제한적인 동적 피드백 선형화 가능성의 효율적인 판단 방법

速報論文
54D-2-5

Efficient Method for Linearizability via Restricted Dynamic Feedback

朴 相 俊* · 方 鉉 鎭* · 李 鴻 奇†
(Sang Jun Park · Hyun Jin Bang · Hong-Gi Lee)

Abstract - The necessary and sufficient conditions for the linearization of the nonlinear control systems via restricted dynamic feed back have been found. These require checking with almost all indices from 0 to 2n-3. In this paper, we exploit the inherent structure of the system and find an efficient method to find linearizability of the system by reducing the range of the index to check. Our examples show the efficiency of our method.

Key Words : Nonlinear Control System, Dynamic Feedback, Linearization, Restricted DF, Number of Integrators

1. 서 론

최근 이산 비선형 시스템의 제한적인 동적 피드백을 이용한 선형화 문제의 필요충분조건 [2] 및 이에 관한 알고리즘 [3]이 발견되었다. 그러나 연속 비선형 시스템의 경우는 필요충분조건은 발견이 되었으나 [4] 이 조건들은 $0 \le d_i \le 2n-3$까지의 인덱스들 중 $d_{\min}=0$로 하는 모든 경우에 대하여 정적 선형화 여부를 고려하여야 하므로 선형화 가능 여부를 알기 위해서는 막대한 양의 계산이 필요하다. 본 논문에서는 시스템의 내재된 구조를 이용하여 고려하여야 할 인덱스의 범위를 줄임으로써 선형화 여부를 효율적으로 판단할 수 있는 방법을 제시한다.

다음과 같은 다 입력 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i\,, \quad x \in R^n \tag{1}$$

이 비선형 시스템에 다음과 같은 순수적분기를 사용하면

$$u_i = \begin{cases} w_i, & d_i = 0 \\ z_1^i, & d_i \ge 1 \end{cases} \tag{2a}$$

$$\frac{d}{dt} z^i_\ell = \begin{cases} z^i_{\ell+1}, & d_i \ge 1,\ 1 \le \ell \le d_i - 1 \\ w_i, & d_i \ge 1,\ \ell = d_i \end{cases} \tag{2b}$$

다음과 같은 연장된(prolongated) 시스템을 얻을 수 있다:

$$\dot{x}_E = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = F(x,z) + \sum_{i=1}^{m} G_i(x,z) w_i \tag{3}$$

$$F(x,z) = f(x) + \sum_{d_i \ge 1} z_1^i g_i(x,z) + \sum_{d_i \ge 2} \sum_{j=1}^{k_i - 1} z^i_{j+1} \frac{\partial}{\partial z^i_j}$$

$$G_i(x,z) = \begin{cases} g_i(x,z), & \text{if } d_i = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z^i_{d_i}}, & \text{if } d_i \ge 1 \end{cases}$$

만일 연장된 시스템 (3)이 정적 피드백 선형화가 가능한 순수 적분시스템 (2)가 존재하면 시스템 (1)은 인덱스를 $\{d_1, \cdots, d_m\}$으로 하여 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하다고 정의한다. 즉, 연장된 시스템 (3)의 디스트리뷰션

$$D_i = span\{ ad_F^\ell G_j(x) \mid 1 \le j \le m,\ 0 \le \ell \le i \},\ i \ge 0$$

들이 다음의 두 조건을 만족한다 [1,5]:

(i) $\dim (D_{n-1+\sum_{i=1}^m d_i}) = n + \sum_{i=1}^{m} d_i$

(ii) D_i, $i \ge 0$들이 대합적인 디스트리뷰션이다.

본 논문에서 사용하는 수학적 정의들은 참고문헌 [1]과 [5] 등에서 찾을 수 있다.

2. 선형화 가능성의 효율적인 판단 방법

연속 비선형 시스템의 제한적인 동적 피드백 선형화에 대한 기존의 연구 결과들은 다음과 같다.

정리 1 [4]: 만일 시스템 (1)이 인덱스를 $\{d_1, \cdots, d_m\}$으로 하는 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하고 $d_i \ge 1$, $1 \le i \le m$이면, 시스템 (1)은 인덱스를 $\{d_1', \cdots, d_m'\}$으로 하는 제한적인 동적 피드백 선형화도 가능하다. 여기서 $d_i' = d_i - 1$이다.

정리 2 [4]: 시스템 (1)에서 $n > m \ge 2$라고 하자. 만일 시

† 교신저자, 正會員 : 中央大 工大 電子電氣工學部 敎授 · 工博
E-mail : hglee@cau.ac.kr
* 學生會員 : 中央大 工大 電子電氣工學部 碩士課程
接受日字 : 2004年 12月 7日
最終完了 : 2005年 1月 7日

스템 (1)이 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하면, 이 시스템은 다음의 관계를 만족하는 인덱스로 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하다:

$$d_i \le 2n-3, \quad \text{for } 1 \le i \le m \tag{4a}$$

$$d_{\min} = 0 \tag{4b}$$

정리 1과 2에 의해, 조건 (4)를 만족하는 인덱스에 대하여 선형화가 가능하지 않다면 시스템 (1)은 제한적인 동적 피드백으로 선형화가 가능하지 않다는 필요충분조건을 얻는다. 즉, 조건 (4)를 만족하는 모든 인덱스를 고려해야 한다. 지금부터는 동적 피드백 선형화가 가능한 시스템이 어떤 조건을 만족할 때 인덱스가 만족하여야 할 추가 조건을 구함으로써 필요충분조건을 보다 효율적으로 점검하려 한다. 여기에서 서술하지 않은 정리들의 증명이나 다양한 예제들은 참고문헌 [6]에서 찾을 수 있다.

정리 3: 시스템 (1)이 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하다고 하자. 만일 $d_i=0$이고 $[g_j, g_i] \notin \Delta_{\gamma-1}$ $(\gamma \ge 1)$을 만족하면, $d_j \ge 2\gamma-1$이다.

정리 4: 시스템 (1)이 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하다고 하자. 만일 $d_i=0$이고

$$[g_j,\ ad_f^{\ell} g_i] \in \Delta_\ell, \quad \text{for } 0 \le \ell \le \alpha$$

$$[g_j,\ ad_f^{\alpha+1} g_i] \notin \Delta_{\gamma-1} \quad (\gamma \ge \alpha+2)$$

을 만족하면, $d_j \ge 2\gamma-(\alpha+2)$이다.

증명: 만일 $0 \le d_j \le \alpha+1$라면, $g_j \in D_{\alpha+1}$ 이고 $ad_F^{\alpha+1} g_i \in D_{\alpha+1}$ 이므로

$$[g_j, ad_F^{\alpha+1} g_i]\Big|_{z=0} = [g_j, ad_f^{\alpha+1} g_i] \notin \Delta_{\alpha+1}$$

$$\Delta_{\alpha+1} = sp\{ad_f^{\ell} g_k \mid 1 \le k \le m,\ 0 \le \ell \le \alpha+1\}$$

$$Q_{\alpha+1} = sp\{ad_F^{\ell} G_k \mid 1 \le k \le m,\ d_k \le \ell \le \alpha+1\}$$

$$Q_{\alpha+1}(x,0) \subset \Delta_{\alpha+1}(x)$$

이다. 따라서 D_0는 대합적인 디스트리뷰션이라는데 모순된다. 즉, $d_j \ge \alpha+2$이다. $\gamma=\alpha+2$인 경우에는 $2\gamma-(\alpha+2)=\alpha+2$가 되어 $d_j \ge 2\gamma-(\alpha+2)$이다.

지금부터 $\gamma \ge \alpha+3$이라고 가정하고 $d_j \ge 2\gamma-(\alpha+2)$임을 모순법으로 보인다. $\alpha+2 \le d_j \le 2\gamma-(\alpha+3)$라고 하자.

$$D_{\gamma-1} = sp\{ad_F^{\ell} G_k \mid 1 \le k \le m\ ,\ 0 \le \ell \le \gamma-1\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^j_{d_j-\ell}} \in D_{\gamma-1}\ , \text{ for } 0 \le \ell \le \gamma-1$$

이므로

$$\frac{\partial}{\partial z^j_{\ell}} \in D_{\gamma-1}\ , \text{ for } \gamma-\alpha-2 \le \ell \le d_j$$

이다. 한편 $ad_F^{\gamma-1} g_i \in D_{\gamma-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial z^j_{\gamma-\alpha-2}} \in D_{\gamma-1}$ 이고

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^j_{\gamma-\alpha-2}},\ ad_F^{\gamma-1} g_i\right] = [g_j, ad_f^{\alpha+1} g_i] \notin \Delta_{\gamma-1}$$

이므로 $D_{\gamma-1}$은 대합적이 안되어 모순이다. 따라서, $d_j \ge 2\gamma-(\alpha+2)$이다. □

정리 3의 증명은 정리 4의 증명에서 $\alpha=-1$이라고 하고 약간의 수정만 하면 된다. 만일 정리 4의 조건을 만족하는 γ가 존재하지 않으면 주어진 시스템은 정적 피드백으로 선형화가 가능하다.

정리 5: 시스템 (1)이 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하다고 하자. 만일 $d_i=0$ 이고 $\{g_i, ad_f g_i, \cdots, ad_f^{\bar{x}_i-1} g_i\}$ 들이 원점 근처에서 선형독립이고 $\{g_i, ad_f g_i, \cdots, ad_f^{\bar{x}_i} g_i\}$ 들은 원점근처에서 선형독립이 아니라면, $d_j \le \max(2\bar{x}_i-3,\ 0)$을 만족하는 $j(\ne i)$가 존재한다.

정리 6: 시스템 (1)이 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하다고 하자. 만일 $d_i=0$ 이고 디스트리뷰션 $sp\{g_i, ad_f g_i, \cdots, ad_f^{\tilde{x}_i} g_i\}$이 대합적이 아니라면, $d_j \le \tilde{x}_i$을 만족하는 $j(\ne i)$가 존재한다.

정리 7: 시스템 (1)이 제한적인 동적 피드백 선형화가 가능하다고 하자. 만일 $d_i=0$ 이고

$$[g_j, g_i] \notin sp\{ad_f^{\ell} g_k \mid k \ne j,\ 0 \le \ell \le \bar{x}_k-1\}$$

이면, $d_j \le 1$이다.

지금부터 예제들을 통하여 우리의 조건들이 제한적인 동적 피드백 선형화 가능성 여부를 판단하는데 효율적임을 보인다.

예제 1: 다음의 시스템을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} - u_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = f(x) + \sum_{i=1}^{2} u_i g_i(x)$$

간단한 계산에 의하여, $\overline{x_1} = \overline{x_2} = 4$임을 알 수 있다. 따라서, 정리 5에 의하여,

$$d_1 = 0 \ \Rightarrow\ d_2 \le 2\,\bar{x}_1 - 3 = 5$$

$$d_2 = 0 \ \Rightarrow\ d_1 \le 2\,\bar{x}_2 - 3 = 5$$

임을 알 수 있다. 또한,

$$[g_2, g_1] \notin \Delta_2\ , \quad [g_2, g_1] \in \Delta_3$$

이므로, 정리 3에 의하여,

$$d_1 = 0 \ \Rightarrow\ d_2 \ge 2\times 3 - 1 = 5$$

$$d_2 = 0 \ \Rightarrow\ d_1 \ge 2\times 3 - 1 = 5$$

따라서, 주어진 시스템이 인덱스를 $(d_1, d_2)=(0,5)$ 또는 $(d_1, d_2)=(5,0)$로 하여 제한된 동적 피드백 선형화가 가능하지 않다면 이 시스템은 제한된 동적 피드백 선형화가 불가능하다. 간단한 계산에 의해, 인덱스 $(d_1, d_2)=(0,5)$와 $(d_1, d_2)=(5,0)$ 둘 다 동작함을 알 수 있다.

예제 1에서 보듯이 이산 비선형 시스템의 경우와 달리 연속 시스템의 경우 선형화가 가능한 최소 인덱스가 유일

(unique)하지 않다.

예제 2: 다음의 시스템을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3+x_4^2 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = f(x) + \sum_{i=1}^{2} u_i g_i(x)$$

간단한 계산에 의하여, $\overline{x_1}=4$, $\overline{x_2}=1$임을 알 수 있다. 따라서, 정리 5에 의하여,

$$d_1=0 \Rightarrow d_2 \le 2\,\overline{x}_1-3=5$$

$$d_2=0 \Rightarrow d_1 \le \max(2\,\overline{x}_2-3,\ 0)=0$$

임을 알 수 있다. 또한,

$$[g_2, g_1] \in \Delta_0,\quad [g_2, ad_f g_1] \notin \Delta_2$$

$$[g_2, ad_f g_1] \in \Delta_3$$

이므로, 정리 4에 의하여,

$$d_1=0 \Rightarrow d_2 \ge 2\times 3-2=4$$

$$d_2=0 \Rightarrow d_1 \ge 2\times 3-2=4$$

한편, 정리 6에 의해, $\widetilde{x_1}=1$이므로

$$d_1=0 \Rightarrow d_2 \le \widetilde{x_1}=1$$

이다. 따라서, 주어진 시스템은 제한된 동적 피드백 선형화가 불가능하다.

3. 결 론

비선형 제어 시스템의 제한적인 동적 피드백 선형화 가능성을 점검하는데 있어, 기존의 방법에서는 점검해야 하는 인덱스의 범위가 넓다. 본 논문에서는 시스템의 내재된 구조를 이용하여 고려해야 하는 인덱스의 범위를 줄임으로써 더 효율적인 선형화 여부 판단 방법을 발견하였다. 동적 피드백 선형화에 대한 참고문헌 [4] 이전의 결과들은 참고문헌 [4]와 [5]의 참고문헌들에서 찾을 수 있다. 연속 시스템의 경우 선형화가 가능한 최소 인덱스가 유일(unique)하지 않기 때문에 (예제1 참조), 이산 시스템의 경우와 [3] 같은 최소 인덱스를 구하는 알고리즘을 얻는 데 현재로서는 어려움이 있다.

참 고 문 헌

[1] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, 3rd ed., Springer-Verlag London Ltd., 1995.

[2] H.G. Lee, A. Arapostathis, and S.I. Marcus, "Linearization of discrete-time systems via restricted dynamic feedback," IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.48, pp. 1646-1650, 2003.

[3] H. G. Lee, A. Arapostathis, and S. I. Marcus, "An algorithm for linearization of discrete-time systems via restricted dynamic feedback," Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control, pp.1362-1367, 2003.

[4] H. G. Lee, Y.-M. Kim, and H.-T. Jeon, "On the Linearization via a Restricted Class of Dynamic Feedback." IEEE Trans. on AC, Vol.45, pp. 1385-1391, 2000.

[5] 이홍기, 비선형 제어 시스템의 선형화, 중앙대학교 출판부, 2001.

[6] 박상준, 비선형 시스템의 동적 피드백 선형화 가능성의 효율적인 점검 방법, 중앙대 석사논문, 2004.