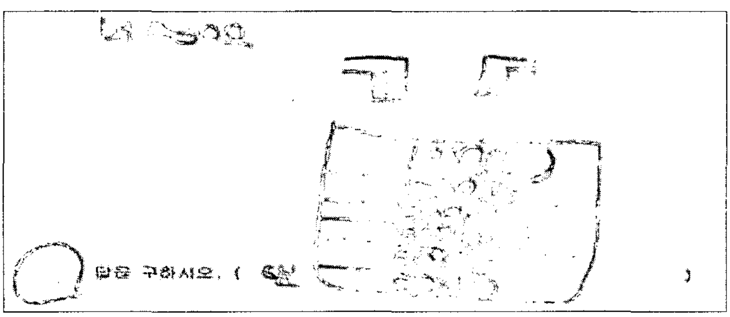
성공적으로 문제를 해결한 아동은 그림에 문제해결자의 의견을 첨가한다. 예를 들어 자료의 양을 그림으로 나타낼 경우 문제에서 제시된 구슬 전체의 양을 한 개의 묶음으로 그리지 않고 문제해결에 적합하도록 낱개 모형으로 분할한 그림으로 표현하였다. 또한 두 개의 수도꼭지에서 나오는 물의 양을 각각 표기한 후 문제해결자가 1분 동안 받을 수 있는 물의 양을 표기하여 문제해결에 도움이 되도록 하였다.

문제해결자의 의견이 포함되지 않은 그림은 문제의 조건을 나열하는 수준에 머물러 결국 문제해결에 별 도움을 주지 못하였다. 즉 많은 학생들이 문제해결 과정에서 그리기 방법을 사용하였으나 문제해결과 거리가 먼 식을 세워 문제를 해결한 경우가 이에 해당된다. 다음의 예는 문제해결자의 의견이 포함된 그림이 쉬운 문제해결 방법을 유도하는 경우를 보여준다.

< 문제 C-4. 찬 물과 뜨거운 물의 양을 각각 표기 - 오답 >



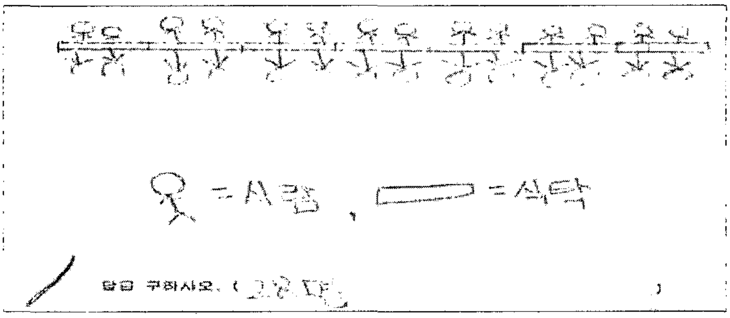
< 문제 C-4. 문제해결자에 의해 1분에 30ℓ를 표기 - 정답 >



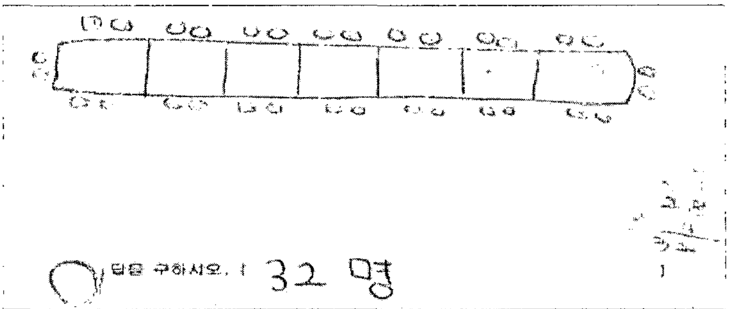
라. 문제 유형 D

문제 유형 D는 조건에 알맞은 그림을 그리고, 이 그림을 이용하여 단계적으로 문제를 해결해야 한다. 대부분의 아동은 그리기를 유도하는 용어를 찾아 쉽게 그리기 방법을 사용하였으며 조건에 충실하게 그림 표현을 하려고 노력하였다. 조건에 충실한 그림 표현은 이 그림만으로 문제해결을 할 수 있게 한다.

< 문제 D-3. 양끝의 탁자에 2명이 빠진 그림 - 오답 >

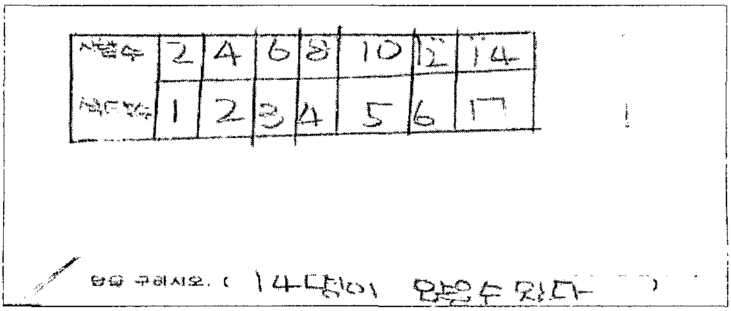


< 문제 D-3. 조건에 충실하게 그린 그림 - 정답 >



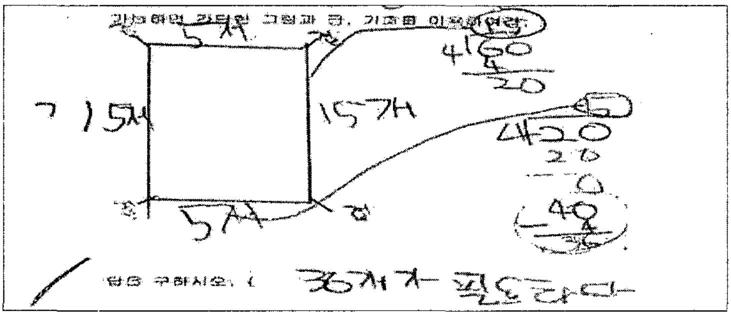
특히 이 문제 유형은 문제 상황에 대한 이해를 필요로 한다. 그러므로 문제의 상황을 나타낸 표현은 꼭 필요하다. 다음은 상황 그림을 그리지 않고 표 그리기 방법을 사용하여 생긴 오류의 예이다.

< 문제 D-3. 상황 표현을 없이 표 작성 - 오답 >

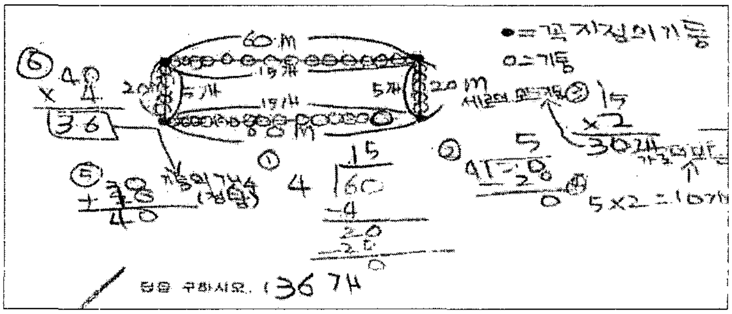


대부분의 아동은 조건의 범위가 넓어지면 그리기가 복잡하므로 정확히 그리기를 포기한다. 예를 들어 <문제 D-5>의 경우 직사각형 모양의 땅에 말뚝을 표시할 때 말뚝의 수가 많아지면 말뚝의 표시를 정확히 하지 않고 계산식으로 값을 구하였으며, 모서리에 기둥이 중복되어 세어지는지 확인한 흔적도 없었다.

< 문제 D-5. 기둥 표시를 하지 않은 그림 - 오답 >

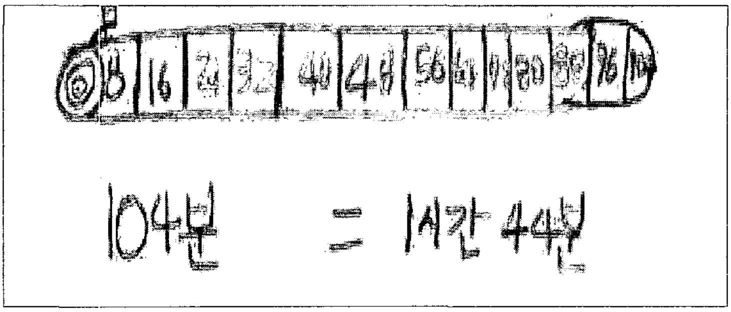


< 문제 D-5. 값을 구한 후에 말뚝 표시를 한 그림 - 오답 >

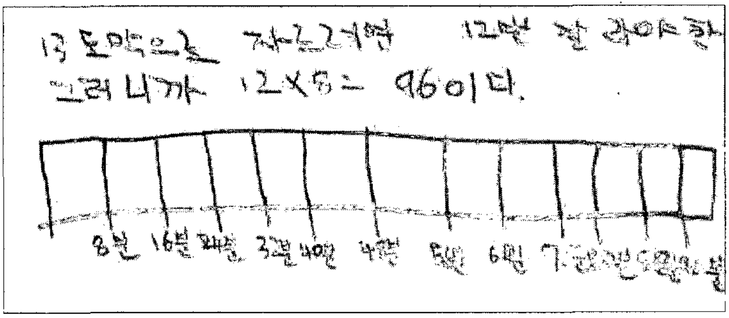


또한 문제를 읽자마자 생성되는 개인적인 이미지는 각각 다른 그림을 그리게 하여 문제 해결에 상당한 영향을 미친다. 예를 들어 앞의 예에서 살펴보았듯이 <D-3 문제>에서 식탁의 양 끝 쪽 모서리에 사람을 표시하지 않은 오류를 나타내는 경우가 이에 해당된다. 다음의 <문제 D-1>에서도 그려놓은 그림을 사용하여 <12×걸린 시간>의 식을 세워야 하지만 <13×걸린 시간>의 식을 세워 문제를 해결하였다.

< 문제 D-1. 생긴 통나무 도막에 시간을 표기 - 오답 >



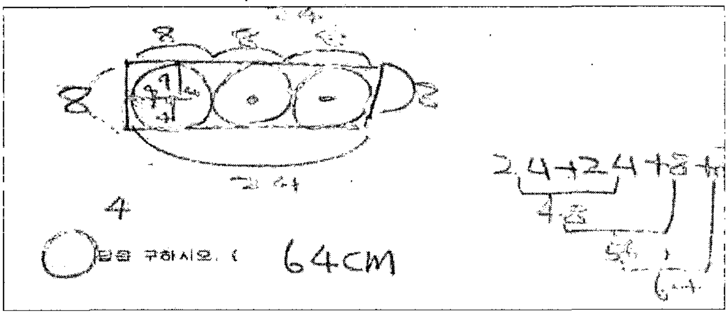
< 문제 D-1. 자른 횟수에 시간을 표기 - 정답 >



다음은 문제 유형 D를 성공적으로 해결한 아동의 표현 방법이다.

이 문제 유형을 성공적으로 해결한 학생들은 문제의 조건에 맞는 그림 표현을 한 학생들 중 정답자들은 '문제해결을 위해 부족한 조건이 무엇인가?' 를 생각하여 부족한 정보를 보완하여 기록한다. <문제 D-4>의 그림은 직사각형의 둘레를 구하기 위해 원의 반지름을 표시한 경우이다.

< 문제 D-4. 직사각형의 둘레에 원의 반지름을 표기 - 정답 >



그리고 성공적으로 문제를 해결하는 아동은 그려진 그림을 명료하게 표현하려고 한다. 그림에 많은 표시를 하기보다는 수치적인 설명으로 부족한 정보를 보충한다. <문제 D-6>에서도 '몇 번째 사람인가' 라는 부분에 집착하여 원을 둘러싸고 있는 사람들의 정확한 번호를 구하려는 학생들은 오답률이 높았다.

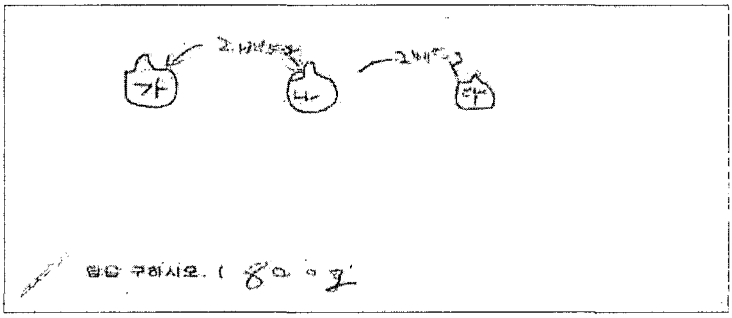
문제 유형 D를 성공적으로 문제를 해결한 아동은 그렇지 못한 아동보다 그림이 복잡해지더라도 명료하게 표현하여 문제해결 방법을 찾으려고 시도하였다. 그러나 이 연구의 대상인 초등학교 4학년 단계의 아동에게서는 조건을 간단히 하여 규칙을 찾고 복잡한 경우의 값을 구하는 논리적인 사고 방법을 사용하는 학생은 거의 없었다. 그리고 이전에 풀어본 비슷한 문제의 문제해결 방법을 그대로 사용하고, 지금 해결하는 문제에 따라 적절히 해결방법을 변형하여 사용하지 못하는 한계를 보였다.

마. 문제 유형 E

문제 유형 E는 문장제를 수식으로 나타내어 해결하는 문제이다. 이 문제에서 그림은 식을 세우기 위한 과정으로 사용된다. 그러나 이 문제 유형의 경우 상황 그림이 없이 바로

식을 세워 해결하려는 아동이 많았다. 그리고 그림 그리기 방법을 사용한 경우에도 그림이 문제해결에 별 도움이 되지 못하였다. 정답률이 가장 낮은 문제 유형이기도 하다.

< 문제 E-2. 문제해결에 도움을 주지 못하는 그림 - 오답 >

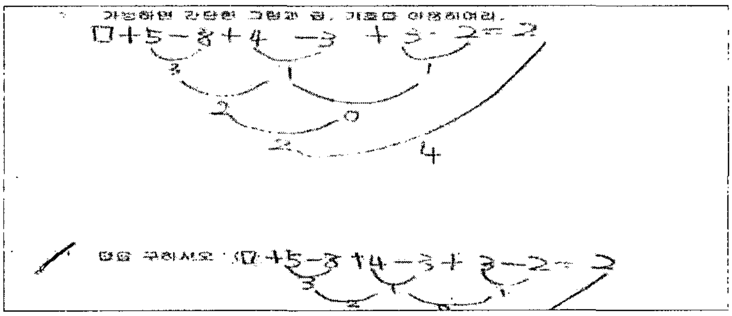


다음은 문제 유형 E를 성공적으로 해결한 아동의 표현 방법이다.

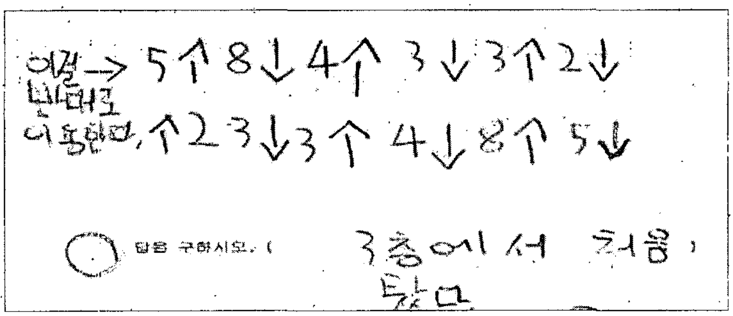
이 문제 유형을 성공적으로 해결한 아동은 복잡한 이동선이나 분할선의 사용을 피하고 해결과정에 따라 필요한 값을 명료하게 기록하였다. 거꾸로 풀기 방법을 사용한 경우 단계에 따라 값을 적어가며 과정을 명료하게 하는 방법이 정답률이 높았다.

문제 유형 E에서는 식을 옳게 세우고 이 식을 해결하는 것이 문제를 해결하는데 중요하다. 많은 아동이 문제를 식으로 세워놓고 그 해결 방법을 찾지 못해 오류를 겪었다. 이와 달리 성공적으로 문제를 해결한 아동은 식 세우기를 해결 가능한 다른 방법으로 표현하여 문제를 해결하였다.

< 문제 E-1. 식을 바르게 세웠으나 해결하지 못한 예 - 오답 >



< 문제 E-1. 해결 가능한 방법으로 표현한 예 - 정답 >



V. 요약 및 결론

1. 요 약

본 연구는 아동이 문제해결 과정에서 사용하는 표현 방법을 분석하여 수학 문제해결력을 높이는 교수-학습 방법에 도움이 되게 하는데 목적이 있다. 이와 같은 연구 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다. (1) 초등 수학 문제해결 과정에서 아동이 사용하는 표현 방법은 어떤 특징을 가지고 있는가? (2) 초등 수학 문제해결에서 성공적으로 문제를 해결한 아동은 어떤 유형의 표현 방법을 사용하는가?

본 연구에서 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 초등 수학 문제해결 과정에서 아동은 다양한 방법으로 표현하여 문제를 해결하는데 서툴렀다. 문제의 조건에서 그리기의 힌트가 되는 용어를 발견하지 못할 경우에는 상황을 그림으로 나타내지 않고 식을 세워 문제를 해결하려고 하였다. 아동이 사용하는 재진술 방법은 대부분 문제를 다시 옮겨 적는 수준에 머물렀으며, 표 그리기 방법을 사용할 때에는 여러 유형의 오류를 나타내었다. 조건을 간단히 하여 규칙을 찾아 복잡한 경우의 해를 구하는 방법은 거의 사용하지 않았다.

둘째, 문제를 읽자마자 생성되는 문제에 대한 이미지나 풀이 전략은 문제해결에 많은 영향을 미친다. 처음 문제에 대한 이미지는 아동이 각자 다른 그림을 그리게 하여 문제해결의 성패를 좌우하였다. 또한 대부분의 아이들은 시행착오 단계를 거치지 않고 처음 선택한 전략을 끝까지 사용하는 경향을 보여 처음 이미지의 중요성을 뒷받침하였다.

셋째, 계산식만으로 문제를 해결하려고 접근한 아이들은 오류를 경험하고, 계산식을 사용하기 전에 시간을 갖고 문맥을 이해하려는 아동은 대부분 그림을 이용하였다. 그림을 그릴 때에는 복잡한 이동선이나 분할선의 사용을 줄이고 해결과정에 따라 필요한 값을 명료하게 기록하여 직관적으로 문제를 해결하는데 도움이 되게 하였다. 그리고 문제를 다 푼 후에는 그 그림을 이용하여 문제해결 과정을 설명할 수 있을 정도로 명료하고 조직화된 그림을 그렸다.

넷째, 성공적으로 문제를 해결한 아동은 주어진 조건을 확인하고 조직화하는 과정에서 상황을 자세히 표현하기에 집착하기보다는 은유적인 그림을 그렸다. 그리고 정보간의 관계를 명확히 하기 위해 숫자적인 설명을 보충하고, 문제해결을 위해 필요하다고 생각되는 문제해결자의 의견을 그림에 포함시켰다. 고유명사의 용어도 약어나 다른 기호로 바꾸지 않고 그대로 사용하여 문제 상황을 재연하기 쉽게 하였다.

다섯째, 성공적으로 문제를 해결한 아동은 복잡한 계산식을 세우고 해결하지 못하는 오류를 겪지 않았다. 식을 세우는 대신 해결할 수 있는 형태로 계산 단계를 표현하여 문제를 해결하였다.

2. 결 론

초등 수학 문제해결 과정에서 아동이 사용하는 표현 방법을 연구하기 위해 실험 문제지를 분석한 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 초등 수학 문제해결 과정에서 대부분의 아동은 다양한 방법으로 조건을 표현하는

데 익숙하지 못하다. 아동은 문제의 조건에서 그리기의 힌트가 되는 용어를 발견하지 못할 경우에 상황을 그림으로 나타내지 않고 식을 세워 문제를 해결하려는 경향을 보인다. 이 방법은 주어진 문제의 문맥에서 꽤 벗어나서 문제를 해결하게 한다. 이러한 아동은 문제에서 주어진 숫자로만 식을 만들어 계산하며, 그 숫자가 의미하고 있는 것에는 관심을 두지 않기 때문이다. 또한 아동이 사용하는 재진술 방법은 대부분 문제를 다시 옮겨 적는 수준이었으며, 문제해결에 유용한 방법인 표 그리기를 적절하게 사용하지 못하였고 여러 가지 오류를 나타내었다. 조건을 간단히 하여 규칙을 찾아 복잡한 경우의 해를 구하는 방법은 거의 사용하지 않았다.

둘째, 문제를 읽자마자 생성되는 문제에 대한 이미지나 풀이 전략은 문제해결에 많은 영향을 미친다. 문제를 읽고 생기는 첫 이미지는 각자 다른 그림을 그리게 하고, 각자 다른 풀이 전략을 선택하게 한다. 문제에 적절한 해결 전략을 선택하는 것은 문제해결의 성패를 좌우한다. 특히 본 연구 결과에서 대부분의 아이들은 시행착오 단계를 거치지 않고 처음 선택한 전략을 끝까지 사용하는 경향을 보여 처음 이미지의 중요성을 뒷받침하였다.

셋째, 성공적으로 문제를 해결한 아동은 계산식에 의존하기보다는 여러 가지 정보를 해결할 수 있는 형태로 표현하여 문제를 해결한다. 시각적 표현은 계산을 수행하는 동안 문제의 정보를 접근할 수 있는 상태로 유지하게 한다. 간혹 문제를 읽고 계산식을 바르게 세웠으나 계산 방법을 알지 못해 오류를 겪는 경우가 있다. 성공적으로 문제를 해결한 아동은 어려운 계산식을 세우지 않고, 해결 가능한 형태로 표현하여 계산 단계를 이해하고 문제를 해결한다. 분수 문제 유형의 해결 과정에서는 주어진 분수를 그림에 그대로 표기할 경우 계산식을 세워 해결하려는 오류를 보였다. 그러나 성공적으로 문제를 해결한 아동은 조건에 주어진 분수를 전체에 대한 상대적인 양으로 바꾸어 표기하고 계산식 없이 그림으로만 문제를 해결하였다.

넷째, 성공적으로 문제를 해결한 아동은 문제해결 과정을 직관적으로 파악할 수 있을 정도로 명료하고 조직화된 그림을 그린다. 시각적으로 표현할 때에는 불필요한 정보를 생략하고 문제해결자가 스스로 의미를 부여한 간단한 이미지를 이용하였으며, 정보간의 관계를 명확히 하기 위해 숫자적인 설명을 보충하였다. 또한 복잡한 이동선이나 분할선의 사용을 자제하고, 문장제에 나타난 고유명사는 약어나 다른 기호로 바꾸지 않고 그대로 사용하여 문제 상황의 재연을 쉽게 하였다. 성공적으로 문제를 해결한 아동은 문제해결에 더 필요한 정보나 중간 단계의 값을 첨가하였는데 이는 명료하게 문제를 해결하게 하는데 유용하게 사용되었다.

이상에서 살펴본 바와 같이 시각화는 문제에서 요구하는 것을 이해하여 문제해결을 위해 나열하는 것이다. 이 방법은 어떤 수학 문제해결에도 적용할 수 있다. 즉, 시각적 표현 방법은 문제해결력을 길러주는데 효과가 있다. 그러므로 교사는 수학 교실에서 아동이 문제를 해결하는데 시각화 방법을 사용하도록 지도하여야 한다. 앞으로 아동의 시각적 표현 능력 향상을 위한 효과적인 수학과 교수-학습 방법의 연구가 지속적으로 이루어 져야 할 것이다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤 (1998). **초등수학교육론.** 동명사.

교육부 (1997). **수학과 교육과정.** 교육부.

교육부 (1999). **초등학교 교육 과정 해설(IV), -수학-.** 교육부.

교육인적자원부 (2003). **수학 4-나.** 대한교과서주식회사.

구광조, 오병승, 전평국 공역 (1995). **수학 학습 심리학.** 교우사.

김선화 (1992). **표현의 문제에 대한 수학교육적 고찰.** 서울대학교 석사학위 논문.

김윤옥 (1996). **질적 연구방법과 설계.** 문음사.

문광호 (1992). **중고등학교 수학의 시각화에 관한 연구.** 서울대학교 석사학위 논문.

우정호 (2002). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울대학교 출판부.

이대균 (2003, 11). **수학교육에서 시각적 표현에 관한 소고.** 한국수학교육학회지.

이대현 (2001). **수학 문제해결 과정에서 고등학생들의 직관적 사고의 분석.** 한국교원대학교 박사학위 논문.

이 숙 (1996). **표현들 간의 번역 능력이 문제해결에 미치는 영향에 대한 연구.** 이화여자대학교 석사학위 논문.

이애경 (1993). **수학 문제해결 전략의 지도에 관한 연구.** 서울대학교 석사학위 논문.

장혜원 (1997). **수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구.** 서울대학교 박사학위 논문.

한국교육개발원 (2002). **생각하는 수학공부 4학년용.** 대한교과서 주식회사.

Bruner, J. S. (1966). The Process of Education. 이홍우 역. **교육의 과정.** 배영사.

Essen, Gerard van & Hamaker, C. (1990, 7/8). Using selfgenerated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83,* 301-312.

Hemebree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 23,* 242-273.

Lester, F. K. (1982). Issues in teaching mathematical problem solving in the elementary grades. *School Science nad Mathematics 82,* 93-98.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA. Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1997). A student's imaging in solving a nonroutine task. *Teaching Children Mathematics (october).* 100-104.

National Council of Teachers of Mathematics. (1999). Improving problem solving through drawings. *Teaching Children Mathematics (september).* 48-51.

National Council of Teachers of Mathematics. (1999). On the keeping of several things in mind. *Teaching Children Mathematics (october).* 118-122.

Polya, G. 우정호 역 (1991). **어떻게 문제를 풀 것인가.** 천재교육.

Wheatley, G. H. (1991). Enhancing mathematical learning through imagery. *Arithmetic Teacher, 39,* 34-36.

Wheatley, G. H. & Brown, D. (1994). *The construction and representation of images in mathematical activity: image as metaphor.* Paper presented at the annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Lisbon. Portugal.

Yackel, E. Grayson, H, & Wheatly (1990). Promoting visual imagery in young pupils. *Arithmetic Teacher, 37,* 52-59

Yancey, A. V. Charles, S. Thompson, & Yancey, J. S. (1989). Children must learn to draw diagrams. *Arithmetic Teacher, 36,* 15-19

<Abstract>

A Study of the Representation in the Elementary Mathematical Problem-Solving Process

Kim, Yu Jung[3]; & Paik, Seok Yoon[4]

The purpose of this study is to examine the characteristics of visual representation used in problem solving process and examine the representation types the students used to successfully solve the problem and focus on systematizing the visual representation method using the condition students suggest in the problems.

To achieve the goal of this study, following questions have been raised.

(1) what characteristic does the representation the elementary school students used in the process of solving a math problem possess?

(2) what types of representation did students use in order to successfully solve elementary math problem?

240 4th graders attending J Elementary School located in Seoul participated in this study. Qualitative methodology was used for data analysis, and the analysis suggested representation method the students use in problem solving process and then suggested the representation that can successfully solve five different problems.

The results of the study as follow.

First, the students are not familiar with representing with various methods in the problem solving process. Students tend to solve the problem using equations rather than drawing a diagram when they can not find a word that gives a hint to draw a diagram. The method students used to restate the problem was mostly rewriting the problem, and they could not utilize a table that is essential in solving the problem. Thus, various errors were found. Students did not simplify the complicated problem to find the pattern to solve the problem.

Second, the image and strategy created as the problem was read and the affected greatly in solving the problem. The first image created as the problem was read made students to draw different diagram and make them choose different strategies. The study showed the importance of first image by most of the students who do not pass the trial and error step and use the strategy they chose first.

Third, the students who successfully solved the problems do not solely depend on the equation but put them in the form which information are decoded. They

3) sophiays@hanmail.net
4) sypaik@snue.ac.kr

do not write difficult equation that they can not solve, but put them into a simplified equation that know to solve the problem. On fraction problems, they draw a diagram to solve the problem without calculation.

Fourth, the students who successfully solved the problem drew clear diagram that can be understood with intuition. By representing visually, unnecessary information were omitted and used simple image were drawn using symbol or lines, and to clarify the relationship between the information, numeric explanation was added. In addition, they restricted use of complicated motion line and dividing line, proper noun in the word problems were not changed into abbreviation or symbols to clearly restate the problem. Adding additional information was useful source in solving the problem.

Keywords: mathematical problem solving, presentation method