

논문 2005-42SC-1-2

# 시간지연과 입력포화를 갖는 T-S 퍼지 카오스 시스템의 동기화

(Synchronization of T-S Fuzzy Chaotic System  
with Time-Delay and Input Saturation)

김 재 훈\*, 신 현 석\*\*, 김 은 태\*\*\*, 박 민 용\*\*\*

(Jae-Hun Kim, Hyunseok Shin, Euntai Kim, and Mignon Park)

## 요 약

본 논문에서는 시간지연과 입력포화를 갖는 카오스 시스템에 대한 퍼지 모델 기반의 동기화 기법을 제안한다. 시간지연을 갖는 카오스 마스터 시스템과 슬레이브 시스템을 모델링하기 위해 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 모델을 이용한다. 특히 슬레이브 시스템은 제어 입력이 제한되는 입력포화 특성을 갖는다고 가정한다. 선형 오차 피드백과 병렬 분상 보상(PDC) 방법에 따라 퍼지 카오스 동기화 시스템을 설계하고 동기화 오차 시스템의 국소 안정도 조건을 해석한다. 신호 전송 채널에는 시간지연이 항상 존재하므로 채널 시간지연 또한 고려한다. 입력포화와 시간지연을 갖는 퍼지 동기화 시스템의 국소 안정도에 대한 충분 조건은 Lyapunov-Krasovskii 이론을 적용하여 선형 행렬 부등식(LMI) 문제의 해를 통해 얻어진다. 제안된 동기화 기법의 효과를 확인하기 위해서 모의 실험을 수행한다.

## Abstract

This paper presents a fuzzy model-based approach for synchronization of time-delay chaotic system with input saturation. Time-delay chaotic drive and response system is respectively represented by Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model. Specially, the response system contains input saturation. Using the unidirectional linear error feedback and the parallel distributed compensation (PDC) scheme, we design fuzzy chaotic synchronization system and analyze local stability for synchronization error dynamics. Since time-delay in the transmission channel always exists, we also take it into consideration. The sufficient condition for the local stability of the fuzzy synchronization system with input saturation and time-delay is derived by applying Lyapunov-Krasovskii theory and solving linear matrix inequalities (LMI's) problem. A numerical example is given to demonstrate the validity of the proposed approach.

**Keywords :** T-S fuzzy model, chaos synchronization, time-delay, input saturation, LMI

## I. 서 론

Carroll과 Pecora<sup>[1]</sup>의 연구이후에 카오스 시스템의 동기화 문제는 카오스의 가장 중요한 응용분야 중에 하나가 되었으며 많은 관심을 받아왔다. 특히 보안 통신과 같은 공학 응용 분야에서 폭넓게 연구되고 있다. 카오스

스 신호는 일반적으로 광대역이고 잡음과 비슷한 특성을 갖는다. 미리 예측이 어렵기 때문에 카오스 신호를 통해 정보를 효과적으로 은닉할 수 있으며 보안성이 매우 뛰어나다고 알려져 있다<sup>[2]</sup>. 송신측에서 카오스 신호를 통해 보낸 정보를 수신측에서 정확하게 복원하기 위해서는 수신측 카오스 시스템인 슬레이브 시스템이 송신측 카오스 시스템인 마스터 시스템과 동기화 되어야 하는 것이 필요하다. 따라서 카오스 동기화는 보안 통신 분야에서 반드시 해결해야 할 중요한 문제이다. 이에 더하여 시간지연을 갖는 간단한 1차원 카오스 시스템이라 할지라도 매우 복잡한 카오스 특성을 보인다는 것이

\* 학생회원, \*\*\* 정회원, 연세대학교 전기전자공학과  
(Dept. of Electrical and Electronic Eng., Yonsei University)

\*\* 정회원, LG전자 DM연구소

(DM Research Lab., LG Electronics Inc.)

접수일자: 2005년1월10일, 수정완료일: 2005년1월14일

알려져 있다<sup>[3-4]</sup>. 시간지연을 갖는 연속시간 카오스 시스템은 지연 미분 방정식으로 표현될 수 있으며 지연 미분 방정식은 무한 차원을 되고 많은 positive Lyapunov exponent를 소유하게 된다. 카오스 시스템이 많은 positive Lyapunov exponent를 갖는다는 것은 굉장히 복잡한 카오스 특성을 나타낸다고 할 수 있다. 시간지연을 갖는 카오스 시스템의 이러한 성질을 보안 통신에 이용한다면 강력한 보안성을 유지할 수 있다<sup>[5-7]</sup>.

일반적으로 시스템은 많은 형태의 비선형성을 가지고 있으며 입력포화는 다양한 비선형성 중에 하나로써 시스템에 영향을 미친다. 고이득 피드백을 통해 모델링 되지 않은 부분의 영향을 보상할 수 있으나 입력포화 현상으로 인해 시스템의 동특성을 자유롭게 변경하는데 제한을 받게 된다. 시스템을 해석하고 설계하는데 입력포화 현상을 고려하지 않는다면 안정성 손실 및 원하지 않은 시스템 진동을 유발할 수 있다<sup>[8]</sup>. 입력포화와 시간지연이 존재하는 선형 시스템의 안정화 기법에 대해서 몇가지 연구가 제안되었다<sup>[9-11]</sup>.

최근에 퍼지 로직은 비선형 제어 분야에서 많은 제어 이론가들로부터 굉장히 강력한 도구로써 관심을 받아왔다. 다양한 종류의 퍼지 기법들 중에 T-S 퍼지 시스템은 퍼지 제어 시스템의 설계와 해석 도구로 폭넓게 사용되었다<sup>[14]</sup>. 수학적 해석 측면에서의 간결성 때문에 T-S 퍼지 모델이 자주 사용된다. 이 퍼지 모델을 사용하면 각 상태 공간 영역에서 시스템의 국소 동특성은 선형 시스템 모델로 표현되고 전체적인 시스템의 모델은 각 선형 모델들의 퍼지 "blending"을 통해 얻어지게 된다. T-S 퍼지 모델은 비선형 함수 관계를 비교적 적은 수의 규칙을 통해 표현할 수 있다<sup>[15]</sup>. 카오스 제어와 동기화 문제에 대해 몇몇의 연구 결과에서 T-S 퍼지 제어 이론이 적용되었다<sup>[16-18]</sup>. [16]은 퍼지 피드백 제어를 적용하여 카오스 동기화와 카오스 모델 추적 제어를 제안하였으며 [17]과 [18]에서는 퍼지 관측기 기반의 카오스 동기화와 보안 통신 기법이 제안되었다. [19]는 시간지연이 존재하는 비선형 시스템에 대해 퍼지 관측기와 제어기를 보였으며 [20]에서는 시간지연을 미리 알 수 없는 비선형 시스템에 대해서 관측기 기반의 상태 피드백 제어 기법이 소개되었다.

본 논문에서는 채널 시간지연이 존재하는 환경하에서 시간지연과 입력포화를 갖는 카오스 시스템의 동기화에 대해 퍼지 모델 기반의 기법을 제안한다. 채널 시간지연이 존재하는 실제적인 경우에 슬레이브 시스템은 채널 시간지연 이전 시점에서 마스터 시스템과 동기화

되어야 할 필요가 있다. 따라서 카오스 동기화 오차는 이러한 점을 고려하여 다시 정의되어야 한다<sup>[21]</sup>. 본 논문에서는 점근적 카오스 동기화를 얻기 위해  $t-t_c$  시간에서의 마스터 시스템의 상태와  $t$  시간에서의 슬레이브 시스템의 상태 사이의 오차를 사용하여 제어 법칙을 구성한다. T-S 퍼지 모델을 사용하여 시간지연을 갖는 카오스 마스터 시스템과 슬레이브 시스템에 대한 모델을 표현하고 두 시스템의 관계에서 퍼지 오차 시스템을 유도하며 오차 시스템을 안정화하는 제어기를 설계한다. 포화 함수의 특성과 Lyapunov-Krasovskii 이론을 적용하여 동기화 오차 시스템이 국소 안정화 될 수 있음을 보여주는 충분 조건을 유도하며 이 안정도 조건을 LMI 문제 형태로 표현한다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. II장은 시간지연과 입력포화를 갖는 카오스 시스템의 퍼지 모델링에 대해 언급하고, III장에서는 퍼지 모델 기반의 카오스 동기화 기법, 즉 동기화 오차 시스템의 점근적 동기화를 얻는 제어기의 설계에 관해 설명한다. IV장에서는 제안된 동기화 기법의 타당성과 효과를 카오스 시스템의 모의 실험을 통해서 보인다. 마지막으로 V장에서는 본 연구에 대한 결과를 요약하여 정리한다.

## II. 문제 제기

시스템을 해석하고 설계하는데 있어서 실제 시스템을 표현하는 적절한 모델을 선정하는 것은 매우 중요한 일이다. 실제 플랜트의 모델을 나타내기 위해 Tagaki와 Sugeno가 제안한 퍼지 추론 방법을 사용한다<sup>[15]</sup>. T-S 퍼지 시스템은 일반적인 비선형 시스템을 효과적으로 표현할 수 있다. 카오스 동기화 측면에서 보면 마스터 시스템의 상태와 슬레이브 시스템의 상태가 서로 같아지도록 마스터 시스템과 슬레이브 시스템을 적절하게 설계하는 것이 목적이라 할 수 있다. 시간지연을 갖는 카오스 마스터 시스템을 다음과 같이 표현한다.

*Master System Rule i:*

If  $z_1$  is  $M_{i1}, \dots, z_p$  is  $M_{ip}$  Then

$$\dot{x} = A_i x + A_{di} x_\tau \quad i = 1, \dots, r \quad (1)$$

여기서  $x \in R^n$ 은 마스터 시스템의 측정가능한 상태변수,  $z = [z_1 \dots z_p]^T$ 는 측정가능한 전건부 변수들의 벡터,  $M_{ij}(j = 1, \dots, p)$ 는 퍼지 집합,  $r$ 은 퍼지 규칙의 개

수,  $A_i$ 와  $A_{di}$ 는 임의의 상수 행렬,  $x_r$ 는  $x(t-\tau(t))$ 를 나타낸다.  $\tau(t)$ 는 시간지연을 의미하며  $0 < \tau(t) \leq \tau_0$ 와 다음의 성질을 만족하는 시변 신호이다.

$$\dot{\tau}(t) \leq \beta < 1. \quad (2)$$

식 (1)의 초기 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - \tau_0, t_0] \quad (3)$$

여기서  $\phi$ 는  $[t_0 - \tau_0, t_0]$ 에 대해 연속함수이다.

퍼지 마스터 시스템은 싱글톤 퍼지화, 곱추론 엔진, 무계중심법 비퍼지화를 사용하여 다음과 같이 추론된다.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i x + A_{di} x_\tau] \quad (4)$$

여기서

$$h_i(z) = \frac{w_i(z)}{\sum_{i=1}^r w_i(z)}, \quad h_i(z) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i(z) = 1 \text{ 이고}$$

$$w_i(z) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z), \quad \sum_{i=1}^r w_i(z) > 0, \quad w_i(z) > 0. \quad (6)$$

퍼지 마스터 시스템 (1)에 기초하여 퍼지 슬레이브 시스템을 다음의 퍼지 규칙에 의해 표현한다.

*Slave System Rule i:*

If  $z_1$  is  $M_{i1}, \dots, z_p$  is  $M_{ip}$  Then

$$\dot{\hat{x}} = A_i \hat{x} + A_{di} \hat{x}_\tau + B_i \sigma(u) \quad i = 1, \dots, r \quad (7)$$

여기서  $\hat{x} \in R^n$ 은 슬레이브 시스템의 상태변수,  $u \in R^m$ 은 제어입력,  $B_i = [b_{i1} \dots b_{im}] \in R^{n \times m}$ 이다. 포화 함수  $\sigma: R^m \rightarrow R^m$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma(u) = [\sigma(u_1) \dots \sigma(u_m)]^T \quad (8)$$

여기서  $\sigma(u_i) = \text{sgn}(u_i) \min\{1, |u_i|\}$ 이다. 퍼지 슬레이브 시스템은 다음과 같이 추론된다.

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i \hat{x} + A_{di} \hat{x}_\tau + B_i \sigma(u)]. \quad (9)$$

채널 시간지연을  $\tau_c$ 로 나타내고 동기화 오차 신호를 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{x}(t) = x(t - \tau_c) - \hat{x}(t). \quad (10)$$

마스터 시스템과 슬레이브 시스템 사이의 동기화는  $t \rightarrow \infty$ 일때  $\tilde{x} \rightarrow 0$ 을 의미한다. 식 (4)에서  $t$ 를  $t - \tau_c$ 로 치환하면 퍼지 마스터 시스템은 다음 식으로 표현된다.

$$\dot{x}_{\tau_c} = \sum_{i=1}^r h_i(z_{\tau_c}) [A_i x_{\tau_c} + A_{di} x_{\tau_c + \tau_c}]. \quad (11)$$

식 (11)과 (9)로부터  $\tilde{x}$ 로 표현되는 오차 시스템은 다음 식으로 얻어진다.

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i \tilde{x} + A_{di} \tilde{x}_\tau - B_i \sigma(u)]. \quad (12)$$

동기화 오차 시스템 (12)를 안정화 하는 PDC 제어 규칙을 다음과 같이 설계한다.

*Control Rule j:*

If  $z_1$  is  $M_{j1}, \dots, z_p$  is  $M_{jp}$  Then

$$u_j(t) = -F_j [x(t - \tau_c) - \hat{x}(t)] \\ = -F_j \tilde{x}(t) \quad j = 1, \dots, r \quad (13)$$

여기서  $F_j = [f_{j1}^T \dots f_{jm}^T]^T \in R^{m \times n}$ 은 설계변수이며 제어가 이득 행렬이다. 추론된 제어 규칙은 다음 식으로 표현된다.

$$u = - \sum_{j=1}^r h_j(z) F_j \tilde{x}. \quad (14)$$

식 (14)를 (12)에 대입하면 제어기를 포함한 동기화 오차 시스템은 다음 식으로 얻어진다.

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i \tilde{x} + A_{di} \tilde{x}_\tau + B_i \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) F_j \tilde{x} \right)]. \quad (15)$$

다음 절에서 페루프 시스템 (15)의 안정 조건을 해석하고 동기화 오차 시스템을 안정화 하는 제어기(14)의 이득 행렬을 결정할 것이다.

### III. 퍼지 동기화

동기화 오차 시스템의 안정 조건을 해석하고 퍼지 제어를 설계하는 과정에서 사용되는 몇가지 유용한 정

의들과 보조정리를 소개한다.

행렬  $F_j$ 에 대해 다음을 정의한다.

$$L(F_j) := \{\tilde{x} \in R^n : |f_{jk}\tilde{x}| \leq 1, k=1, \dots, m\}. \quad (16)$$

만약  $F_j$ 가 제어기 이득 행렬이라면  $L(F_j)$ 는 상태 오차 영역 안에서 제어 입력이 포화되지 않는 영역을 의미한다.  $P \in R^{n \times n}$ 을 양한정 행렬이라 하면

$$E(P, \rho) = \{\tilde{x} \in R^n : \tilde{x}^T P \tilde{x} \leq \rho\} \quad (17)$$

는 타원을 나타낸다. Lyapunov 함수 후보를  $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x}$ 라 하고  $\forall \tilde{x} \in E(P, \rho) \setminus \{0\}$ 에 대해  $\dot{V}(\tilde{x}) < 0$ 을 만족하면, 타원  $E(P, \rho)$ 는 *contractively invariant*라고 말하고 분명히  $E(P, \rho)$ 가 *contractively invariant*이면 이 타원은 수렴영역내에 존재한다<sup>[12]</sup>.

**보조정리 1<sup>[22]</sup>**  $M$ 을 임의의  $n \times n$  행렬이라 하자. 임의의 상수  $\gamma > 0$ , 대칭 양한정 행렬  $N > 0$ ,  $\forall x, y \in R^n$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$2x^T M y \leq \gamma x^T M N^{-1} M^T x + \frac{1}{\gamma} y^T N y. \quad (18)$$

이제 페루프 동기화 오차 시스템을 국소 안정화하는 충분 조건을 유도한다.  $G_j = [g_{j1}^T \dots g_{jm}^T]^T \in R^{m \times n}$ 을 보조 이득 행렬이라 하고 두 행렬  $F_j, G_j$ 와 벡터  $\nu^j \in R^m$  그리고  $\forall j \in [1, \dots, r]$ 에 대해 다음과 같은 식을 정의한다.

$$M(\nu^j, F_j, G_j) = \begin{bmatrix} \nu_1^j f_{j1} + (1 - \nu_1^j) g_{j1} \\ \vdots \\ \nu_m^j f_{jm} + (1 - \nu_m^j) g_{jm} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

만약  $k=1, \dots, m$ 에 대해  $N = \{\nu^j \in R^m : \nu_k^j = 1 \text{ or } 0\}$ 이라면  $N$ 에는  $2^m$ 개의 원소가 존재한다.  $F_j$ 와  $G_j$ 를 가지고 새로운 행렬  $M(\nu^j, F_j, G_j)$ 를 구성하기 위해  $\nu^j \in N$ 을 이용할 것이다. 즉, 만약  $\nu_k^j = 1$ 이라면  $M(\nu^j, F_j, G_j)$ 의  $k$ 번째 열은  $f_{jk}$ 가 되고 만약  $\nu_k^j = 0$ 이라면  $M(\nu^j, F_j, G_j)$ 의  $k$ 번째 열은  $g_{jk}$ 가 된다.

동기화 오차 시스템 (12)와 제어기 (14)를 포함하는 전체 페루프 시스템이 국소 안정하다는 조건을 다음의 정리를 통해 보인다.

**정리 1** 타원  $E(P, \rho)$ 가 주어지고,  $\forall i, j \in [1, \dots, r]$ ,  $\forall \nu^j \in N$ ,  $E(P, \rho) \subset L(G_j)$ 에 대해 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬  $P > 0 \in R^{n \times n}$ ,  $\Gamma > 0 \in R^{n \times n}$ ,  $F_j, G_j \in R^{m \times n}$ 가 존재한다면  $E(P, \rho)$ 는 *contractively invariant*이다.

$$\begin{aligned} & (A_i + B_i M(\nu^j, F_j, G_j))^T P \\ & + P(A_i + B_i M(\nu^j, F_j, G_j)) \\ & + P A_{di} \Gamma^{-1} A_{di}^T P + (1 - \beta)^{-1} \Gamma < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

증명: Lyapunov-Krasovskii 함수를 다음과 같이 선택한다.

$$V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x} + \frac{1}{1 - \beta} \int_{t-\tau}^t \tilde{x}^T(\sigma) \Gamma \tilde{x}(\sigma) d\sigma.$$

$V(\tilde{x})$ 의 시간미분은 다음 식으로 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^r h_i(z) \{ \tilde{x}^T (A_i^T P + P A_i) \tilde{x} \} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^r h_i(z) \{ \tilde{x}^T P A_{di} \tilde{x}_\tau \} \\ &+ 2 \tilde{x}^T P \sum_{i=1}^r h_i(z) \left\{ \sum_{k=1}^m b_{ik} \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{1 - \beta} \{ \tilde{x}^T \Gamma \tilde{x} - (1 - \dot{\tau}) \tilde{x}^T \Gamma \tilde{x}_\tau \}. \end{aligned}$$

각 항  $2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right)$ 에 대해

1. 만약  $\tilde{x}^T P b_{ik} \geq 0$ 이고  $\sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \leq -1$ 이라면

$$\begin{aligned} & 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right) \\ &= -2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \leq 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} g_{jk} \tilde{x}. \end{aligned}$$

여기서  $\forall \tilde{x} \in E(P, \rho)$ 에 대해  $-1 \leq g_{jk} \tilde{x}$ 이다.

2. 만약  $\tilde{x}^T P b_{ik} \geq 0$ 이고  $\sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \geq -1$ 이라면

$$\begin{aligned} & \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right) \leq \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \text{ 이고} \\ & 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right) \\ & \leq 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x}. \end{aligned}$$

3. 만약  $\tilde{x}^T P b_{ik} \leq 0$  이고  $\sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \geq 1$  이라면

$$2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right) = 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \leq 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} g_{jk} \tilde{x}.$$

여기서  $\forall \tilde{x} \in E(P, \rho)$ 에 대하여  $1 \geq g_{jk} \tilde{x}$ 이다.

4. 만약  $\tilde{x}^T P b_{ik} \leq 0$  이고  $\tilde{x}^T P b_{ik} \leq 0$  이라면

$$\sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right) \geq \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \text{ 이고}$$

$$2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right) \leq 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x}.$$

위의 네 가지 경우를 고려하면  $\forall i \in [1, r], \forall k \in [1, m], \forall \tilde{x} \in E(P, \rho)$ 에 대해서 다음의 식을 얻는다.

$$2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sigma \left( \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right) \leq \max \left\{ 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sum_{j=1}^r h_j(z) g_{jk} \tilde{x}, 2h_i(z) \tilde{x}^T P b_{ik} \sum_{j=1}^r h_j(z) f_{jk} \tilde{x} \right\}.$$

$\forall \tilde{x} \in E(P, \rho)$ 에 대하여 벡터  $\nu_k^j$ 의 적절한 선택과 (19)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^r h_i(z) \{ \tilde{x}^T (A_i^T P + P A_i) \tilde{x} \} \\ & + 2 \sum_{i=1}^r h_i(z) \{ \tilde{x}^T P A_{di}^T \tilde{x}_\tau \} \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \{ 2 \tilde{x}^T P B_i M(\nu^j, F_j, G_j) \tilde{x} \} \\ & + \frac{1}{1-\beta} \{ \tilde{x}^T \Gamma \tilde{x} - (1-\tau) \tilde{x}^T \Gamma \tilde{x}_\tau \}. \end{aligned}$$

보조정리 1과 시간지연의 미분이 (2)와 같이 유계된다는 사실을 위에 식에 적용하고 (5)를 이용하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} V \leq & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \\ & \{ \tilde{x}^T ((A_i + B_i M(\nu^j, F_j, G_j))^T P \\ & + P(A_i + B_i M(\nu^j, F_j, G_j)) \\ & + P A_{di} \Gamma^{-1} A_{di}^T P + (1-\beta)^{-1} \Gamma) \tilde{x} \}. \end{aligned}$$

식 (20)이 만족하면 모든  $\tilde{x} \in E(P, \rho) \setminus \{0\}$ 에 대해  $\dot{V}(\tilde{x}) < 0$ 이 되며 Lyapunov-Krasovskii 이론으로부터 동기화 오차 시스템은 모든  $\tilde{x}(t) \in E(P, \rho) \setminus \{0\}$ 에 대해 점근적으로 안정하다. ■

정리 1은 페루프 동기화 오차 시스템의 안정도에 대한 충분 조건을 언급하고 있으며 이를 통해 제어기 이득 행렬을 얻을 수 있다. 식 (20)을 만족하면서 수렴영역을 최대화하도록 하는 해를 구하기 위한 최적화 문제는 다음과 같이 정리될 수 있다. 임의의  $R > 0$ 의 조건에 대해서 주어진  $X_R = E(R, 1) \subset R^n$ 을 타원형태의 유계된 볼록 집합이라 하면 최대 영역을 찾는 문제는 주어진  $X_R$ 과 타원  $E(P, \rho)$ 에 대해서  $\alpha X_R \subset E(P, \rho)$ 를 만족하는 최대 스칼라 상수  $\alpha$ 를 찾는 문제로 생각할 수 있다. 따라서 수렴영역을 최대화하고자 하는 최적화 문제는 다음과 같이 요약된다.

$P > 0, \rho, G_j$ 에 대해

sup  $\alpha$  s.t.

1.  $\forall \nu^j \in N, \forall i \in [1, r], \forall j \in [1, r]$ 에 대하여

$$\begin{aligned} & (A_i + B_i M(\nu^j, F_j, G_j))^T P \\ & + P(A_i + B_i M(\nu^j, F_j, G_j)) \\ & + P A_{di} \Gamma^{-1} A_{di}^T P + (1-\beta)^{-1} \Gamma < 0. \end{aligned}$$

2.  $E(P, \rho) \subset L(G_j)$ .

3.  $\alpha X_R \subset E(P, \rho)$ .

여기에서  $\rho$ 를 1로 놓아도 일반성을 잃지 않는다.

$Q = P^{-1}, \gamma = \alpha^{-1}, \bar{\Gamma} = \Gamma^{-1}, S^j = M(\nu^j, F_j, G_j) Q$ 라 놓고  $s_i^j$ 는  $S^j$ 의  $i$ 번째 열을 나타내며  $s_i^G$ 는  $G_j Q$ 의  $i$ 번째 열을 나타낸다고 하면 Schur complement와 주어진  $R$ 에 대해 [13]에서 사용된 방법을 이용하면 위의 최적화 문제를 다음과 같이 LMI 문제로 변환할 수 있다.

$Q > 0, \gamma, S^j$ 에 대해

inf  $\gamma$  s.t.

1.  $\forall \nu^j \in N, \forall i \in [1, r], \forall j \in [1, r]$ 에 대하여

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ij} + A_{di}\bar{\Gamma}A_{di}^T & Q \\ Q & -(1-\beta)\Gamma \end{bmatrix} < 0$$

여기서  $\Psi_{ij} = QA_i^T + A_iQ + S^T B_i^T + B_i S^j$

2.  $\forall j \in [1, r], \forall k \in [1, m]$ 에 대하여

$$\begin{bmatrix} 1 & s_k^G \\ s_k^G & Q \end{bmatrix} \geq 0.$$

3.  $\begin{bmatrix} \gamma R & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0.$

#### IV. 모의 실험

시간지연과 입력포화를 갖는 카오스 시스템의 동기화에 대해 제안된 기법의 타당성을 검증하고 실제적인 적용이 가능함을 보이기 위해 모의 실험의 예를 제시한다. 예로 사용할 카오스 시스템은 다음과 같이 표현된다<sup>[23]</sup>.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 0.0755x_2 - 0.0583x_1 x_2 + 0.25x_1(t - \tau) \end{aligned}$$

두 개의 퍼지 집합을 정의하면 퍼지 마스터 시스템과 슬레이브 시스템은 다음 식으로 얻어진다.

If  $x_1$  is  $M_i$  Then

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_i \hat{x} + A_{di} \hat{x}_\tau \\ \dot{\hat{x}} &= A_i \hat{x} + A_{di} \hat{x}_\tau + B_{i\sigma}(u) \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

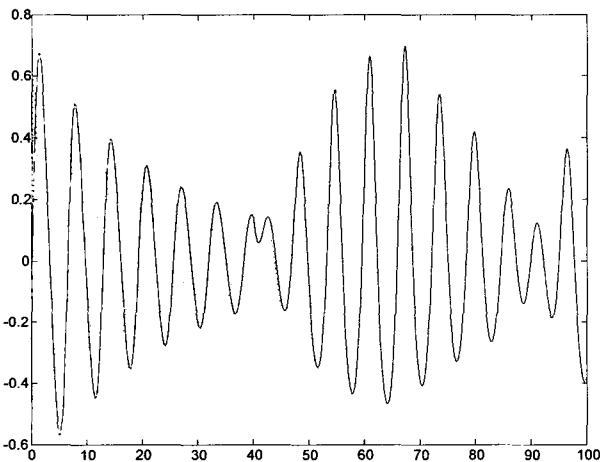


그림 1. 상태 경로  $x_1(t - \tau_c)$  (점선) 과  $\hat{x}_1(t)$  (실선)  
Fig. 1. State trajectory  $x_1(t - \tau_c)$  (dotted) and  $\hat{x}_1(t)$  (solid).

여기서

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1.9 \\ -1 & -0.1279 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -1 & -0.023 \end{bmatrix}, \\ A_{d1} &= A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ \tau &= 40 \end{aligned}$$

이고 퍼지 집합의 멤버쉽 함수는  $M_1(x_1) = (1/2)(1 + (x_1/d))$ ,  $M_2(x_1) = (1/2)(1 - (x_1/d))$ 이며  $d = 0.9$ 이다. 제안된 설계 기법에 따라 다음과 같은 LMI의 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 2.4214 & -0.968 \\ -0.968 & 2.5814 \end{bmatrix}, \\ \bar{\Gamma} &= \begin{bmatrix} 38.9915 & -13.4437 \\ -13.4437 & 164.376 \end{bmatrix}, \\ F_1 &= [-7.8367 \quad -18.2877], \\ F_2 &= [-6.7041 \quad -17.9106] \end{aligned}$$

이고  $\alpha = 1.1792$ 이다.

마스터 시스템의 초기 조건  $x(0)$ 은 슬레이브 시스템의 초기 조건  $\hat{x}(0)$ 과 다른 값을 가지며 슬레이브 시스템의 제어는  $t \geq 40$  이후부터 행해진다. 퍼지 마스터 시스템과 슬레이브 시스템의 경로를 그림 1과 2에 보인다. 그림 3과 4는 채널 시간지연  $\tau_c$ 가 존재하는 상황에서  $t \rightarrow \infty$ 일 때  $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ 이 되는 동기화 결과를 보여준다. 퍼지 마스터 시스템과 슬레이브 시스템은  $t$ 에서 동기화 되지 않고  $t - \tau_c$ 에서 점근적 동기화 되는 것을 알 수 있다. 포화된 제어 입력을 그림 5에 보인다.

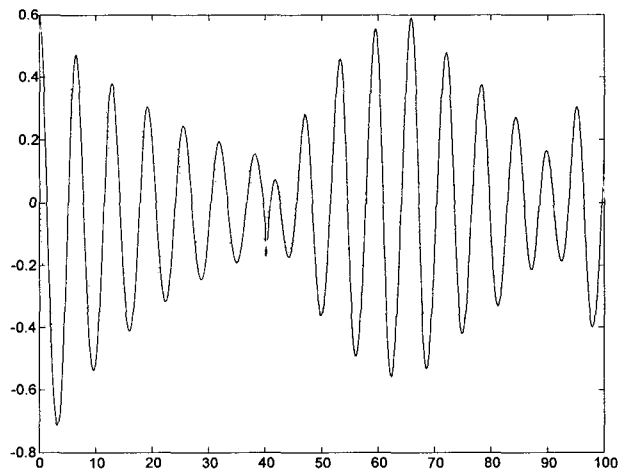


그림 2. 상태 경로  $x_2(t - \tau_c)$  (점선) 과  $\hat{x}_2(t)$  (실선)  
Fig. 2. State trajectory  $x_2(t - \tau_c)$  (dotted) and  $\hat{x}_2(t)$  (solid).

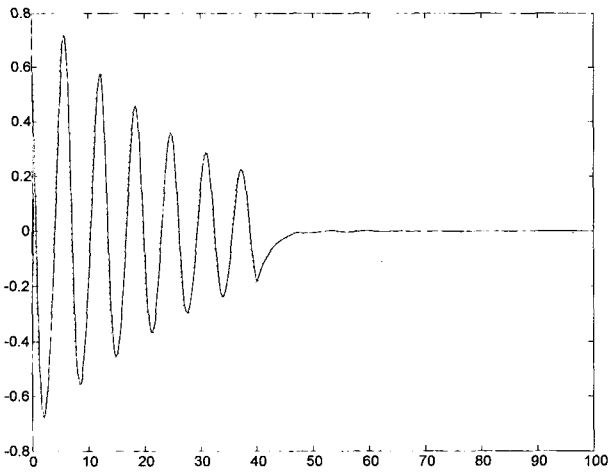


그림 3. 동기화 오차  $x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  (점선) 과  $x_1(t - \tau_c) - \hat{x}_1(t)$ (실선)

Fig. 3. Synchronization error  $x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  (dotted) and  $x_1(t - \tau_c) - \hat{x}_1(t)$  (solid).

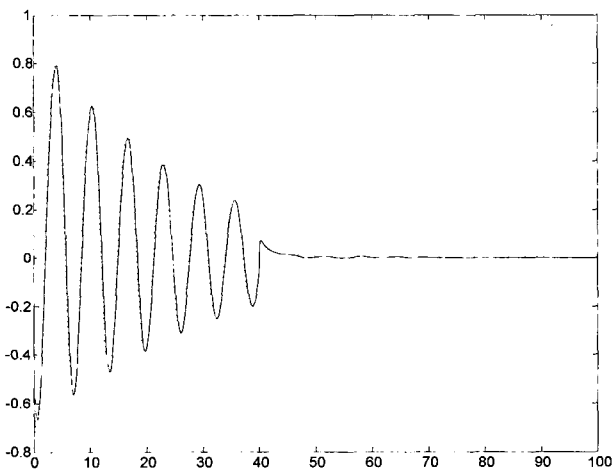


그림 4. 동기화 오차  $x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  (점선) 과  $x_2(t - \tau_c) - \hat{x}_2(t)$ (실선)

Fig. 4. Synchronization error  $x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  (dotted) and  $x_2(t - \tau_c) - \hat{x}_2(t)$  (solid).

### V. 결 론

본 논문에서는 시간지연과 입력포화를 갖는 카오스 시스템의 동기화를 얻기 위해 퍼지 마스터 시스템과 슬레이브 시스템을 포함하는 퍼지 모델 기반의 설계 기법을 제안하였다. 카오스 시스템의 모델링 방법으로 T-S 퍼지 모델을 채택하였으며 마스터 시스템과 슬레이브 시스템 사이의 상태 오차와 병렬 분산 보상 제어 방법을 이용하여 카오스 동기화 시스템을 설계하였다. 전송

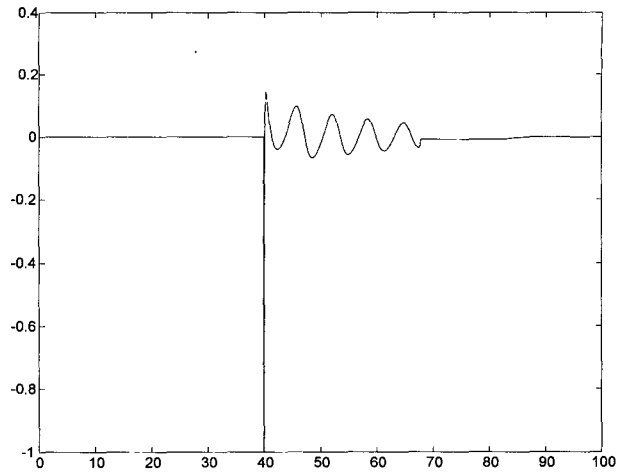


그림 5. 포화 제어 입력  $\sigma(u(t))$

Fig. 5. Saturated control input  $\sigma(u(t))$ .

채널에서의 시간지연을 고려하였으며 동기화 오차 시스템의 극소 안정도 조건을 유도하였고 수치적으로 해를 구할 수 있는 LMI 문제로 재구성하였다. 모의 실험을 통해 제안된 기법의 점근적 안정화 특성을 확인하였다.

### 참 고 문 헌

- [1] T. L. Carroll and L. M. Pecora, "Synchronizing chaotic circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 38, pp. 453-456, 1991.
- [2] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim and S. H. Strogatz, "Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications," *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 40, pp. 626-633, 1993.
- [3] J. D. Farmer, "Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical systems," *Physica D*, vol. 4, no. 2, pp. 366-393, 1982.
- [4] H. Lu and Z. He, "Chaotic behaviors in first-order autonomous continuous-time systems with delay," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 43, no. 8, pp. 700-702, 1996.
- [5] B. Mensour and A. Longtin, "Synchronization of delay-differential equations with application to private communication," *Phys. Lett. A*, vol. 244, no. 1, pp. 59-70, 1998.
- [6] A. Tamasevicius, A. Cenys, A. Namajunas and G. Mykolaitis, "Synchronizing hyperchaos in infinite-dimensional systems," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 9, no. 8, pp. 1403-1408, 1998.
- [7] R. He and P. G. Vaidya, "Time delayed chaotic systems and their synchronization," *Phys. Rev E*, vol. 59, no. 4, pp. 4048-4051, 1999.
- [8] E. N. Sanchez and L. J. Ricalde, "Chaos control

- and synchronization, with input saturation, via recurrent neural networks," *Neural Networks*, vol. 16, pp. 711-717, 2003.
- [9] S. Tarbouriech and J. M. G. da Silva, Jr, "Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMI's," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, no. 1, pp. 105-111, 2000.
- [10] Y. Y. Cao, Z. Lin and T. Hu, "Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 49, no. 2, pp. 233-240, 2002.
- [11] S. -I. Niculescu, J. -M. Dion and L. Dugard, "Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 5, pp. 742-747, 1996.
- [12] T. Hu, Z. Lin and B. M. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Automatica*, vol. 38, no. 2, pp. 351-359, 2002.
- [13] H. Hindi and S. Boyd, "Analysis of linear systems with saturation using convex optimization," *Proc. of the 37th Conf. on Deci. Contr.*, pp. 903-908, 1998.
- [14] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Syst.*, vol. 45, no. 2, pp. 135-156, 1992.
- [15] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [16] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "A unified approach to controlling chaos via an LMI-based fuzzy control system design," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 45, pp. 1021-1040, 1998.
- [17] K. -Y. Lian, C. -S. Chiu, T. -S. Chiang and P. Liu, "LMI-based fuzzy chaotic synchronization and communications," *IEEE Tans. Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 4, pp. 539-553, 2001.
- [18] K. -Y. Lian, T. -S. Chiang, C. -S. Chiu and P. Liu, "Synthesis of fuzzy model-based designs to synchronization and secure communications for chaotic systems," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, vol. 31, pp. 66-83, 2001.
- [19] Y. Y. Cao and P. M. Frank, "Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 200-211, 2000.
- [20] H. Shin, E. Kim and M. Park, "The state feedback control based on fuzzy observer for T-S fuzzy systems with unknown time-delay," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E86-A, no. 9, pp. 2333-2339, 2003.
- [21] G. -P. Jiang, W. X. Zheng and G. Chen, "Global chaos synchronization with channel time-delay," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 20, pp. 267-275, 2004.
- [22] Z. Yi and P. A. Heng, "Stability of fuzzy control systems with bounded uncertain delays," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 10, no. 1, pp. 92-97, 2002.
- [23] M. Bestehorn, E. V. Grigorieva, H. Haken and S. A. Kaschenko, "Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback," *Physica D*, vol. 145, pp. 110-129, 2000.



저 자 소 개



김 재 훈(학생회원)  
 1998년 홍익대학교 전기제어 공학과 학사졸업.  
 2000년 연세대학교 전기컴퓨터 공학과 석사 졸업.  
 2000년~현재 연세대학교 전기 전자공학과 박사과정.

<주관심분야: 퍼지 제어, 카오스, 로봇공학>



신 현 석(정회원)  
 1996년 연세대학교 전자공학과 학사 졸업.  
 1998년 연세대학교 전자공학과 석사 졸업.  
 2003년 연세대학교 전자공학과 박사 졸업.

<주관심분야: 지능제어, 로봇공학, ODD>



김 은 태(정회원)  
 1992년 연세대학교 전자공학과 학사 졸업(전체수석).  
 1994년 연세대학교 전자공학과 석사 졸업.  
 1999년 연세대학교 전자공학과 박사 졸업.

1999년 3월~2002년 2월 국립한경대학교 제어계측공학과 조교수.

2002년 3월~현재 연세대학교 전기전자공학부 조교수.

2003년 University of Alberta, visiting researcher

1998년~현재 IEEE TFS, IEEE SMC, IEEE CAS, FSS등에서 심의위원 활동 중.

2003년 대한전자공학회 해동상 수상.

<주관심분야: Computational intelligence, 지능형 로봇, 지능형홈네트워크>



박 민 용(정회원)  
 1973년 연세대학교 전자공학과 학사 졸업.  
 1977년 연세대학교 전자공학과 석사 졸업.  
 1982년 일본동경대학 박사 졸업.  
 1982년~현재 연세대학교 전기전자공학부 교수

<주관심분야: 퍼지 제어, 지능형 로봇>

