

불확실한 Affine TFM(Transfer Function Matrix) 시스템의 강인한 다중 루프 제어기 설계

論 文
54D-1-3

Robust Multiloop Controller Design of Uncertain Affine TFM(Transfer Function Matrix) System

邊黃宇[†] · 梁海元^{*}
(Hwang-Woo Byun · Hai-Won Yang)

Abstract - This paper provides sufficient conditions for the robustness of Affine linear TFM(Transfer Function Matrix) MIMO (Multi-Input Multi-Output) uncertain systems based on Rosenbrock's DNA (Direct Nyquist Array). The parametric uncertainty is modeled through a Affine TFM MIMO description, and the unstructured uncertainty through a bounded perturbation of Affine polynomials. Gershgorin's theorem and concepts of diagonal dominance and GB(Gershgorin Bands) are extended to include model uncertainty. For this type of parametric robust performance we show robustness of the Affine TFM systems using Nyquist diagram and GB, DNA(Direct Nyquist Array). Multiloop PI/PID controllers can be tuned by using a modified version of the Ziegler-Nichols (ZN) relations. Simulation examples show the performance and efficiency of the proposed multiloop design method.

Key Words : GBM(Gershgorin Band Method), Affine TFM(Transfer Function Matrix) MIMO(Multi-Input Multi-Output) system, Robustness, RM-PI/PID (Robust Multiloop-PI/PID), DNAM(Direct Nyquist Array Method)

1. 서 론

최근 몇 년 동안 제어 공학자들의 관심은 제어 시스템의 성능과 안정도 개선을 위해 비구조적인 매개변수의 불확실한 섭동을 갖는 시스템의 영향을 연구하는 것이었다. 이런 불확실한 섭동은 플랜트의 미지의 특성인 외란과 액츄에이터, 센서 등의 오작동으로 인한 잡음으로 표현된다. 이러한 섭동 시스템에 대한 논의는 1970년대 후반부터 Birdwell[1], Ghosh[2], Saeks[3] 등에 의해 이루어져 왔다.

특히, 비구조적인 불확실성에 대한 논의는 1980년대 초반에 강인한 안정성 문제를 주파수 영역에서 해석한 Zames의 H_∞ 제어 이론[4]과 상태공간에서 두 개의 대수 리카티 방정식(algebraic Riccati equation)을 풀어 H_∞ 노름(norm)을 최소화하는 강인한 안정성의 해를 제시한 Glover 와 Doyle의 제어 이론[5], 그리고 플랜트의 불확실성에 대해 페루프 전달함수의 주파수 응답 크기가 허용 변동 범위 내에 놓이도록 니콜스 선도와 보드 선도에서의 loop shaping을 이용하여 설계하는 방식인 QFT(Quantitative Feedback Theory) 제어이론[6] 등에 의해 발전되어 왔다.

한편, 실구간(real intervals)에서 전달함수의 매개변수들은 구조화된 불확실성으로 표현될 수 있으며 이는 Kharitonov

에 의해 잘 알려져 있다[7]. Kharitonov 이론은 고정된 구간에 있어서 분모 · 분자 다항식의 계수가 변하는 구간 플랜트(interval plant)로부터 파생된 Kharitonov 플랜트들의 집합의 안정도를 결정하는데 사용되고 있으며, Barmish[8], Bartlett[9]를 통해 발전되어져 왔다. 특히, 구간 다항식에 대한 불확실한 매개변수의 강인 제어 이론은 90년대 중반 이후로 Bhattacharyya[10], Djaferis[11], Ackerman[12] 등에 의해 체계적으로 연구되었다. 이러한 구간 플랜트는 강인한 안정도 문제를 해결하는데 있어서 유용하게 사용되고 있으며 이 경우 각각의 플랜트 계수들이 하나 이상의 불확실한 매개변수에 의존하는 Affine 플랜트가 될 수 있다.

표 1. 불확실한 매개변수를 갖는 시스템의 분류와 설명
Table 1. Classifications and expression of system with uncertain parameters

Classifications	Terminology	Expressional form
$g(s, \hat{p})_{interval}$	interval polynomials-independent uncertainty structure	$\hat{p}_n, \hat{p}_{n-1}, \dots, \hat{p}_1, \hat{p}_0$
$g(s, \hat{p})_{affine}$	Affine linear uncertainty structure	polytopic polynomial families linear function + constant = $3\hat{p}_1 + 4\hat{p}_2 + 4$
$g(s, \hat{p})_{multiaffine}$	multiaffine uncertainty structure ~ multilinear uncertainty structure	multilinear function = $3\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 + 4\hat{p}_3 \cdot \hat{p}_4 + 2$
$g(s, \hat{p})_{polynomial}$	polynomial uncertainty structure ~ multivariable polynomial	multivariable polynomial = $2\hat{p}_2 \cdot \hat{p}_3 + 4\hat{p}_3 + \hat{p}_4^2$

† 교신저자, 正會員 : 漢陽大學校 電氣工學科 博士修了
E-mail : byunhwoo@suncheon.ac.kr

* 正會員 : 漢陽大學校 電氣工學科 教授 · I.博
接受日字 : 2004년 9월 7일
最終完了 : 2004년 12월 3일

불확실한 Affine 플랜트에 대한 Kharitonov의 접근은 직접적이지는 않지만 Fu[13]는 Affine 불확실성을 갖는 플랜트들에 대해 Nyquist 평면에 있어서 전체의 불확실성 값집합을 정량화 하였다. 한편, Rosenbrock은 Nyquist 안정도와 설계개념을 통해 SISO PID 설계법을 MIMO 시스템으로 확대하였으나 수동적인 시행착오법의 설계방법을 사용하였다[14]. 이에 비해 Hu와 Xu는 DNAM (Direct Nyquist Array Method)을 이용하여 다변수 PID 제어기를 자동적으로 구성하는 방법을 제안하였다[15]. 한편, 이들이 사용한 플랜트는 모두 선형·시불변 특성을 갖는 시스템으로 고정된 매개변수를 갖는 시스템이다.

본 논문에서는 그동안 상기한 연구자 등에 의해 수행되었던 SISO 구간 다항식의 안정도 문제를 Affine MIMO 플랜트를 대상으로 하여 수행하였으며 이를 통해 LTI(Linear Time Invariant) 시스템에 머물렀던 DNA 연구를 불확실한 Affine TFM MIMO 시스템으로 확장하여 강인성을 분석하였다. 이 방법은 우선, Affine TFM MIMO 시스템과 일반화 GBM을 정의하고 이를 통해 강인한 다중 루프 PI/PID (RM-PI/PID: Robust Multiloop-PI/PID Controller) 제어기의 설계한다. RM-PI/PID 제어기 설계를 위해서는 GBM을 이용한 이득여유(A_M) 및 위상여유(ϕ_m) 값이 필요하며 이는 이득교차 주파수(w_g)와 위상교차 주파수(w_x)에서의 GB를 갖는 Nyquist 선도를 통하여 구해진다. 이를 통해 구해진 이득여유와 위상여유는 RM-PI/PID 설계법의 기초동조규칙으로 사용되며 이는 수정된 Ziegler-Nichols 동조규칙 ($K_i = 0.6K_c/f$, $T_I = (\pi/w)f = 0.5P_{cr}$, $T_D = \pi/(4wf) = 0.125P_{cr}$)의 형태로서 $P_{cr} = 2\pi/w$ 의 관계를 갖는다. 또한, RM-PI/PID 제어기의 설계 및 Affine 시스템의 강인성 해석을 위해서 사용되는 이론은 Eftymios & Neil의 대각 지배 이론[20], DNA 안정도 이론[14], 모서리 정리(edge theorem) 등이 있다. 유효성 검증을 위한 Affine 플랜트는 정의에 따라 $i=3$ 으로 하여 플랜트를 가정하여 모의실험을 수행하였다. 모의실험을 통해 전통적인 ZN법과 IMC(Internal Model Controller) 동조법보다 우수한 성능(오버슈트의 감소, 빠른 응답)을 보이는 것으로 알려진 Tyreus-Luyben이 제안한 TL 동조법[16]과의 비교분석을 통해 본 논문에서 제시한 설계의 유효성을 검증하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 1장은 서론이며 2장은 Affine TFM MIMO 시스템과 일반화 GBM에 대한 정의를 기술하고 있다. 3장은 GBM을 이용한 이득여유 및 위상여유를 이용하여 RM-PI/PID 제어기를 설계하며 강인성을 해석한다. 4장에서는 이에 대한 모의 실험을 수행하고 5장으로 본 논문의 결론을 맺는다.

2. Affine TFM MIMO 시스템과 일반화 GBM

2.1 Affine TFM MIMO 시스템

선형 Affine 플랜트의 DNA는 Nyquist로서 정의되며 다중 루프에 대한 설계와 안정도 분석을 위해 유용한 이론의 기초를 제공한다. 또한 전통적인 DNAM에 대한 제어기 설계에 있어서는 도식적인 시행오차 접근법을 사용하는 GBM을

형상화함으로써 얻어진다[14].

분모·분자 다항식 함수들의 계수들이 섭동벡터 p 에 Affine하게 의존하는 함수로서 Baab[17]등이 정의한 유한 차원을 갖는 선형, 시불변 SISO 시스템을 가정한다.

$$g(s, p) = \frac{n_0(s) + \sum_{i=1}^k p_i(s)n_i(s)}{d_0(s) + \sum_{i=1}^k p_i(s)d_i(s)}, p \in Q \quad (1)$$

여기서 $n_0(s)$ 와 $d_0(s)$ 는 공칭 다항식들이고 $n_i(s)$ 와 $d_i(s)$ 는 섭동 다항식들이다. 그리고 $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ 는 경계된 4각 다각형에 속하는 섭동 매개변수 벡터로서 $Q = \{p \in R^n \mid p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, 2, \dots, n\}$ 로 주어진다.

(1)식의 불확실한 Affine 시스템을 전달함수 벡터 행렬형태(vector-matrix form)로 표현하면 다음처럼 표현된다.

$$g(s, p) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^v \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} n_{00} \\ n_{10} \\ \vdots \\ n_{v0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{01} & n_{02} & \dots & n_{0k} \\ n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n_{v1} & n_{v2} & \dots & n_{vk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} \right)}{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^n \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} d_{00} \\ d_{10} \\ \vdots \\ d_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0k} \\ d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} \right)} = \frac{s_n^T(n_0 + N_k \cdot p)}{s_d^T(d_0 + D_k \cdot p)} \quad (2)$$

여기서 s_n 과 s_d 는 라플라스 변수 s 의 거듭제곱(powers)을 포함하는 $v+1$ 과 $n+1$ 의 차원을 갖는 벡터들이다. 또한, $n_0 \in R^{v+1}$, $d_0 \in R^{n+1}$ 과 $n_k \in R^{(v+1) \times k}$, $d_k \in R^{(n+1) \times k}$ 는 Affine 매개변수의 불확실성 구조를 표현하는 상수들이다.

(2)식은 Affine SISO 전달함수를 표현한 것으로 이것을 Affine TFM $g(s) = [g_{rc}(s)]_{z \times z}$, $r, c = 1, \dots, z$ MIMO 시스템으로 확장하면 (3)식이 된다.

$$g(s, p) = [g_{rc}(s, p)]_{z \times z} = \begin{bmatrix} g(s, p)_{11} & g(s, p)_{12} & \dots & g(s, p)_{1z} \\ g(s, p)_{21} & g(s, p)_{22} & \dots & g(s, p)_{2z} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g(s, p)_{z1} & g(s, p)_{z2} & \dots & g(s, p)_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.2 일반화 GBM

일반화 GBM을 해석하기 위해 다음 그림 1의 제어시스템을 구성한다.

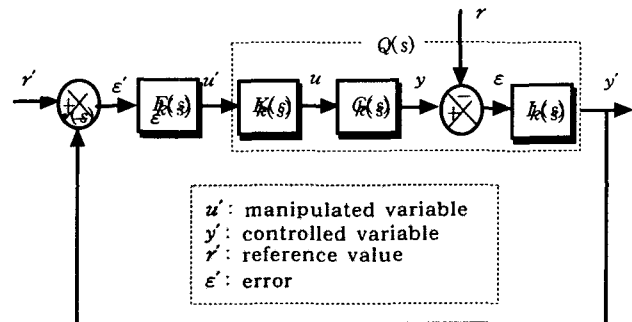


그림 1. 일반화 GBM에서의 제어계
Fig. 1. Control system in Generalized GBM

그림 1에서 사용된 $G(s)$ 는 제어대상, $F(s)$ 는 $diag(f_i(s))$ 로 주어지는 주보상기, $K(s)$ 는 $k_{ij}(s)$ 을 갖는 외란 제거용 전치 보상기, $L(s)$ 는 $l_{ij}(s)$ 를 갖는 후치 제어기, $Q(s)$ 는 의사 제어대상 (pseudo plant)이다.

즉,

$$Q(s) = L(s)G(s)K(s) = \begin{bmatrix} q_{11}(s) & \dots & q_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1}(s) & \dots & q_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}, r' = \begin{pmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ r'_m \end{pmatrix}, \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_m \end{pmatrix} \quad (5)$$

이다. $u'_i, y'_i, r'_i, \varepsilon'_i$ 는 각각 i 번째 조작량, 제어량, 목표값, 편차이며 u, y, r, ε 는 각각 의사 조작량 벡터, 의사 제어량 벡터, 의사 목표값 벡터, 의사 편차 벡터이다. i 루프의 주보상기 $f_i(s)$ 만을 제거한 시스템의 u'_i 에서 y'_i 로의 전달함수를 $h_i(s|F)$ 로 나타내면

$$h_i(s|F) = q_{ii}(s) + \eta_i(s|F) \quad (6)$$

$$\eta_i(s|F) = -v^T_i(s|\bar{i})F(s|\bar{i})(I + Q(s|\bar{i})F(s|\bar{i}))^{-1} \times w_i(s|\bar{i})$$

이다. 단, $Q(s|\bar{i}), F(s|\bar{i})$ 는 $Q(s), F(s)$ 의 제 i 행, i 열을 제거해서 얻어지는 $(m-1)$ 차 정방행렬, $v^T_i(s|\bar{i})$ 는 $Q(s)$ 의 i 행에서 요소 $q_{ii}(s)$ 를 제거해서 얻어지는 $(m-1)$ 차 행벡터, $w_i(s|\bar{i})$ 는 $Q(s)$ 의 i 열에서 요소 $q_{ii}(s)$ 를 제거해서 얻어지는 $(m-1)$ 차 열벡터이다.

한편, 양 또는 0의 수 $e_1(s), \dots, e_m(s)$ 를 m 차 정방 행렬

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & |q_{12}| & \dots & |q_{1m}| \\ |q_{21}| & 0 & \dots & |q_{2m}| \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ |q_{m1}| & |q_{m2}| & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이 반 M -행렬이 되도록 고른다. 여기서 반 M -행렬이란 비대각 요소가 (-) 또는 0이고 주좌 소행렬(leading principle minor)이 모두 양 또는 '0'인 실정방(positive real) 행렬인 경우이다. 다음은 일반화 GBM에 따르는 정리이다.

정리 1: Araki의 정리[18]

제 i 번째 이외의 루프 주보상기 $f_j(s)$ 가 조건

$$|f_j(s)^{-1} + q_{jj}(s)| > e_j(s) \quad (j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, m) \quad (8)$$

을 만족시키면 제 i 루프 개루프 전달함수 $h_i(s|F)$ 와 $q_{ii}(s)$ 와의 차 $|\eta_i(s|F)|$ 는 다음 식의 범위에 있다.

$$|\eta_i(s|F)| < e_i(s) \quad (e_i(s) > 0 \text{인 경우}) \\ = 0 \quad (e_i(s) = 0 \text{인 경우}) \quad (9)$$

이 정리에 따라 $h_i(s|F)$ 와 f_i 의 곱의 벡터궤적이 어느 범위에 있는지 알 수 있다.

정리 2: Gershgorin Band와 Frobenius-Perron의 근 일반화 Gershgorin 원판($\mathcal{G}_i(j\omega)$)은

1) 중심: $f_i(j\omega)q_{ii}(j\omega)$

2) 반지름: $|f_i(j\omega)| e_i(j\omega) = \lambda(j\omega|Q) |f_i(j\omega)q_{ij}(j\omega)|$ (10)으로 주어지며 ω 가 $-\infty$ 로부터 ∞ 까지 변화할 때 $\mathcal{G}_i(j\omega)$ 의 궤적(Γ_i)을 일반화 Gershgorin Band라고 부른다. 여기서 λ 는 정방행렬 $c_i(j\omega) = q_{ij}(s)/q_{ii}(s)$ ($i, j=1, \dots, m, i \neq j$)의 최대 고유값 또는 Frobenius-Perron의 근이다.

한편, Gershgorin 원판($\mathcal{G}_i(j\omega)$)을 이득 위상면으로 사상한 도형을 Gershgorin 의사 원판($\overline{\mathcal{G}}_i(j\omega)$)이라 하며 다음의 관계를 갖는다.

$$\zeta = 20 \log |f_i(j\omega) \cdot q_{ii}(j\omega)| + 20 \log |1 + \lambda(j\omega|Q)e^{j\theta}| \\ \xi = \angle(f_i(j\omega) \cdot q_{ii}(j\omega)) + \angle(1 + \lambda(j\omega|Q)e^{j\theta}) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

여기서 ζ 는 이득 위상면의 세로축 좌표(이득 [dB])이고 ξ 는 가로축 좌표(위상 각)이다.

3. GBM을 이용한 강인한 다중 루프 PI/PID 제어기의 설계

3.1 GBM을 이용한 이득여유 및 위상여유의 계산

일반적인 GBM 설계법은 입출력 쌍 $G(s)$ 의 결정, λ 를 작게 하기 위한 $Q(s) = L(s)G(s)K(s)$ 의 근사 대각화, GBM 및 $f_i(s)h_i(s|F)$ 의 벡터궤적(이득 위상 곡선)을 사용한 주보상기의 설계, 외란 억제·목표값 응답·루프간 상호간섭·안정도 여유의 검토를 통한 성능평가 등으로 구성된다.

GB를 통해 PI/PID 제어기를 설계하기 위해 제어기 전달함수 행렬 $F(s)$ 를 다음처럼 가정한다.

$$F(s) = \text{diag} [f_1(s), \dots, f_i(s), \dots, f_{i-1}(s), i+1, \dots, m] \quad (11)$$

여기서 $f_j(s)$ 는 PI/PID 제어기함수로서 다음으로 주어진다.

$$f_j(s) = K_j(1 + \frac{1}{sT_{ij}}) \quad \text{(PI)}$$

$$f_j(s) = K_j(1 + \frac{1}{sT_{ij}} + sT_{Dj}) = \frac{K_j}{sT_{ij}} (\frac{1}{2}sT_{ij} + 1)^2 \quad \text{(PID)} \quad (12)$$

여기서 $T_D = \frac{1}{4} T_f$ (Ziegler-Nichols method)이다.

그림 2를 통하여

$$\phi'_m = \pi - \angle B, \quad A'_M = \frac{1}{|C|} \quad (13)$$

이며, r_1 은 이득교차주파수에서 Gershgorin 원판의 반지름이고 C_1 은 Gershgorin 원판의 중심이다. 이론적으로 SISO 시스템에서 안정하기 위한 조건은 (13)식처럼 단지 2개의 점들(B, C)로 정의되는 이득여유(A'_M), 위상여유(ϕ'_m)가 $(-1+j0)$ 을 포함하지 않아야 한다. 한편, 주어진 플랜트의 공칭점에서의 이득여유(A_M), 위상여유(ϕ_m)는 (14), (16) 식으로 표현된다.

$$\phi_m = \phi'_m + \sin^{-1} \frac{\sum_{i, j \neq i} |f_i(j\omega) \cdot q_{ij}(j\omega_{gi})|}{|f_i(j\omega) \cdot q_{ii}(j\omega_{gi})|} \\ \cong \phi'_m + 2 \sin^{-1} \frac{\sum_{i, j \neq i} |g_{ij}(j\omega_{gi})|}{2 |g_{ii}(j\omega_{gi})|} \quad (14)$$

(14)식의 후반부는 근사 대각화에 따라 λ 가 작아지도록

(4)식의 $Q(s) = L(s)G(s)K(s)$ 를 결정하면 (즉, $L(s) = K(s) = I$) 성립하는 식이다.

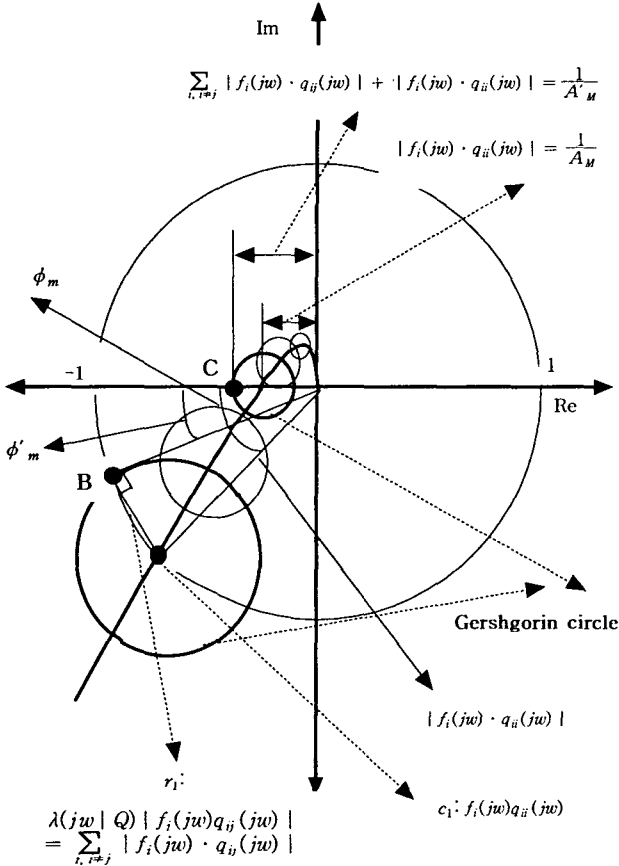


그림 2. 이득교차 주파수 (w_{gi})와 위상교차 주파수 (w_{pi})에서의 GB를 갖는 Nyquist 선도

Fig. 2. Nyquist diagram with Gershgorin Band at gain-crossover frequency (w_{gi}) and phase-crossover frequency (w_{pi})

$$\frac{1}{A'_M} = \sum_{i,j \neq i} |f_i(jw) \cdot q_{ij}(jw_{pi})| + |f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw_{pi})|$$

$$(|f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw_{pi})| = \frac{1}{A'_M})$$

$$A_M = \frac{1}{\frac{1}{A'_M} - \sum_{i,j \neq i} |f_i(jw) \cdot q_{ij}(jw_{pi})|} \quad (15)$$

$$A_M = \frac{1}{\frac{1}{A'_M} - \sum_{i,j \neq i} |f_i(jw) \cdot q_{ij}(jw_{pi})|} \quad (16)$$

$f_i(jw) \cdot q_{ii}(s) = g_i(s)f_i(s)$, $|f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw)| = \frac{1}{A_M}$ 이므로

$$A_M = \frac{1}{|f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw_{pi})|} = \frac{1}{|g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi})|} \quad (17)$$

$$\phi_m = \pi + \angle q_{ii} \text{ 이므로}$$

$$\phi_m = \pi + \angle (g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi})) \quad (18)$$

$$|g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi})| = 1 \quad (19)$$

$$\angle (g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi})) = -\pi \quad (20)$$

이 되며, (16)식과 (17)식이 같으므로

$$A_{M,i} = \frac{1}{|g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi})|} - A'_M \left(1 + \frac{\sum_{j \neq i} |g_{ij}(jw_{pi})|}{|g_{ii}(jw_{pi})|}\right) = 0$$

$$A_{M,i} = A'_M |f_i(jw_{pi})| (|g_{ii}(jw_{pi})| + \sum_{j \neq i} |g_{ij}(jw_{pi})|) - 1 = 0 \quad (21)$$

이 된다. (14)식과 (18)식이 같으므로

$$\phi_{m1,i} = \pi + \angle (g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi}))$$

$$-\phi'_m - 2 \sin^{-1} \frac{\sum_{j \neq i} |g_{ij}(jw_{gi})|}{2|g_{ii}(jw_{gi})|} = 0 \quad (22)$$

이 되고, (19)식을 제공하여 정리하면

$$|g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi})|^2 = 1$$

$$A_{M2,i} = |g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi})|^2 - 1 = 0 \quad (23)$$

이 된다. 또한 (21)식을 정리하면

$$\phi_{m2,i} = \angle (g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi})) + \pi = 0 \quad (24)$$

이 되며, 식 (14)식과 (16)식, 그리고 (4)과 (12)식을 (21)-(24)에 대입하여 w_{pi} , w_{gi} , K_j , T_j 를 구할 수 있으며 이는 Newton-Raphson법과 Gauss 소거법을 사용하여 구한다. 다음은 이득교차 주파수 w_{gi} 와 위상 교차 주파수 w_{pi} 를 구하는 과정으로 식 (1)을 통해 정의된 Affine 플랜트의 정의에 따라 $i=3$ 으로 하여 플랜트를 가정한다.

표 2. w_{gi} 를 구하는 과정

Table 2. Process calculating w_{gi}

Process calculating w_{gi}	
$g_{ii}(s) = \frac{K_i}{p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0}$, $f_i(s) = \frac{K_i(T_D T_I s^2 + s T_I + 1)}{s T_I}$	(25)
$g_{ii}(jw) f_i(jw) = \frac{K_i \cdot K_j}{T_I} \cdot \left(\frac{(1 - T_D T_I w^2) + j T_I w}{(p_3 w^4 - p_1 w^2) + j(p_0 w - p_2 w^3)} \right)$	(26)
$ g_{ii}(s) f_i(s) = \frac{K_i \cdot K_j}{T_I} \cdot \sqrt{\frac{(\gamma\alpha + \delta\beta)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}}$	(27)
$g_{ii}(s) f_i(s) = \frac{K_i \cdot K_j}{T_I} \cdot \left(\frac{(1 - T_D T_I w^2) + j T_I w}{(p_3 w^4 - p_1 w^2) + j(p_0 w - p_2 w^3)} \right) = \frac{\gamma + j\delta}{\alpha + j\beta}$	(28)
$ g_{ii}(s) f_i(s) = \frac{K_i \cdot K_j}{T_I} \times \frac{\sqrt{((-p_3 T_D T_I)w^6 + (p_3 + p_1 T_D T_I - p_2 T_I)w^4 + (p_0 T_I - p_1)w^2)^2 + Q}}{p_3^2 w^8 + (p_2^2 - 2p_1 p_3)w^6 + (p_1^2 - 2p_0 p_2)w^4 + p_0^2 w^2}$ $= \frac{K_i \cdot K_j}{T_I} \times \frac{\sqrt{A^2 w^{12} + (2AB + D^2)w^{10} + (B^2 + 2A\Gamma + 2\Delta E)w^8 + \Psi}}{p_3^2 w^8 + (p_2^2 - 2p_1 p_3)w^6 + (p_1^2 - 2p_0 p_2)w^4 + p_0^2 w^2}$	(29)
$A_M = \frac{1}{ g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi}) } = T_I \cdot (p_3^2 w^8 + (p_2^2 - 2p_1 p_3)w^6 + (p_1^2 - 2p_0 p_2)w^4 + p_0^2 w^2)$	(30)
$\frac{T_I \cdot (p_3^2 w^8 + (p_2^2 - 2p_1 p_3)w^6 + (p_1^2 - 2p_0 p_2)w^4 + p_0^2 w^2)}{K_i \cdot K_j \cdot \sqrt{A^2 w^{12} + (2AB + D^2)w^{10} + (B^2 + 2A\Gamma + 2\Delta E)w^8 + X}} - 1 = 0$	(31)
$T_I \cdot (p_3^2 w^8 + (p_2^2 - 2p_1 p_3)w^6 + (p_1^2 - 2p_0 p_2)w^4 + p_0^2 w^2) - K_i \cdot K_j \cdot \sqrt{A^2 w^{12} + (2AB + D^2)w^{10} + (B^2 + 2A\Gamma + 2\Delta E)w^8 + X} = 0$ $T_I^2 \cdot (p_3^2 w^8 + (p_2^2 - 2p_1 p_3)w^6 + (p_1^2 - 2p_0 p_2)w^4 + p_0^2 w^2)^2 - K_i^2 \cdot K_j^2 \cdot (A^2 w^{12} + (2AB + D^2)w^{10} + (B^2 + 2A\Gamma + 2\Delta E)w^8 + X) = 0$	(32)

표 2에서 사용한 수식관계는 다음 관계를 갖는다.

$$\Theta = \frac{\gamma + j\delta}{\alpha + j\beta} = \frac{(\gamma\alpha + \delta\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)} + j \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

$$\alpha = (p_3 w^4 - p_1 w^2), \beta = (p_0 w - p_2 w^3), \gamma = (1 - T_D T_I w^2)$$

$$\begin{aligned} \delta &= T_I w \\ \Omega &= (p_3 T_I - p_2 T_D T_I) w^5 + (p_2 + p_0 T_D T_I - p_1 T_I) w^3 - p_0 w \\ A &= -p_3 T_D T_I, B = p_3 + p_1 T_D T_I - p_2 T_I, \Gamma = p_0 T_I - p_1 \\ \Delta &= p_3 T_I - p_2 T_D T_I, E = p_2 + p_0 T_D T_I - p_1 T_I, Z = p_0 w \\ \Psi &= 2B\Gamma + E^2 - 2\Delta Z) w^6 + (\Gamma^2 - 2EZ) w^4 + Z^2 w^2 \\ X &= 2B\Gamma + E^2 - 2\Delta Z) w^6 + (\Gamma^2 - 2EZ) w^4 + Z^2 w^2 \end{aligned}$$

표 3. w_{pi} 를 구하는 과정

Table 3. Process calculating w_{pi}

Process calculating w_{pi}	
$\angle(g_i(jw_{pi}))f_i(jw_{pi}) = \angle\left(\frac{\gamma\alpha + \delta\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + j\frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$ $= \tan^{-1} \frac{(p_3 T_I - p_2 T_D T_I) w^4 + (p_2 + p_0 T_D T_I - p_1 T_I) w^2 + (-p_0)}{(-p_3 T_D T_I) w^3 + (p_3 + p_1 T_D T_I - p_2 T_I) w^3 + (p_0 T_I - p_1) w}$ (33)	
$\phi_u = \pi + \angle(g_i(jw_{pi}))f_i(jw_{pi})$ $= \pi + \tan^{-1} \frac{(p_3 T_I - p_2 T_D T_I) w^4 + (p_2 + p_0 T_D T_I - p_1 T_I) w^2 + (-p_0)}{(-p_3 T_D T_I) w^3 + (p_3 + p_1 T_D T_I - p_2 T_I) w^3 + (p_0 T_I - p_1) w}$ (34)	
$\pi + \tan^{-1} \frac{(p_3 T_I - p_2 T_D T_I) w^4 + (p_2 + p_0 T_D T_I - p_1 T_I) w^2 + (-p_0)}{(-p_3 T_D T_I) w^3 + (p_3 + p_1 T_D T_I - p_2 T_I) w^3 + (p_0 T_I - p_1) w} = 0$ (35)	
$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (\because x \leq 1)$ $\tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} x (\because x \leq 1), = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4x} (\because x > 1)$ (36)	
$\tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4x} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) (\because x > 1)$ (37)	
$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi \cdot ((-p_3 T_D T_I) w^3 + (p_3 + p_1 T_D T_I - p_2 T_I) w^3 + (p_0 T_I - p_1) w)}{4 \cdot ((p_3 T_I - p_2 T_D T_I) w^4 + (p_2 + p_0 T_D T_I - p_1 T_I) w^2 + (-p_0))} = 0$ (38)	

따라서 (32)식을 만족하는 w_{gi} 와 (38)식을 만족하는 w_{pi} 를 구하면 된다.

3.2 RM-PI/PID(Robust Multiloop-PI/PID) 제어기의 설계 및 Affine 시스템의 강인성 해석

3.2.1 RM-PI/PID(Robust Multiloop-PI/PID) 제어기의 설계

PID 제어기의 동조기술은 Ziegler-Nichols(1942)의 한계감도법을 시작으로 Hrone & Reswick(1952)의 전달함수 표현에서 매개변수를 구하는 방법, Yoshikazu & Nishikawa(1984)의 제어기 자동동조법, Astrom & Hagglund(1984)가 제안한 페루프 시스템에서 임계이득과 임계진동주기를 계단 입력에 대한 시스템의 진폭과 주파수에 의해 결정하는 방법, Schei(1992)가 제안한 페루프 시스템에서 시스템의 안정도와 성능이 결정되는 제한된 임계주파수에서 제어 매개변수를 결정할 수 있는 방법 등으로 발전하였다. 그 이외에도 Kitamori의 모델매칭 Self-tuning, Kuwata의 개량형 한계감도법, IMC(Internal Model Controller) 설계기술, Cohen-Coon법인 지배극 설계(Dominant Pole Design)가 있으며, 시영역최적화법(Time Domain Optimization Methods), 주파수영역형상(Frequency Domain Shaping), LQG 최적 제어법(Optimal Control Methods)등도 폭넓게 사용되고 있다. 특히, Ho 등은 이득여유와 위상여유를 사용하는 다양한 PID 설계 기술을 공식화하여 IMC, IAE-setpoint, ITAE-setpoint, ISE-setpoint, IAE-load, ITAE-load, ISE-load, ZN step response, ZN ultimate cycling, Cohen-Coon 등을 분석하였다[19].

본 논문에서 설계하는 RM-PID 제어기 자동설계기법은 릴레이의 실험에 의해 구한 최대이득(ultimate gain) 및 최대진동주기(ultimate oscillation)를 구한 후 이때 각각의 PID 계수 값을 산출하는 수정된 Ziegler-Nichols의 동조법을 사용하여 구현하며 자동 적용기술은 자동 동조(auto-tuning) PID를 사용한다.

일반적인 GBM 설계법은 입력력 쌍 $G(s)$ 의 결정, λ 를 작게 하기 위한 $Q(s) = L(s)G(s)K(s)$ 의 근사 대각화, GBM 및 $f_1(s)h_i(s|F)$ 의 벡터궤적(이득 위상 곡선)을 사용한 주보상기의 설계, 외란 억제·목표값 응답·루프간 상호간섭·안정도 여유의 검토를 통한 성능평가 등으로 구성된다. 제어기 설계 절차 중에서 제일 중요한 것이 주보상기 설계이다. 가장 간단한 방법은 복소 평면상에 일반화 Gershgorin 원판 $\delta_i(jw)$ 을 그린 후 원판의 가장자리와 음의 실축과의 교점 $(-x_i, 0)$ 과 대응 주파수 w_i 를 구하여 $\epsilon_i = 1/x_i, T_i = 2\pi/w_i$ 의 관계를 이용하여 제어기를 구성하는 한계감도법(ultimate sensitivity method)이 있다. 이 방법보다 좀더 정밀한 방법은 Nichols 설계법을 이용하는 것이다. 이 방법은 주보상기를 P제어기로 하여 $f_i(s)h_i(s|F)$ 의 이득 위상곡선이 모두 $M_p = \alpha$ (프로세스계에 대한 페루프 이득곡선의 피크값의 기준량)의 조건을 만족하도록 이득을 조정한다. 다음으로 각 루프에 대해 $f_i(s)h_i(s|F)$ 의 이득 위상 곡선과 위상각 = -180° 직선과의 교점에 대한 각 주파수 w_i 를 구하여 $T_i = 2\pi/w_i$ 의 관계를 통해 P제어 일 때의 안정한계에 대한 지속진동주기로 간주하여 각 루프 조절계의 적분시간·미분시간을 결정하는 방식이다.

본 논문에서 제안한 1절의 MIMO 플랜트에 대해 강인한 다중 루프 제어기 RM-PID를 설계하기 위해서 제안된 설계법을 요약하면 다음과 같다. i) 대각 지배(diagonally dominant)인 프로세스를 결정하고 그렇지 못하면 대각지배로 준비된 예비 보상기(pre-compensator)를 설계한다. ii) 임계주파수에서의 임계이득과 임계주기를 구한다. 만약 주보상기 $F(s)$ 가 사용된다면 시스템은 $G(s)$ 대신에 $G(s)F(s)$ 를 고려하여야 한다. iii) 각각의 루프에 대해 PID 제어기를 설계한다.

상기한 대각지배는 다음의 이론으로 정의될 수 있다.

이론 1: Etfhymios & Neil의 대각지배 이론[20]

Affine TFM을 $g(s) = [g_{rc}(s)]_{z \times z}$ 으로 놓고, $T(s)$ 를 행렬 $T(s) = g(s)(diag[g(s)])^{-1}$ 이라고 가정한 경우 $T(s)$ 의 Frobenius-Perron의 고유치(eigenvalue)가 나이퀴스트 일주 주위에 모든 주파수들에 있어서 2보다 적다면 TFM $g(s)$ 는 일반화된 대각 지배이다.

한편, 개루프 상태에서 시스템의 계단응답특성에 기초를 두는 Ziegler-Nichols 동조 형태에 따르면 (12)식이 되며, 여기서 K_{cr}, P_{cr} 는 최대이득 및 최대 진동주기이다. 본 논문에서의 제어기 매개변수는 주파수를 사용한 수정된 Ziegler-Nichols 동조 규칙을 따르며 제안한 RM-PI/PID 설계법은 시스템 주파수 응답에 기초한다.

$$K_j = 0.45 \frac{K_{cr}}{f}, T_I = \frac{2\pi}{1.2w} f = 0.83P_{cr} \text{ (RM-PI)}$$

$$K_j = 0.6 \frac{K_{cr}}{f}, T_I = \frac{\pi}{w} f = 0.5P_{cr}$$

$$T_{Dj} = \frac{\pi}{4wf} = 0.125P_{cr} \text{ (RM-PID)} \quad (39)$$

여기서 $P_{cr} = 2\pi/w$ 의 관계를 만족한다.

3.2.2 Affine 시스템의 강인성 해석

일반화 GB에서의 안정조건은 DNA(Direct Nyquist Array) 안정도 이론으로 불리고 있으며 이는 다음의 두조건이 만족하면 그림 1의 페루프 제어계는 안정하다는 이론이다.

이론 2: DNA 안정도 이론[14]

- 1) $Q(s)$ 의 불안정한 극의 수를 μ_0 로 하고 $f_i(j\omega)q_{ii}(j\omega)$ 의 벡터궤적이 점(-1,0) 주위를 반시계 방향으로 도는 횟수를 μ_i 로 할 때 다음 식이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = \mu_0 \quad (40)$$

- 2) 모든 일반화 GB 궤적 Γ_i 이 점(-1,0)을 포함하지 않는다.

이론 3은 Bartlett등이 발표한 모서리 정리이다[21].

이론 3: 모서리 정리(edge theorem)

$g(s, p)$ 의 각 계수가 p 에 대해 선형 종속, 즉 Affine 함수인 다항식 균일 때 2'로 주어지는 극점(extreme point)간의 노출된 모서리 (exposed edges)가 안정이면 $g(s, p)$ 가 D -안정(LHP stable)하다.

정리 3: 성능 레벨(performance level)이 $\delta > 0$ 으로 주어진 경우라면 모든 $\omega \geq 0$ 과 $p \in P$ 에 대해 필요 충분조건으로 (41)이 주어진다 (42)식을 얻을 수 있다.

$$|n_i(j\omega, p) \cdot d_i(j\omega, p)^{-1}| < \delta \quad (41)$$

$$\max_{p \in P} \|g(j\omega, p)\|_{\infty} < \delta \quad (42)$$

주파수 ω 가 ∞ 로 증가하면 $|g(j\omega, p)|$ 는 'zero'로 감소하기 때문에 이것은 $n_i(j\omega, p) - \delta d_i(j\omega, p)e^{j\phi} \neq 0$ 의 영점 배제 조건(zero-exclusion condition)이 $\omega \in R$ 에 대해, 그리고 $p \in P$ 와 $\phi \in [0, 2\pi]$ 에 대해, (42)식이 만족하는지를 점검해야 한다. 이를 통해 복소 계수 다항식(complex coefficients polynomial) $g_{\delta}(s, p) = n_i(s, p) - \delta d_i(s, p)e^{j\phi}$ 이 모든 $p \in P$ 와 $\phi \in [0, 2\pi]$ 에 대해 개방 좌측 반평면(open LHP)에 근을 갖음을 확인해야 한다.

4. 모의 실험

3장에서 논의된 RM-PI/PID를 설계하기 위하여 (1), (3)을 통해 정의된 Affine TFM MIMO 시스템을 고려하자.

$$g(s, p) = [g_{rc}(s, p)]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} g(s, p)_{11} & g(s, p)_{12} \\ g(s, p)_{21} & g(s, p)_{22} \end{bmatrix}$$

$$g(s, p)_{11} = \frac{1.5 + [-1, 1]}{2.2s^3 + 4.4s^2 + (3.6 + [-1, 1])s + 0.9}$$

$$g(s, p)_{12} = \frac{1.5}{1.8s^3 + 4.4s^2 + 4.4s + 0.9 + [-0.5, 0.5]}$$

$$g(s, p)_{21} = \frac{1.5}{2.2s^3 + (3.6 + [-3, 3])s^2 + 3.6s + 1.1 + [-0.3, 0.3]}$$

$$g(s, p)_{22} = \frac{1.5 + [-0.3, 0.3]}{1.8s^3 + (3.6 + [-3, 3])s^2 + 4.4s + 1.1} \quad (43)$$

본 모의 실험에서는 Matlab version 5.3을 사용하였고 Control System Toolbox version 4.1의 LTI Viewer를 이용하여 본 실험을 수행하였다.

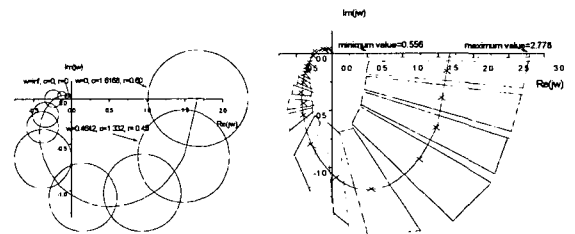
(12)식의 RM-PI/PID 제어기 계수를 구하기 위해 (21)-(24)식의 관계를 이용하여 대각 지배행렬 요소의 이득여유와 위상여유를 구하면 표 4와 같다.

표 4. Affine TFM MIMO 시스템에 대한 이득여유와 위상여유, 위상교차주파수 (w_{pi})와 이득교차주파수 (w_{gi})

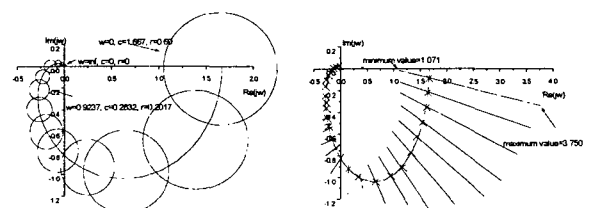
Table 4. Gain margin & Phase margin, phase-crossover frequency (w_{pi}) & gain-crossover frequency (w_{gi}) for Affine TFM MIMO system

Transfer Function	Gain Margin part		Phase Margin part	
	gain margin [dB]	phase-crossover frequency w_{pi} [rad/sec]	phase margin [deg]	gain-crossover frequency w_{gi} [rad/sec]
$g(s, p)_{11}$	4.2000	0.4845	84.9109	1.2792
$g(s, p)_{12}$	6.5704	0.3477	104.2069	1.5635
$g(s, p)_{21}$	3.1939	0.4736	101.2516	1.2792
$g(s, p)_{22}$	5.1333	0.3047	120.6962	1.5635

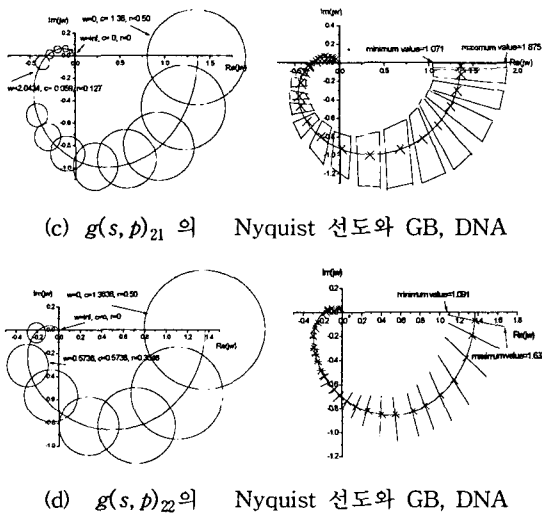
그림 3은 (43)식에 대한 Affine TFM 시스템($g(s, p)_{11}$, $g(s, p)_{12}$, $g(s, p)_{21}$, $g(s, p)_{22}$)의 Nyquist 선도와 GB, 정리2에 따른 DNA를 그린 것이다.



(a) $g(s, p)_{11}$ 의 Nyquist 선도에 따른 GB, DNA



(b) $g(s, p)_{12}$ 의 Nyquist 선도와 GB, DNA



(c) $g(s, p)_{21}$ 의 Nyquist 선도와 GB, DNA

(d) $g(s, p)_{22}$ 의 Nyquist 선도와 GB, DNA

그림 3. Affine TFM 시스템에 대한 Nyquist 선도와 GB, DNA
Fig. 3. Nyquist Diagram and GB, DNA for Affine TFM system

그림 3은 주파수 공간 범위 0.01~100 [rad/sec]에서 20-30개의 주파수들에 나누어 표시한 것으로 왼쪽 그림은 $g(s, p) = [g_{rc}(s, p)]_{2 \times 2}$ 의 GB를 그린 것이다. 오른쪽 그림은 DNA를 그린 것으로 “×”는 공칭점을 표시한다. 공칭점에서의 값은 (a) 최소값=0.556, 최대값=2.778, (b) 최소값=1.071, 최대값=3.750, (c) 최소값=1.071, 최대값=1.875, (d) 최소값=1.091, 최대값=1.637로 나타나고 있다.

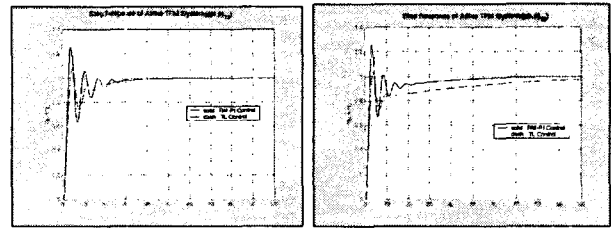
한편, Tyreus-Luyben[16]이 제안한 TL-PI 동조법과 본 논문에서 제안한 GBM을 이용한 RM-PI 동조법과의 비교분석을 통해 본 논문에서 제시한 설계의 유효성을 검증하고자 한다. 일반적으로 TL 동조법은 전통적인 ZN법과 IMC 동조법보다 우수한 성능(오버슈트의 감소, 빠른 응답)을 보이는 것으로 알려져 있다.

표 5는 RM-PI 동조법과 TL-PI 동조법을 사용한 경우의 PI 계수를 비교한 것이다.

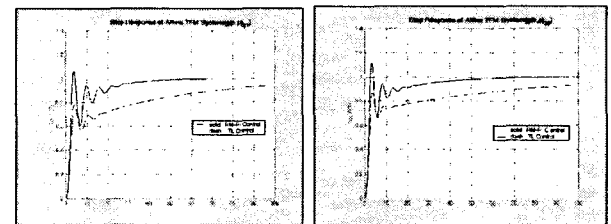
표 5. RM-PI 동조법과 TL-PI 동조법의 계수 비교
Table 5. Coefficient comparison of TL-PI Tuning and RM-PI Tuning

Tuning Method	Transfer Function	$K_j(f=1)$	$T_f(f=1)$	K_{cr}	P_{cr}
proposed-PI (RM-PI) Tuning		$0.45K_{cr}$	$0.83P_{cr}$		
	$g(s, p)_{11}$	1.890	10.763	4.200	12.967
	$g(s, p)_{12}$	2.956	14.999	6.569	18.072
	$g(s, p)_{21}$	1.440	11.013	3.200	13.268
	$g(s, p)_{22}$	2.310	17.114	5.133	20.620
TL-PI Tuning		$0.31K_{cr}$	$2.2P_{cr}$		
	$g(s, p)_{11}$	1.302	28.528	4.200	12.968
	$g(s, p)_{12}$	2.036	39.7584	6.569	18.071
	$g(s, p)_{21}$	0.992	29.189	3.200	13.267
	$g(s, p)_{22}$	1.591	45.363	5.133	20.621

그림 4는 표 5에 있는 제안된 RM-PI와 TL-PI의 계수를 사용하여 계단응답(step response)을 구한 결과이다.



(a) $g(s, p)_{11}$, $g(s, p)_{12}$ 의 제안된 RM-PI 제어 및 TL-PI 제어의 계단 응답



(b) $g(s, p)_{21}$, $g(s, p)_{22}$ 의 제안된 RM-PI 제어 및 TL-PI 제어의 계단 응답

그림 4. 제안된 RM-PI 제어 및 TL-PI 제어의 계단 응답 비교
Fig. 4. Impulse Response Comparison of TL-PI Control PI and proposed RM-PI Control

그림 4에 보면 알 수 있듯이 본 논문에서 제안한 GBM을 이용한 RM-PI 제어가 TL 동조법을 사용한 TL-PI 제어 보다 Tracking과 안정도가 우수함을 알 수 있다.

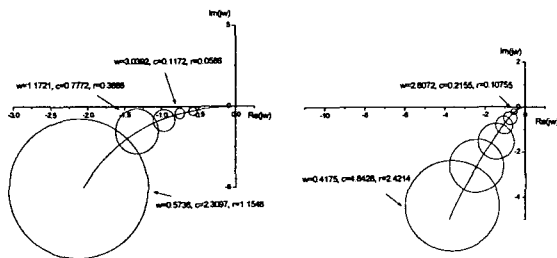
표 6은 표 4에 따른 결과를 (43)식에 대입하여 $f=1$ 에서 PI/PID 제어기 계수 K_j, T_f, T_D 를 구한 것이다. 특히, K_{cr} 은 특성 방정식의 Routh 안정도 판별법을 이용하여 구한다.

표 6. Affine TFM 시스템에 대한 RM-PI/PID 제어기 계수 ($K_j, T_f, T_D, f=1$)

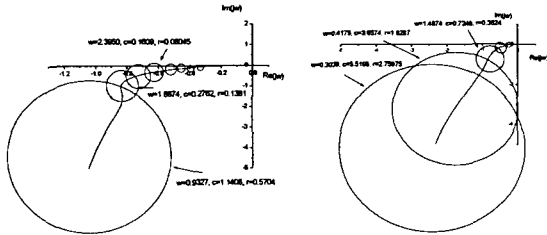
Table 6. RM-PI/PID Controller coefficient (K_j, T_f, T_D) for Affine TFM system at $f=1$

Transfer Function	PID Controller coefficient			Critical Point		
	$K_j(f=1)$	$T_f(f=1)$	$T_D(f=1)$	K_{cr}	P_{cr}	w
$g(s, p)_{11}$	2.520	6.484	1.621	4.200	12.967	0.4845
$g(s, p)_{12}$	3.941	9.036	2.259	6.569	18.072	0.3477
$g(s, p)_{21}$	1.920	6.634	1.658	3.200	13.268	0.4736
$g(s, p)_{22}$	3.079	10.311	2.578	5.133	20.620	0.3047

그림 5는 Affine TFM 시스템 ($g(s, p)_{11}, g(s, p)_{12}, g(s, p)_{21}, g(s, p)_{22}$)에 대해 표 5의 제어기 계수를 사용하여 보상된 결과를 Nyquist 선도와 GB로 그린 것이다.



(a) 보상된 $g(s, p)_{11}, g(s, p)_{12}$ 의 Nyquist 선도와 GB



(b) 보상된 $g(s, p)_{21}, g(s, p)_{22}$ 의 Nyquist 선도와 GB

그림 5. 보상된 Affine TFM 시스템에 대한 Nyquist 선도와 GB
Fig. 5. Nyquist Diagram and GB for compensated Affine TFM system

특히, 그림 5에서는 본 논문에서 제안한 RM-PI/PID 제어기의 설계를 위해 Nyquist 안정도 분석에 기초한 GBM (Gershgorin Band Method)을 사용하여 PID 동조(tuning)를 수행하였다. 보상된 구간 플랜트에 대한 성능평가를 위해 백분율 오버슈트(percent overshoot) $P.O.$ 와 정상상태 오차(e_{ss}), 감쇠비(ζ), 정정시간(T_s), 제동인자(α), 고유주파수(w_n)등을 계산하면

$$P.O. = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, e_{ss} = \frac{1}{K_v} (\because K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s f_j \cdot g(s, p)_{Affine})$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta w_n}, \alpha = \zeta w_n \quad (44)$$

의 관계를 가지며, 여기서 K_v 는 램프오차 상수이다. 표 7은 보상된 구간 플랜트에 대한 성능지수를 $P.O.$ 와 e_{ss} , ζ , T_s , α , w_n 등으로 표시하고 있다. 특히, 백분율 오버슈트를 5%로, 정정시간을 4초 이내로 설정하면 ζ 는 0.69보다 커야하며 w_n 는 1.88보다 커야한다. 따라서 임의값으로 ζ 를 설정한 후 정정시간(T_s), 제동인자(α), 고유주파수(w_n)를 차례로 구하면 표 4와 같다.

표 7. 보상된 Affine TFM 시스템에 대한 성능지수
Table 7. Performance Index for compensated Affine TFM system

Transfer Function	PID Controller coefficient					
	$P.O.$	T_s	ζ	α	e_{ss}	w_n
$g(s, p)_{11}$	5	4	0.72	0.99936	0.585	1.3880
$g(s, p)_{12}$	5	4	0.92	0.99995	0.306	1.0869
$g(s, p)_{21}$	5	4	0.73	0.99995	0.858	1.3698
$g(s, p)_{22}$	5	4	0.85	0.99994	0.478	1.1764

표 7에서 사용된 K_v 는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore K_v^1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s f_j \cdot g(s, p)_{11} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5.696s^2 + 9.28s + 3.78}{5.401s^3 + 10.8s^2 + 8.838s + 2.21} = 1.7104 \\ \therefore K_v^2 &= \lim_{s \rightarrow 0} s f_j \cdot g(s, p)_{12} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5.962s^2 + 11.88s + 5.912}{3.616s^3 + 8.84s^2 + 8.84s + 1.808} = 3.269 \\ \therefore K_v^3 &= \lim_{s \rightarrow 0} s f_j \cdot g(s, p)_{21} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3.972s^2 + 6.468s + 2.88}{4.941s^3 + 8.086s^2 + 8.086s + 2.471} = 1.1655 \\ \therefore K_v^4 &= \lim_{s \rightarrow 0} s f_j \cdot g(s, p)_{22} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4.658s^2 + 9.279s + 4.619}{3.616s^3 + 7.232s^2 + 8.84s + 2.21} = 2.090 \quad (45) \end{aligned}$$

표 7에서 알 수 있듯이 보상된 Affine TFM 시스템은 제동인자 값이 거의 '1'에 가까워 완전히 제동됨을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 매개변수의 불확실성에 의해 영향 받는 제어시스템의 강인한 안정도에 대한 연구를 수행하였다. 따라서 그동안 많은 연구자 등에 의해 수행되었던 LTI 시스템의 PI/PID 제어기 설계 문제를 불확실한 Affine TFM MIMO 시스템을 갖는 플랜트로 확장하여 강인성을 분석하고 이에 따라 새로운 강인한 다중 루프 PI/PID 제어기를 설계하였다.

RM-PI/PID 제어기의 설계를 위해 Nyquist 안정도 분석에 기초한 GBM을 사용하여 PI/PID 동조(tuning)를 수행하였다. 이를 위해 모의실험에서는 2×2 형태의 Affine TFM MIMO 시스템을 사용했으며 GBM을 사용한 RM-PI 동조법의 우수성을 입증하고자 Tyreus-Luyben이 제안한 TL 동조법과의 비교분석을 수행하였다. 비교 분석결과 Tracking과 안정도에 있어서 본 논문에서 제시한 설계의 효율성 검증할 수 있었고, 보상된 Affine TFM 시스템은 제동인자 값이 거의 '1'에 가까워 완전히 제동됨을 알 수 있었다.

향후 본 저자는 GB법을 이용한 안정도 향상과 다른 다양한 동조법과의 비교분석에 더욱 매진할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Birdwell. J, Castanon. D, Athans. M, "On reliable control system designs with and without feedback reconfigurations", Proc. IEEE Conf. Control, pp. 419-426, Dec. 1979.
- [2] Ghosh. B, "Some new results on the simultaneous stability of a family of single input, single output systems", System and Control Letters, vol. 6, no. 1, pp. 39-45, 1985.
- [3] Saeks. R, Murray. J, "Fractional representations, algebraic geometry and the simultaneous stabilization problem", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 27, pp. 895-903, 1982.
- [4] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, 1981.
- [5] K. Glover, J. C. Doyle, "State-space fomulate for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm

bound and relations to risk sensitivity”, System and Control Letters, vol. 11, pp. 167-172, 1988.

[6] C. H. Houpis, Quantitative Feedback Theory(QFT) Technique, CRC Press, pp. 701-717, 1996.

[7] V. L. Kharitonov, “Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations”, Differential'nye Uraveniya, vol. 14, pp. 1483-1485, 1978.

[8] Barmish. B. R., Hollot. C. V., Kraus. F., and Tempo. R., “Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators”, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 37, pp. 707-714, 1992.

[9] Bartlett. A. C., Hollot C. V., and Huang. L., “Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges”, Math. Control & Signals Sys., vol 1, pp. 61-71, 1988.

[10] S. P. Bhattacharyya et al 2, Robust Control: The Parametric Approach, Prentice-Hall, 1995.

[11] T. E. Djaferis, Robust Control Design: A Polynomial Approach, Kluwer Academic Pub., 1995.

[12] J. Ackerman, Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters, Springer-Verlag, 1993.

[13] Fu. M., “Computing the frequency response of linear systems with parametric perturbations”, System and Control Letters, vol. 15, pp. 45-52, 1990.

[14] Rosenbrock H. H, State-Space and Multivariable Theory, London : U. K. Nelson, 1970.

[15] W. K. Ho and Wen Xu, “Multivariable PID Controller Design Based on the Direct Nyquist Array Method”, Proc. of the American Control Con. Pennsylvania, pp. 3524- 3528, 1998.

[16] W. L. Luyben, “Getting More Information from Relay-Feedback Tests”. Ind. Eng. Chem. Res, vol. 40, pp. 4391-4402, 2001.

[17] C. T. Baab, J. C. Cockburn, H. A. Latchman & O. D. Crisalle, “Extension of the Nyquist Robust Margin to Systems with Nonconvex Value Sets”, AACC, pp. 1414- 1419, June 2001.

[18] M. Araki and O. I. Nwokah, “Bounds for Closed-Loop Transfer Function of Multivariable Systems”, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 20, pp. 666-670, 1975.

[19] W. K. Ho, O. P. Gn, E. B. Tay, & E. E. Ang, “Performance and Gain and Phase Marins of Well-Known PID Tuning Formulas”, IEEE Trans. on Control systems tech., vol. 4, pp. 473-477, 1996.

[20] Etfhymios. K. & Neil. M, “Extreme point solution to Diagonal dominance problem and Stability analysis of uncertain systems.”, Proc. of the American Control Con., pp. 3936-3940, 1997.

[21] A. C. Bartlett, et al. 1, “A necessary sufficient condition for schur invariance degeneralized stability

of polytopes polynomials,” IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 33, no. 6, pp. 575-583, 1988.

저 자 소 개



변 황 우(邊 黃 宇)

1965년 7월 8일생. 1991년 강원대학교 전기공학과 졸업. 1995년 건국대학교 전기공학과 졸업(석사). 1998년 한양대학교 전기공학과 박사과정 수료. 현재, 순천제일대학교 메카트로닉스과 조교수

Tel : 061-740-1354, Fax : 061-740-1335

E-mail : byunhwoo@suncheon.ac.kr



양 해 원 (梁 海 元)

1950년 3월 20일생, 1971년 서울대 공대전기공학과 졸업. 1973년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1982년 일본 Kyoto대학 전기공학과 졸업(박사). 1986~현재 한양대 전자컴퓨터공학부 교수. 1993년 미국 Yale 대학 방문교수.

Tel : 031-400-5162, Fax : 031-406-7769

E-mail : hwyang@email.hanyang.ac.kr