

논문 2005-42CI-1-3

그래프 임베딩과 관련된 이항 트리에서의 Q -에지 번호매김에 관한 연구

(The Research of Q -edge Labeling on Binomial Trees related to the Graph Embedding)

김 용 석*

(Yong-Seok Kim)

요 약

본 논문에서는 그래프 임베딩 문제와 관련된 이항트리에서의 Q -에지 번호매김 방법을 제안한다. 이러한 연구결과는 신뢰성이 높은 통신망을 설계하는 최적화 문제인 “ n 개의 노드와 e 개의 에지를 가지면서 연결도가 최대인 그래프를 구성하라.”를 해결한 Harary 그래프의 일반화인 원형군 그래프(circulant graph)의 점프열로 Q -에지번호들을 이용하면 연결도가 최대인 신뢰성이 높은 새로운 상호연결망(interconnection networks)의 위상을 설계할 수 있다. 그리고 이러한 위상은 이항트리를 스페닝 트리로 가지므로 최적방송이 가능하다.

Abstract

In this paper, we propose the Q -edge labeling method related to the graph embedding problem in binomial trees. This result is able to design a new reliable interconnection networks with maximum connectivity using Q -edge labels as jump sequence of circulant graph. The circulant graph is a generalization of Harary graph which is a solution of the optimal problem to design a maximum connectivity graph consists of n vertices and e edges. And this topology has optimal broadcasting because of having binomial trees as spanning tree.

Keywords: circulant graph, graph embedding, binomial tree, edge labeling, optimal broadcasting tree.

I. 서 론

대규모 계산수행을 필요로 하는 문제들의 대부분은 동시에 처리될 수 있는 더 작은 문제들로 분할될 수 있으며 분할된 문제들은 병렬처리 컴퓨터의 각 프로세서에서 병렬적으로 수행된다. 이러한 병렬 알고리즘의 시간 복잡도는 계산시간과 통신시간으로 나눌 수 있다. 계산시간은 각 프로세서에서 순차 프로그램을 수행하는데 걸리는 시간이며 통신시간은 프로세서들 사이에 데이터를 통신하는데 걸리는 시간이다. 프로세서의 성능

이 증가하면서, 계산시간보다는 통신시간이 병렬 알고리즘에 미치는 영향이 더욱 커져 가고 있다. 효율적인 통신방법은 시스템의 고성능을 얻기 위해 매우 중요하다^[1].

방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 한 프로세서에 있는 메시지를 네트워크에 있는 다른 모든 프로세서들에게 보내는 과정을 말한다. 임의의 노드 v 에서 방송시간은 $b(v)$ 로 표기하고, 이는 노드 v 에서 시작한 방송을 완료하는데 필요한 최소 단위시간을 말한다. 각 단위시간 동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 두 배씩 증가하므로, N 개의 노드를 가지는 그래프 G 의 임의의 노드

정회원, 서남대학교, 컴퓨터 정보통신학과
(Dept. of Computer and Information
Communications, Chonbuk Seonam University)
접수일자: 2004년9월11일, 수정완료일: 2005년1월12일

v 에서의 방송시간 $b(v)$ 은 $\lceil \log_2 N \rceil$ 보다 크거나 같다. N 개의 노드를 가지는 그래프 G 의 임의의 노드 v 에서의 방송시간 $b(v)$ 가 $\lceil \log_2 N \rceil$ 이면 이는 최소방송시간이며 최소방송시간을 가지는 방송을 최적 방송이라 한다. 또한 루트에서 시작하여 최적방송이 가능한 트리를 **최적방송트리**(optimal broadcast tree)라 한다^[2].

그래프 H 가 G 의 모든 노드를 포함하고 G 의 에지들로만 구성된 그래프이면 ($V(H)=V(G)$, $E(H)\subseteq E(G)$) 그래프 H 는 그래프 G 의 스패닝 부그래프이다. 만약 위 조건을 만족하는 H 가 트리이면 그래프 G 의 스패닝 트리라 한다. 그래프 G 에 속한 어떤 노드(에지)에서도 G 가 똑같이 보일 때 G 는 노드(에지) 대칭적이라 한다. 즉 그래프의 임의의 두 노드(에지) v 와 w 에 대해서 v 를 w 에 대응시키는 자기동형(automorphism)이 존재하면 그 그래프는 노드(에지) 대칭적이다. 여기서 어떤 그래프의 자기동형은 그래프 자신으로의 동형이성(isomorphism)이다. 동형이성은 두 그래프 G 와 G^* 의 노드집합 사이의 전단사 사상 h 로서, 이는 (v_i, v_j) 가 G 의 에지이면 $(h(v_i), h(v_j))$ 도 G^* 의 에지가 되는 성질을 갖고 있다. 이 경우 두 그래프 G 와 G^* 은 서로 동형적(isomorphic)이라 한다. 만약 T 가 노드 대칭적인 그래프 G 의 스패닝 트리라 한다면, 그래프 G 의 어떠한 노드도 T 의 루트가 되도록 스패닝 트리를 구성할 수 있다^[3-6].

만약 노드 대칭적인 상호 연결망이 스패닝 부 그래프로 이항트리를 갖는다면 그 상호연결망의 어떠한 노드도 이항트리의 루트가 되도록 스패닝 트리를 구성할 수 있다. 즉 그 상호연결망의 어떠한 노드에서도 스패닝 트리인 이항트리의 구조를 통해 최소시간에 방송을 완료할 수 있다. 2^k 개의 노드를 가진 최적방송트리는 이항트리이다^[7]. 이항트리는 하이퍼 큐브와 같은 다양한 시스템에서 병렬 응용을 위해서 가장 자주 사용되는 스패닝 트리 구조중의 하나이다. 또한 병렬 분할정복 알고리즘의 이상적인 계산구조로 평가되고^[8] 전위계산에 사용될 뿐만 아니라^[9] 데이터 방송에 꼽넓게 사용되어 진다.

그래프 G 를 그래프 H 에 임베딩(embeding)한다는 것은 G 의 정점들을 H 의 정점들로 일대일 대응시키고, G 의 각 에지 (v, w) 에 대해 H 에서 v 가 대응된 정점

과 w 가 대응된 정점 사이의 하나의 경로를 대응시킴을 말한다. 임베딩의 비용(cost)을 표현하는 척도로는 연장률(dilation), 집중률(congestion) 그리고 확장률(expansion) 등이 있다. 연장률은 G 의 각 에지가 대응된 H 의 경로들 중에서 가장 긴 것의 길이이고, 집중률은 H 의 에지중 가장 많은 경로가 지나가는 에지에 있어서의 경로수를 말한다. 그리고 확장률은 H 의 크기를 G 의 크기로 나눈값을 나타낸다^[10].

그래프 임베딩문제는 병렬 컴퓨터 네트워크들 사이에 있어서의 시뮬레이션 그리고 주어진 자료구조를 다른 자료구조에 시뮬레이션 하는 등의 응용분야에서 제기되는 문제이다. 일반적인 그래프들 사이의 임베딩 문제는 매우 어려운 문제이고 주어진 제약 조건을 만족하도록 그래프의 정점이나 에지에 번호를 할당하는 문제로 표현한 것이다. 그리고 임베딩 방법들은 임베딩하려는 그래프의 특성에 따라 여러 가지 기법들을 동원하고 있는데 그중 번호매김에 의한 방법도 하나의 전형적인 방법으로 분류되고 있다. 또한 여러 가지 임베딩 문제를 그 문제의 특성을 잘 표현하는 간단한 번호매김 문제로 만들어 해결할 수 있다. 현재까지는 대부분 응용분야와 관련되어 잘 알려진 특별한 그래프들 사이의 임베딩이 주로 다루어져 왔다. 임베딩문제가 다루어진 그래프들로는 하이퍼큐브, 메쉬, 이진트리, 이항트리 등 병렬 컴퓨터의 위상으로 제시된 그래프들과 자료구조에서 자주 쓰이는 그래프 등이 있다. 예를 들면 하이퍼큐브와 재귀 원형군에 대한 임베딩 문제가 있고 완전이진 트리와 이항 트리는 4-에지 번호매김이 가능함이 밝혀졌다^[11].

본 논문에서는 그래프 임베딩 문제와 관련된 Q-에지 번호 매김방법을 제안한다. 즉 최적 방송 트리인 이항 트리에 Q-에지번호 매김을 하여 생긴 에지번호들을 대칭적이면서 최대 연결도를 갖는 상호 연결망의 일종인 원형군 그래프의 점프열로 사용하면 스패닝 트리로 이항트리를 갖는 새로운 상호 연결망을 설계할 수 있다. 그래프 G 에 대한 Q-에지번호 매김은 G 의 정점에 1에서 정점의 개수까지의 서로 다른 정수를 부여하는데 에지번호가 모두 $\frac{4^n - 1}{3}$, $n \geq 1$ 이 된다는 조건을 만족하는 것이다. 여기에 에지번호는 에지에 인접한 두 정점에 할당된 정수의 차로 정의된다. 원형군 그래프와 Q-에지번호 매김의 정의로부터 Q-에지번호 매김이 가능한 그래프는 원형군 그래프의 부 그래프임을 쉽게 알 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장의 관련 연구에서는 원형군 그래프에 대한 임베딩과 d -에지번호 매김에 대해서 III장에서는 Q -에지번호 매김 방법을 제시하고 마지막으로 제 IV장에서는 결론 및 향후 연구 방향을 살펴본다..

II. 관련 연구

1. 원형군 그래프에 대한 임베딩

원형군 그래프는 1962년 Harary^[12]가 최초로 제시한 것으로 알려져 있다. 그는 그 당시 신뢰성이 높은 통신망을 설계하는 최적화 문제인 “ n 개의 노드와 e 개의 에지를 가지면서 연결도가 최대인 그래프를 구성하라” 하는 문제를 원형군 그래프에 속하는 그래프를 제시함으로서 해결하였는데, 그가 제시한 그래프를 Harary 그래프라고 부른다. 원형군 그래프는 상당히 대칭적인 구조를 가지고 있어서 여러 분야에서 많이 응용되고 있다. $C_N(j_1, j_2, \dots, j_k)$ 로 표기하는 원형군 그래프는 N 개의 노드 $\{0, 1, \dots, N-1\}$ 를 가지고 있으며, 임의의 두 노드 v, w 에 대해서 $v + j_i \equiv w \pmod{N}$, $1 \leq i \leq k$ 를 만족하는 j_i 가 존재할 때 v, w 를 잇는 에지가 있다. 이때 각각의 j_i 를 점프라고 부른다. 원형군 그래프는 각 노드의 분지수가 같은 정규 그래프이다. 그리고 원형군 그래프의 일종인 재귀원형군 $G(N, d)$ 는 0에서 $N-1$ 까지의 정수로 표현되는 N 개의 정점을 가지고 있으며 두 정점 v 와 w 사이에서 $v + d^i \equiv w \pmod{N}$ 인 i ($0 \leq i \leq \lceil \log_d N \rceil - 1$) 가 존재하면 에지가 있는 그래프이다. 재귀원형군은 최근에 새로운 병렬컴퓨터의 위상으로 제시된 것이다. 재귀원형군 중 $G(2^m, 4)$ 는 하이퍼큐브 Q_m 과 같은 정점수와 에지 수를 가지며 몇 가지 망칙도 면에서 하이퍼큐브 보다 우수한 성질을 지니고 있다^[13]. 그리고 Q_m 과 $G(2^m, 4)$ 모두 $G(2^m, 2)$ 의 부그래프가 되며 $G(2^m, 2)$ 는 Q_m 과 $G(2^m, 4)$ 에 각각 연장을 2로 임베딩할 수 있음이 밝혀져 있다^[14]. 재귀원형군의 예가 그림 1에 나타나 있다.

2. d -에지번호 매김

$G(N, d)$ 에 대한 임베딩과 관련된 d -에지번호매김은 G 의 정점에 1에서 정점의 개수까지의 서로 다른 정

수를 부여하는데 에지번호가 모두 d 의 거듭제곱이 된다는 조건을 만족하는 것이다. 재귀원형군과 d -에지 번호매김의 정의로부터 d -에지 번호매김이 가능한 그래프는 재귀원형군 $G(N, d)$ 의 부그래프임을 쉽게 알 수 있다. 그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다. 즉 d -에지 번호매김이 가능하지 않은 그래프라고 해서 반드시 그것이 재귀원형군 $G(N, d)$ 의 부그래프가 되지 않는 것은 아니다. 이항트리에 대한 4-에지 번호매김의 예가 그림 2에 나타나 있다^[11].

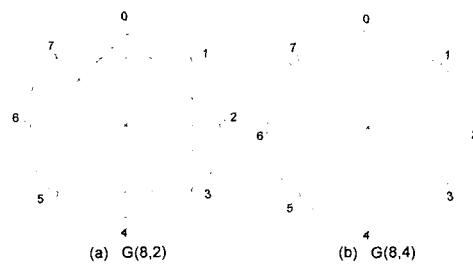


그림 1. 재귀원형군의 예
Fig. 1. Examples of recursive circulant.

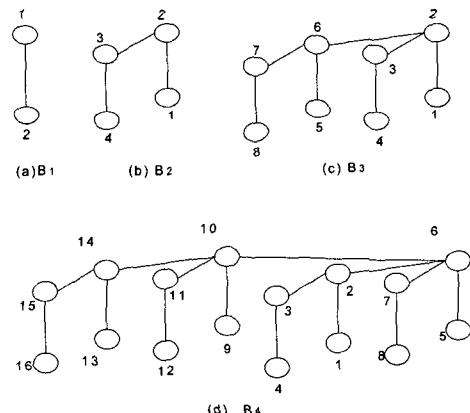


그림 2. 이항트리에서 4-에지 번호매김
Fig. 2. Examples of 4-edge labelings on some binomial trees.

III. Q-에지번호 매김 방법

1. 이항트리

이항트리는 병렬 망에서 메시지 방송과 병합 우선순위 큐를 구현하는데 중요한 역할을 한다. 이항트리는 다음과 같이 정의한다.

정의 1 이항트리, B_k

(1) 하나의 노드를 갖는 이항트리는 B_0 이다.

(2) 이항트리의 왼쪽 부그래프 T_l 과 오른쪽 부그래프 T_r 이 서로 분할된 B_{k-1} , $k \geq 1$ 이라고 하면 B_k 는 T_l 의 루트가 T_r 루트의 최 좌측 자식이 되게 에지를 하나 추가함으로써 만들어진다.

그림 3에 이항 트리의 예가 있다.

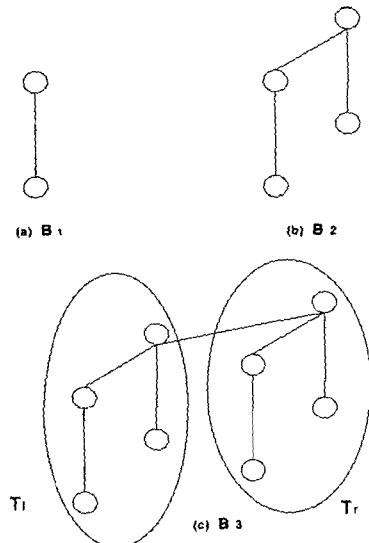


그림 3. 이항트리의 예
Fig. 3. The examples of binomial trees.

이항트리 B_k 는 2^k 개의 노드를 가지고 있으므로, $1, 2, \dots, 2^k$ 가 노드의 번호로 사용된다. 제시하고자 하는 B_k , $k \geq 4$ 에 대한 번호 매김은 아래의 성질을 만족한다.

성질 1 루트 노드 번호는 $\frac{4^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}}{3} - 1 + 1$ 이다.

성질 2 T_r 과 T_l 이 서로 분할된 B_{k-1} , $k \geq 5$ 라고 하면 T_r 과 T_l 에 대한 노드 번호들은 각각 $\{1, 2, \dots, 2^{k-1}\}$ 과 $\{2^{k-1}+1, 2^{k-1}+2, \dots, 2^k\}$ 이다.

성질 3 T_r 과 T_l 에 대한 번호 매김은 T_r 의 노드 번호와 T_l 의 노드 번호가 서로 대칭적이다.

2. 기본 형태: $\beta(3)$ -형태

이항 트리 B_1 과 B_2 는 선형적이므로 에지번호 1만을 사용하여 번호 매김을 얻을 수 있다. 그러나 B_3 의 경우에 노드들의 개수가 2^3 이므로 노드 번호는 $1, 2, \dots, 2^3$ 이 사용된다. 이때 에지번호들은 $\{1, 5\}$

가 되고 Q -에지번호 매김을 하는데 가장 중요한 기본 형태가 된다. 편의를 위해 각 노드들을 임의로 번호 매김을 하는 대신에 연속적인 위치로 선형배열하고 각 노드들의 위치에 왼쪽에서 오른쪽으로 1부터 번호 매김을 했다. 이러한 예가 그림 4에 있고 다음과 같이 정의된다.

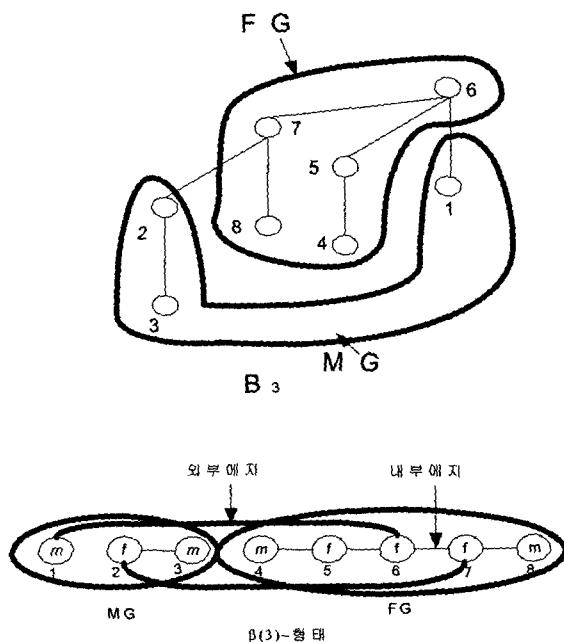


그림 4. B_3 의 Q -에지번호 매김과 $\beta(3)$ -형태의 예
Fig. 4. The example of Q -edge labeling in B_3 and $\beta(3)$ -type.

정의 2 양 그룹과 음 그룹

B_3 의 선형배열인 $\beta(3)$ -형태에서 선형적으로 연결된 노드번호 4에서 노드번호 8까지를 음 그룹(Female Group)이라고 하고 그 나머지 노드들은(노드번호 1에서 노드번호 3까지) 양 그룹(Male Group)이라고 한다.

정의 3 양 노드와 음 노드

B_3 의 선형배열인 $\beta(3)$ -형태에서 각 그룹의 노드들 중 양쪽 끝에 위치하는 두 개의 노드들은 양 노드(male node)라고 하고 내부에 존재하는 노드들은 음 노드(female node)라고 한다.

정의 4 킹 노드, 여왕 노드와 부 여왕 노드

B_3 의 선형배열인 $\beta(3)$ -형태에서 양 그룹 내에서 다른 노드들과 인접한 에지를 갖지 않는 노드를 킹 노드, 음 그룹내에서 양 그룹의 양 노드와 인접한 에지를 갖

는 노드를 여왕 노드라고 하고 양 그룹의 음 노드와 인접한 에지를 갖으면 부 여왕 노드라고 한다.

3. $B_k, k \geq 4$ 와 $\beta(k)$ -형태

임의의 이항 트리 $B_k, k \geq 4$ 의 Q -에지 번호매김은 분할된 T_r 과 T_l 의 노드번호들의 합이 항상 $2^k + 1$ 이고 서로 대칭적이므로 T_r 의 번호매김만을 고려하면 T_l 은 쉽게 구할 수 있고 이항 트리의 레벨 k 가 짝수인 경우 $B_{2n+2}, n \geq 1$ 와 홀수인 경우 $B_{2n+3}, n \geq 1$ 로 나누어진다.

가. Q -에지번호 매김, $B_{2n+2}, n \geq 1$

if (n==1)

① T_r 은 $\beta(3)$ -형태가 된다.

② T_l 은 $\beta'(3)$ -형태가 된다.

③ T_r 과 T_l 의 루트노드들에 인접한 에지추가

else

① $\beta(2(n-1)+2)$ -형태의 양(음)그룹들은 $\beta(2n+2)$ -형태의 양(음) 노드가 된다. (이를 슈퍼 양(음) 노드라고 하자.)

② 새로 생성된 슈퍼 노드들은 $\beta(3)$ -형태가 된다. 이를 $\beta(2n+2)$ -형태라고 한다.

③ T_r 은 $\beta(2n+2)$ -형태가 된다.

④ T_l 은 $\beta'(2n+2)$ -형태가 된다.

⑤ T_r 과 T_l 의 루트노드들에 인접한 에지추가

짝수인 경우 크게 두 가지 경우로 구분할 수 있다. 먼저 $n=1$ 인 경우 즉 B_4 에서는 B_3 이 서로 대칭적이고 분할된 T_r 과 T_l 이므로 T_r 은 $\beta(3)$ -형태가 되고 T_l 은 $\beta(3)$ -형태의 역선형 배열인 $\beta'(3)$ -형태가 된다. 그리고 T_r 과 T_l 의 루트 노드들에 인접한 에지를 추가한다. 이때 에지번호 값은 항상 $\frac{4^{n+1}-1}{3}$ 가 된다.

이러한 예가 그림 5에 있다.

두 번째로 $n \geq 2$ 인 경우는 $\beta(2(n-1)+2)$ -형태의 양(음) 그룹이 $\beta(2n+2)$ -형태의 양(음) 노드가 된다. 이때 이러한 확장된 노드들을 슈퍼 양(음) 노드라고 한다. 새로 생성된 슈퍼 노드들은 기본 형태인 $\beta(3)$ -형태를 갖는다. 그러므로 그림 6에 있는 $\beta(6)$ -형태에서

와 같이 $\beta(4)$ -형태에서의 양(음) 그룹이 $\beta(6)$ -형태

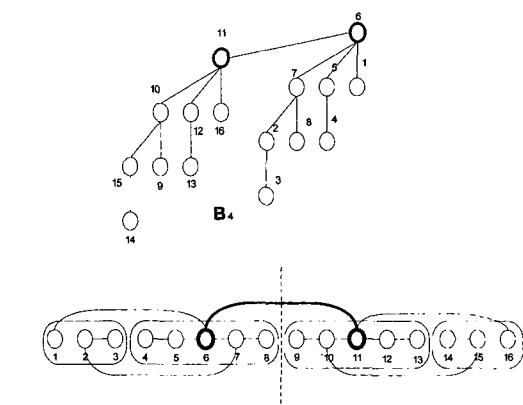


그림 5. B_4 의 Q -에지번호 매김과 $\beta(4)$ -형태의 예

Fig. 5. The example of Q -edge labeling in B_4 and $\beta(4)$ -type.

의 슈퍼 양(음) 노드가 된다.

그리고 이러한 슈퍼 노드들이 $\beta(3)$ -형태에서와 같이 다시 양(음) 그룹을 새로이 구성한다. 그리고 슈퍼 양 노드와 슈퍼 음 노드 사이에는 2 개의 인접한 에지가 추가되고 같은 슈퍼 음 노드 사이에는 한 개의 인접한 에지가 추가된다. 이때 추가되는 내부 에지들의 에지번호 값은 항상 $\frac{4^n - 1}{3}$ 이 되고 외부 에지들의 에지번호 값은 항상 $\frac{4^{n+1} - 1}{3}$ 이 된다. 그럼 7 에서와 같이 $\beta(2n+2)$ -형태가 T_r 이 되고 $\beta(2n+2)$ -형태의 역선형 배열인 $\beta'(2n+2)$ -형태가 T_l 이 된다. 마지막으로 T_r 과 T_l 의 루트 노드들 사이에 인접한 에지가 추가된다. 이때의 에지번호 값은 항상 $\frac{4^{n+1} - 1}{3}$ 이 된다.

표 1에서는 $\beta(2n+2)$ -형태의 슈퍼 양(음) 노드와 양(음) 그룹의 노드 개수가 있다. $\beta(2(n-1)+2)$ -형태의 양(음) 그룹이 $\beta(2n+2)$ -형태의 슈퍼 양(음) 노드가 된다. 이때 $\beta(2n+2)$ -형태의 슈퍼 노드 개수는 $\beta(2(n-1)+2)$ -형태의 양(음) 그룹의 노드 개수가 되고, $\beta(2n+2)$ -형태의 양 그룹의 노드 개수는 슈퍼 양 노드 개수 $\times 2 +$ 슈퍼 음 노드 개수 = $4 \times \beta(2(n-1)+2)$ -형태의 양 그룹의 노드 개수 - 1 이고 음 그룹의 노드 개수는 슈퍼 양 노드 개수 $\times 2 +$

슈퍼 음노드 개수 $\times 3 = 4 \times \beta(2(n-1) + 2)$ -형태의 음 그룹 노드 개수 + 1 = $\frac{(4^{n+1}-1)}{3}$ 이 된다.

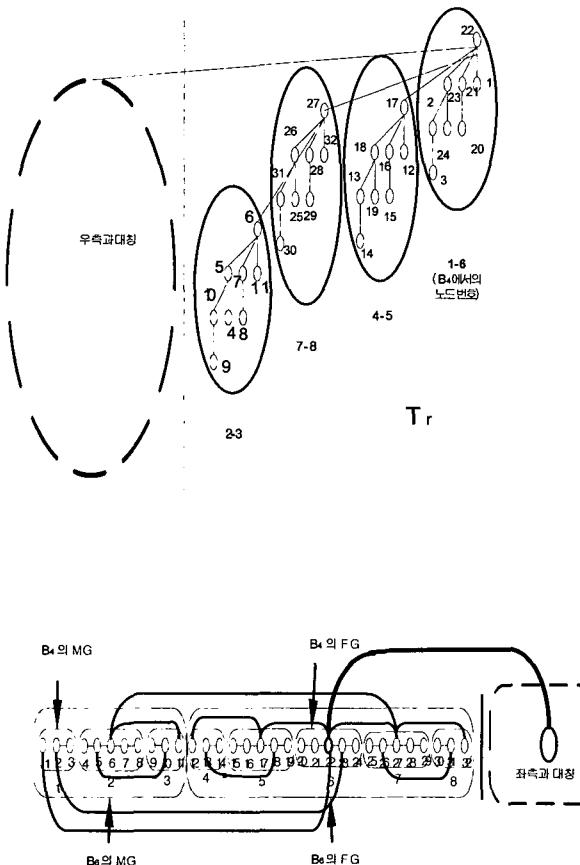


그림 6. B_6 의 Q-에지번호 매김과 $\beta(6)$ -형태의 예
Fig. 6. The example of Q-edge labeling on B_6 and $\beta(6)$ -type.

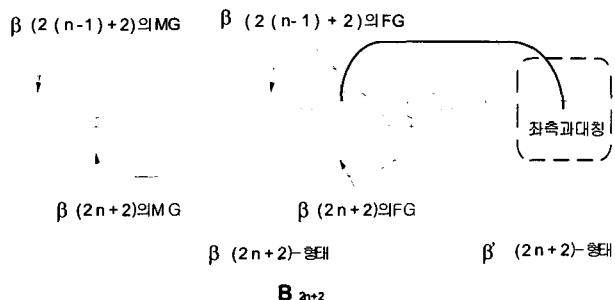


그림 7. B_{2n+2} 의 Q-에지번호 매김과 $\beta(2n+2)$ -형태의 예
Fig. 7. The example of Q-edge labeling in B_{2n+2} and $\beta(2n+2)$ -type.

표 2에서는 $\beta(2n+2)$ -형태와 $\beta'(2n+2)$ -형태

의 루트노드 번호들이 나타나 있다. $\beta(2n+2)$ -형태의 루트노드 번호는 $\frac{4^{n+1}-1}{3}$ 이고 $\beta'(2n+2)$ -형태의 루트 노드 번호는 $\frac{2(4^{n+1}-1)}{3} + 1$ 이 된다. 그러므로 추가되는 두 루트노드 사이에 인접한 에지의 에지 번호 값은 항상 $\frac{4^{n+1}-1}{3}$ 이 된다.

표 1. $\beta(2n+2)$ 의 슈퍼 양(음) 노드와 양(음) 그룹의 노드 개수

Table 1. The number of super male(female) nodes and Male(Female) Group on $\beta(2n+2)$.

	슈퍼 양 노드 개수, m_n	슈퍼 음 노드 개수	양 그룹의 노드 개수 MG_n	음 그룹의 노드 개수
B_4	1	1	3	5
B_6	3	5	11	21
B_8	11	21	43	85
B_{10}	43	85	171	341
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
B_{2n+2}	$m_n = 4 \times m_{n-1} - 1, n \geq 2, m_1 = 1$	$\frac{4^{m-1}}{3}$	$MG_n = 4 \times MG_{n-1} - 1, n \geq 2, MG_1 = 1$	$\frac{(4^{n+1}-1)}{3}$

표 2. B_{2n+2} 에서의 루트노드 번호들

Table 2. The label of root node on B_{2n+2} .

B_{2n+2}	$\beta(2n+2)$ 의 루트 노드 번호	$\beta'(2n+2)$ 의 루트 노드 번호	전체 노드 개수
B_4	6	11	2^4
B_6	22	43	2^6
B_8	86	171	2^8
B_{10}	342	683	2^{10}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
B_{2n+2}	$\frac{(4^{n+1}-1)}{3}$	$\frac{2(4^{n+1}-1)}{3} + 1$	2^{2n+2}

나. Q-에지번호 매김, $B_{2n+3}, n \geq 1$

① T_r 은 $\beta(2n+2)$ -형태가 된다.

- ② T_l 은 $\beta'(2n+2)$ -형태가 된다.
 ③ T_l 과 T_r 의 루트노드들에 인접한 예지추가

그림 8에서와 같이 이항 트리 B_{2n+3} 인 경우의 선형 배열 $\beta(2n+3)$ -형태는 T_r 로 $\beta(2n+2)$ -형태가 되고 T_l 로 $\beta(2n+2)$ -형태의 역선형 배열인 $\beta'(2n+2)$ -형태가 된다.

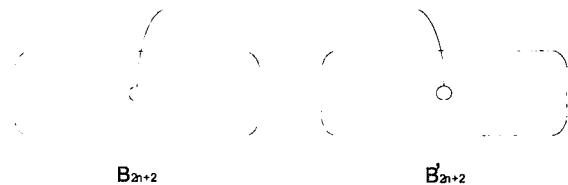


그림 8. B_{2n+3} 에서의 Q -예지번호 매김

Fig. 8. Q -edge labeling on B_{2n+3} .

표 3에서와 같이 T_r 의 루트 노드 번호는 $\frac{4^{n+1}-1}{3} + 1$ 이 되고 T_l 의 루트노드 번호는 $\frac{5(4^{n+1})+1}{3}$ 이 된다. 그러므로 T_r 과 T_l 의 루트 노드들 사이에 인접한 추가되는 예지의 예지 번호의 값은 항상 $\frac{4^{n+2}-1}{3}$ 이 된다.

표 3. B_{2n+3} 에서의 루트노드 번호들

Fig. 3. The label of root node on B_{2n+3} .

B_{2n+3}	B_{2n+2} 의 루트 노드 번호	B_{2n+2} 의 루트 노드 번호	전체 노드 개수
B_5	6	27	2^5
B_7	22	107	2^7
B_9	86	427	2^9
B_{11}	342	1707	2^{11}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
B_{2n+3}	$\frac{(4^{n+1}-1)}{3} + 1$	$\frac{5(4^{n+1})+1}{3}$	2^{2n+3}

정리 1 임의의 이항 트리는 Q -예지번호 매김을 할 수 있다.

증명 정의 2에서 B_3 의 $\beta(3)$ -형태를 이용한 이항트

리에서의 Q -예지번호 매김이 합당한지를 증명하기 위해서는 이항트리의 레벨이 짹수인 경우와 홀수인 경우에 추가되는 예지들의 예지번호들을 확인해 보는 것으로 충분하다.

먼저 짹수인 경우에 그림 7에서와 같이 추가되는 내부 예지들의 예지번호들은 $\{1, 2, \dots, \frac{4^n-1}{3}\}$ 이고 외부 예지들의 예지번호는 $\frac{4^{n+1}-1}{3}$ 이다. 그리고 표 2에서와 같이 두 루트 노드에 인접한 예지번호는 항상 $\frac{4^{n+1}-1}{3}$ 이다. 둘째로 홀수인 경우에는 두 루트 노드들에 인접한 예지만 고려하면 되는데 표 3에서와 같이 이를 예지번호는 항상 $\frac{4^{n+2}-1}{3}$ 이 된다. 이와 같은 사실로부터 제시한 설계 방법이 정당함을 알 수 있다.□

파름정리 1. 임의의 이항 트리 B_k 의 예지번호들의 집합은 $\left\{\frac{4^1-1}{3}, \frac{4^2-1}{3}, \dots, \frac{4^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}-1}{3}\right\}$ 이다.

IV. 결 론

본 논문에서 모든 이항트리는 Q -예지번호 매김을 할 수 있다는 것을 보였다. 만약 어떤 그래프에 Q -예지번호 매김이 가능하다고 한다면 그 예지번호들을 상호 연결망의 일종인 원형군 그래프의 점프열로 사용하면 그러한 그래프를 부그래프로 갖는 새로운 상호 연결망을 설계할 수 있고 그 그래프에서 개발된 모든 알고리즘을 시뮬레이션할 수 있다. 그러므로 원형군 그래프에 예지번호 매김이 가능한 이항 트리가 직접 임베딩되므로 Q -예지번호를 점프열로 갖는 원형군 그래프는 최적방송인 이항트리를 스파닝 트리로 갖는다.

향후 연구과제로서는 Q -예지번호를 점프열로 갖는 새로운 원형군 그래프의 설계와 다른 상호연결망들과 여러 가지 망체도 면에서 비교 분석이 필요하다. 그리고 다른 성질들을 만족하는 여러 가지 그래프들에 대한 임베딩도 고려해 볼 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Y. Yang and J. Wang, "Routing Permutations

- with link-disjoint and node-disjoint paths in a class of self-routable interconnects," IEEE trans. Parallel and Distributed Systems, vol. 14, no. 4, pp. 383-393, Apr. 2003.
- [2] D. A. Reed and H. A. Fujimoto, Multicomputer Networks: Message-based Parallel Processing, M IT Press, 1987.
- [3] S. W. Golomb, "How to number a graph," Graph Theory and Computing, Academic Press, New York (1972) pp. 23-37.
- [4] F. R. K. "Some problems and results in labelings of graphs," The Theory and Application of graphs, G. Chartrand. ed., Wiley, New York (1981) pp. 255-263.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph theory with applications, North-Holland, New York, 1976.
- [6] L. H. harper, "Optimal numbering and isoperimetric problems on graph," J. Combinatorial Theory 1 (1966) pp. 385-393.
- [7] M. R. Brown, "Implementation and analysis of binomial queue algorithms," SIAM J. Comput. 7 (1978) pp. 298-319.
- [8] V. M. Lo, S. Rajopadhye, S. Gupta, D. Keldsen, M. A. Mohamed and J. Telle, "Mapping Divide-and-Conquer Algorithms to Parallel Architectures," Proc. of the 1990 International Conf. on Parallel Processing, Vol. III, pp. 128-135 Aug. 1990.
- [9] W. J. Hsu, C. B. Page and J. S. Liu, "Computing Prefixes on a Large Family of Interconnection Topologies," Proc. of the 1992 International Conf. on Parallel Processing, Vol. III, pp. 153-159, Aug. 1992.
- [10] F.T.Leighton, Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hyper -cubes, Morgan Kaufmann publishers, San Mateo, California, 1992
- [11] H.-S. Lim, On the Labelings of Graphs and their Applications, Ph.D. Thesis, Dept. Computer Science, KAIST, 1993.
- [12] F. Harary, "The maximum connectivity of a graph," Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., Vol. 48, pp. 1142-1146, 1962.
- [13] J.-H. Park, Circulant Graphs and their Application to Communication Networks, Ph.D. Thesis, Dept. Computer Science, KAIST, 1992.
- [14] 박정희, 좌경룡, "재귀원형군과 하이퍼큐브의 임베딩," 정보과학회 논문지, 제22권 A편, 제12호, 1736-1741쪽, 1995년 12월

저자 소개



김 용 석(정회원)

1987년 전남대학교 계산통계학과 학사 졸업

1989년 전남대학교 전산통계학과 이학석사

1997년 전남대학교 전산통계학과 이학박사

1992년 3월 ~ 현재 서남대학교 컴퓨터 정보통신학과 교수

<주관심분야: 컴퓨터이론(알고리즘, 그래프 이론), 병렬처리,
상호 연결망>