

Taylor series 를 이용한 시변 지연 입력을 갖는 비선형 시스템의 이산화

Time Discretization of Nonlinear System with Variable Time-delay Input Using Taylor Series Expansion

최형조, 정길도*, 박지향, 이수영
(Hyung Jo Choi, Kil To Chong, Ji Hyang Park, and Su Young Lee)

Abstract : A new discretization algorithm for nonlinear systems with delayed input is proposed. The algorithm is represented by Taylor series expansion and ZOH assumption. This method is applied to the sampled-data representation of a nonlinear system with the time-delay input. Additionally, the delay in input is time varying and its amplitude is bounded. The maximum time-delay in input is assumed to be two sampling periods. The mathematical expressions of the discretization method are presented and the ability of the algorithm is tested for some of the examples. The computer simulation proves the proposed algorithm discretizes the nonlinear system with the variable time-delay input accurately.

Keywords : time delay, discretization, nonlinear system, taylor series

I. 서론

많은 공학 시스템에서 정보 처리나 데이터 전송 등으로 인하여 시간 지연이 발생하게 된다. 최근에는 네트워크의 발달로 인해 원격지에서 네트워크를 이용하여 시스템을 제어하는 경우가 증가하고, 이런 경우에는 네트워크 상의 전송 등으로 인한 시간 지연이 시스템의 성능을 좌우하는 중요한 문제로 대두되고 있다. 연속시간 영역에서의 시간 지연 시스템은 시간 지연으로 인하여 무한 차원성의 특성을 갖게 되며 이로 인하여 시간지연이 존재하는 시스템은 연속 시간 영역에서는 해결이 어렵게 된다. 이러한 문제는 선형 시불변 시스템의 경우에도 발생하며, 비선형 시스템의 경우 복잡도나 문제 해결의 방법은 더욱 어렵다. 이런 이유로 유한 차원 시스템을 대상으로 개발되었던 여러 제어 기법들을 시간 지연 시스템에 직접 적용하는 데 어려움을 겪고 있다. 따라서 시간 지연을 갖는 시스템을 보다 정확히 제어하기 위해서는 새로운 설계 방법들이 필요하게 된다. 그 동안 많은 연구들이 이러한 시간 지연 문제를 해결하기 위해서 수행되어 왔다. Boutayeb[1]은 상태 지연과 출력 지연이 있는 이산 시스템에 대해서 관측기를 설계하고, Lyapunov 방법을 이용해서 점근적 안정도를 만족시키는 필요조건과 충분조건을 제시하였다.

Luo and Chung[2]은 시간 지연을 갖는 선형 불특정 시스템(linear uncertain system)의 점근적 안정도를 보장하는 지연 독립 평가 방법(delay-dependent criterion)을 제안하였다. Nithila, Damak, and Babary[3]는 시스템의 시간 지연 부분을 선형 편

미분 방정식 형태를 갖는 전달 시스템(transport system)으로 변환 하여 유한 차원을 갖는 선형 단일입력-단일출력(SISO) 시스템의 입력 지연에 대한 실시간 시간 지연 추정기를 설계하는 방법을 제안하였다. Noh와 Oh[4]는 불확실성의 노름(norm)의 상계(upper bound)를 알 수 없는 입력지연 시스템의 강인제어를 위한 슬라이딩 모드 제어를 설계하였다. 이를 위해 입력 지연 보상기를 갖는 슬라이딩 평면(sliding surface)을 제안하였다. Song등 [5]은 시변 시간 지연과 노름 유계인 불확실성이 존재하는 이산 시간 선형 시스템의 점근 안정성 문제를 Lyapunov 함수를 이용하여 선형 부등식 형태의 충분조건을 제시함으로써 해결하였다. 일반적으로 디지털 제어기 설계는 두 가지 방법을 통해 이루어지는데 첫째는, 연속 시간 모델을 기반으로 하여 연속시간 영역에서 제어기를 설계한 후 디지털 제어기로 변환하는 방법이다[6,7,8]. 기존의 연구들이 이와 같은 방법을 사용하였지만 시간 지연 시스템에서는 지연 항이 갖는 무한 차원성으로 인해 디지털 제어기 구현에 많은 제약이 있었다. 두 번째는 연속 시간 영역의 모델을 이산 시간 영역 모델로 변환한 후 이산 시간 영역 모델을 기반으로 한 디지털 제어기를 직접 설계하는 방법이다. 이와 같은 방법을 이용하면 이산 시간 영역 모델에서 시간 지연 항으로 인한 무한 차원성을 해결할 수 있기 때문에 디지털 제어기 구현이 보다 자유로워진다. 따라서 시간 지연 시스템을 이산화 하는 방법으로는 두 번째 방법이 가장 적합하다고 할 수 있다.

본 논문에서는 기존의 잘 알려진 선형 시스템의 이산화 알고리즘 [9,10]을 이용하여 입력에 시간 지연이 발생하며 또한 시간지연이 시간에 따라 변하는 특성을 갖는 비선형 시스템을 Taylor 급수를 이용하여 이산화 하는 방법을 제안하고자 한다[11,12]. Kazantzis[13,14,15]이 이와 같은 방법을 이용하여 입력의 시간지연이 상수 인 시스템에 대한 이산화 방법을 제안한바 있으나, 시변 지연 값에 대해서는 고려하지 않았다. 일반적으로 시간 지연이 존재하는 시스템에서는 지연 값이

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2004. 4. 21., 채택확정 : 2004. 7. 28.

최형조 : 전북대학교 메카트로닉스 공학과(astrohjc@hanmail.net)

정길도, 이수영 : 전북대학교 전자정보공학부

(kitchong@chonbuk.ac.kr/suylee@moak.chonbuk.ac.kr)

박지향 : 삼성 SDI(jhyang0702@korea.com)

※ 본 연구는 전북대학교 메카트로닉스 지역 연구 센터(RRC)의 지원 하에 연구되었습니다.

시간에 따라 변하기 때문에 위의 연구 결과를 실제 시스템에 직접 적용시키는 데는 무리가 있다. 따라서 본 논문에서는 실제 시스템에서 나타나는 시간 지연 요소처럼 시변 지연을 갖는 비선형 시스템에 대해 Taylor 급수를 이용하여 이산화 하는 알고리즘을 제안한다.

본 논문은 연구 결과를 설명하기 위하여 다음과 같이 구성 하였다. 2장에서는 지금까지 개발된 상수 시간 지연 값을 갖 는 시스템을 Taylor 급수를 이용하여 이산화 하는 방법을 살 펴보았고, 3장에서는 본 논문에서 제안하고자 하는 알고리즘 으로서 입력 항에 시변 지연 값이 존재하는 비선형 시스템에 대한 이산화 알고리즘을 유도하였다. 지연 값이 한 샘플링 주기 내에서 변하는 경우에 대해서 먼저 살펴본 후, 지연 값 이 샘플링 주기의 두 배 이내에서 변하는 경우에 대해서 Taylor 급수를 이용한 이산화 알고리즘을 유도하였다. 4장에 서는 본 논문에서 제안한 알고리즘을 적용한 컴퓨터 시뮬레 이션 실시하였고, 마지막으로 5장에서는 본 연구에 대한 결 론을 도출하고 향후 연구 진행 방향에 대해 서술하였다.

II. Taylor 급수를 이용한 비선형 시스템 이산화

1. 시간 지연이 없는 비선형 시스템의 이산화

다음과 같은 상태공간 방정식으로 표현되는 일반적인 비 선형 시스템을 고려하자.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + u(t)g(x(t)) \tag{1}$$

(1)의 해를 다음과 같이 가정하자.

$$x(t) = A_0 + A_1(t - t_k) + A_2(t - t_k)^2 + A_3(t - t_k)^3 + \dots \tag{2}$$

(2)을 Power 급수를 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x'(t) &= A_1 + 2A_2(t - t_k) + 3A_3(t - t_k)^2 + \dots \\ x''(t) &= 2A_2 + 3A_3(t - t_k) + 4 \cdot 3A_4(t - t_k)^2 + \dots \\ x'''(t) &= 3 \cdot 2A_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2A_4(t - t_k) + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

(3)에서 $t = t_k$ 라고 하면 (2)의 각 계수들은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} A_0 &= x(t_k), A_1 = x'(t_k), A_2 = \frac{x''(t_k)}{2!}, \\ A_3 &= \frac{x'''(t_k)}{3!}, \dots \end{aligned} \tag{4}$$

(4)을 (2)에 대입한 후 $t - t_k = T$ 라고 하면 시간 $t = t_k$ 의 상태 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_k) + x'(t_k)(t - t_k) + \frac{x''(t_k)}{2!}(t - t_k)^2 + \frac{x'''(t_k)}{3!}(t - t_k)^3 + \dots \\ &= x(t_k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{T^l}{l!} \frac{d^l x}{dt^l} \Big|_{t_k} \end{aligned} \tag{5}$$

(5)에 Taylor 급수를 적용하여 정리하면 (1)의 해는 다음과 같이 균일 수렴 Taylor 급수(uniformly convergent Taylor

series)[16]로 표현되며, 각 계수들은 (1)의 우변에 연속 편미 분을 취하여 쉽게 구할 수 있다.

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{T^l}{l!} \frac{d^l x}{dt^l} \Big|_{t_k} = x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} A^l(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \tag{6}$$

여기에서 $x(k)$ 는 시간 $t = t_k = kT$ 에서 상태 벡터 x 값을 나타내고, $A^l(x, u)$ 은 다음과 같이 반복적으로 결정되는 함수이다.

$$\begin{aligned} A^1(x, u) &= f(x) + ug(x) \\ A^{l+1}(x, u) &= \frac{\partial A^l(x, u)}{\partial x} (f(x) + ug(x)) \quad \text{with } l=1,2,3, \end{aligned} \tag{7}$$

(6)의 Taylor 급수 전개를 이용하여 상태 벡터를 무한 급수 형태로 표현하면 (1)의 정확한 표현식을 얻을 수 있다.

$$x(k+1) = \Phi_T(x(k), u(k)) = x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} A^l(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \tag{8}$$

또한 상태 벡터를 차수 N을 갖는 Taylor 급수로 표현하면 (1)에 대한 근사 표현식을 구할 수 있다.

$$x(k+1) = \Phi_T^N(x(k), u(k)) = x(k) + \sum_{l=1}^N A^l(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \tag{9}$$

여기에서 함수 Φ_T^N 의 아래 첨자 T는 이산화 과정을 통 해 구한 샘플 데이터 표현식(sampled-data representation)의 샘플링 주기를 나타내고, 위 첨자 N은 (9)의 근사 표현식에서 사용된 유한개의 급수를 나타낸다.

2. 시간 지연이 있는 선형 시스템의 이산화

지금까지 시간 지연이 없는 시스템을 Taylor 급수를 이용 하여 이산화 하는 알고리즘을 살펴보았다. 이제 위에서 언급 한 Taylor 급수를 이용하여 입력에 시간 지연이 존재하는 시 스템의 이산화에 대하여 살펴보자. 먼저 시간 지연이 상수인 경우를 고려해보자. 다음과 같은 선형 시스템을 살펴보자

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t - D) \tag{10}$$

여기에서 A, b 는 적당한 차수를 갖는 상수 행렬이다. 시 간 간격 $[t_i, t_f) = [kT, (k+1)T)$ 는 샘플링 간격이고 T 를 샘플링 주기라고 가정한다. 입력 값이 샘플링 구간상에서 상 수 값을 갖는다고 가정하면 즉, 0차 홀드라고 가정하면 입력 은 다음과 같게 된다.

$$u(t) = u(kT) \equiv u(k) = \text{constant for } kT \leq t < kT + T \tag{11}$$

그리고 시간 지연을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$D = qT + \gamma \tag{12}$$

여기에서 $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 인 정수이고, $0 < \gamma \leq T$ 인 실수 이다. 0차 홀드 가정(ZOH assumption)과 위의 표기법을 이용

하면 지연된 입력은 샘플링 구간상에서 다음과 같이 두 가지 영역에 따라 결정되는 것을 알 수 있다.

$$u(t-D) = \begin{cases} u(kT-qT-T) \equiv u(k-q-1) \\ u(kT-qT) \equiv u(k-q) \end{cases} \quad (13)$$

if $kT \leq t < kT + \gamma$
if $kT + \gamma \leq t < kT + T$

입력의 시간 간격 $I = [t_i, t_f]$ 과 입력 $u = u_c = \text{constant}$ 인 경우 시간 $t = t_f$ 에서 상태 값은 다음과 같이 계산된다.

$$x(t_f) = \exp(A(t_f - t_i))x(t_i) + u_c \int_{t_i}^{t_f} \exp(A(t_f - \tau))b d\tau \quad (14)$$

따라서 시간 지연이 존재하는 경우 입력 값은 샘플링 구간 내에서 시간 간격에 따라 두 구간으로 나누어져 결정되므로 이를 적용하면 시간 영역에 따른 상태 값을 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$x(kT + \gamma) = \exp(A\gamma)x(kT) + u(k-q-1) \int_{kT}^{kT+\gamma} \exp(A(kT + \gamma - \tau))b d\tau \quad (15)$$

$$x(kT + T) = \exp(A(T-\gamma))x(kT + \gamma) + u(k-q) \int_{kT+\gamma}^{kT+T} \exp(A(kT + T - \tau))b d\tau \quad (16)$$

(15)을 (16)에 대입하면,

$$x(kT + T) = \exp(A(T-\gamma))x(kT + \gamma) + u(k-q) \int_{kT+\gamma}^{kT+T} \exp(A(kT + T - \tau))b d\tau$$

$$= \exp(A(T-\gamma))\exp(A\gamma)x(kT) + u(k-q) \int_{kT+\gamma}^{kT+T} \exp(A(kT + T - \tau))b d\tau$$

$$+ \exp(A(T-\gamma))u(k-q-1) \int_{kT}^{kT+\gamma} \exp(A(kT + \gamma - \tau))b d\tau \Rightarrow$$

$$x(kT + T) = \exp(AT)x(kT) + \Gamma_1 u(k-q-1) + \Gamma_0 u(k-q) \quad (17)$$

여기에 $\Gamma_1 = \int_{T-\gamma}^T \exp(A\tau)b d\tau$, $\Gamma_0 = \int_0^{T-\gamma} \exp(A\tau)b d\tau$ 이다.

(17)은 상수 시간 지연 D 를 갖는 연속 시간 영역 시스템의 샘플-데이터 표현식을 나타낸다. (17)을 통해서 시간 $(k+1)T$ 에서 상태 벡터 값은 시간 kT 의 상태 벡터 값과 시간 $(k-q-1)T$ 와 $(k-q)T$ 의 입력 변수 u 의 과거 값들의 선형 결합으로 이루어진다.

3. 시간 지연을 갖는 비선형 시스템의 이산화

이번에는 상수 시간 지연을 갖는 비선형 시스템의 경우에 대한 이산화 알고리즘에 대해 생각해 보자. 다음과 같이 비선형 시스템이 주어진다고 하자.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t-D) \quad (18)$$

선형 시스템과 같이 입력 값에 0차 홀드 가정(ZOH assumption)을 적용하면 지연된 입력 값은 (13)과 같이 두개의 시간 간격으로 나누어져 시스템에 인가된다. 따라서 시간 $kT + \gamma$ 에서 상태 값은 시간 구간 $(kT, kT + \gamma)$ 의 입력 값이 적용되어 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x(kT + \gamma) = \Phi_\gamma(x(kT), u(k-q-1)) \quad (19)$$

여기에서 Φ_γ 는 (8)을 이용하여 유도할 수 있다.

마찬가지로, 시간 $(k+1)T$ 의 상태 벡터 값은 시간 구간 $[kT + \gamma, (k+1)T]$ 의 입력 값이 적용되어 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x(kT + T) = \Phi_{T-\gamma}(x(kT + \gamma), u(k-q)) \quad (20)$$

(19)와 (20)을 이용하면 비선형 시스템 (18)의 샘플-데이터 표현식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x(k+1) = \Phi_T^D(x(k), u(k-q-1), u(k-q))$$

$$= \Phi_{T-\gamma}(\Phi_\gamma(x(k), u(k-q-1)), u(k-q)) \quad (21)$$

위 식에 유한 급수 절단 오차 N 을 사용하면 다음과 같이 근사 샘플-데이터 표현식을 구할 수 있다.

$$x(k+1) = \Phi_T^{N,D}(x(k), u(k-q-1), u(k-q)) \quad (22)$$

III. 시간 지연 입력을 갖는 비선형 시스템의 이산화

1. 시간 지연이 샘플링 주기보다 작은 경우

다음과 같은 형태를 갖는 비선형 시스템을 고려하자.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t-D(t)) \quad (23)$$

(23)을 샘플링 주기 $T = t_{k+1} - t_k > 0$ 를 갖도록 이산화 한다고 가정하자. k 번째 샘플링 구간에서의 시간 지연 값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D_k = q_k T + \gamma_k \quad (24)$$

여기에서 $q_k = 0$ 인 정수이고, $0 < \gamma_k \leq T$ 은 실수이다. 지연 값이 한 샘플링 주기보다 작은 경우, k 번째 샘플링 구간에서의 시간 간격은 지연이 발생하는 시점을 기준으로 다음과 같이 두 구간 $(kT, kT + \gamma_k)$, $(kT + \gamma_k, kT + T)$ 으로 나눌 수 있다. 왜냐하면 최대 지연된 입력이 한 샘플링 구간을 벗어날 수 없기 때문이다. 이와 같은 경우 샘플링 구간상에서 지연된 입력 값은 γ_k 값에 의해서 결정되기 때문에 상태 값을 계산할 때 γ_k 값이 중요한 인자가 된다. 따라서 시간 지연이 k 번째 샘플링 구간에서 발생하는 경우 시스템에 작용하는 입력 값은 구간에 따라 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(t - D_k) = u(k - q_k - 1) \quad kT \leq t < (kT + \gamma_k)$$

$$= u(k - q_k) \quad (kT + \gamma_k) \leq t < (kT + T) \quad (25)$$

(25)의 입력을 갖는 (23)의 비선형 시스템을 Taylor 급수 전개를 이용하여 이산화하면 다음과 같다.

$$x(kT + \gamma_k) = \Phi_{\gamma_k}(x(kT), u(k - q_k - 1))$$

$$kT \leq t < (kT + \gamma_k) \quad (26)$$

$$x(kT + T) = \Phi_{T-\gamma_k}(x(kT + \gamma_k), u(k - q_k)) \quad (kT + \gamma_k) \leq t < (kT + T) \quad (27)$$

(26)을 (27)에 대입하면 다음을 구할 수 있다

$$x(kT + T) = \Phi_{T-\gamma_k}(\Phi_{\gamma_k}(x(kT), u(k - q_k - 1)), u(k - q_k)) \quad (28)$$

위 식을 N차까지 근사화 시키면 다음과 같다.

$$x(kT + T) = \Phi_{T-\gamma_k}^N(\Phi_{\gamma_k}^N(x(kT), u(k - q_k - 1)), u(k - q_k)) \quad (29)$$

따라서 샘플링 크기보다 작은 시변 지연 입력을 갖는 비선형 시스템은 (29)과 같이 차수 N을 갖는 이산 시간 영역 모델로 이산화 할 수 있다.

2. 시간 지연이 샘플링 크기의 두 배보다 작은 경우

(23)과 같은 비선형 시스템을 다시 고려하자. k 번째 샘플링 구간에서의 시간지연을 $D_k = q_k T + \gamma_k$ 라고 하자. 여기서, $q_k = 0$ 또는 $q_k = 1$ 인 정수이고 $0 < \gamma_k \leq T$ 은 실수라고 가정한다. 그리고 현재 샘플링 구간의 지연 값과 이전 샘플링 구간의 지연 값을 알고 있다고 가정한다. 시변 지연 값이 샘플링 크기보다 큰 경우 입력 값은 한 샘플링 구간을 벗어나 다음 샘플링 구간에까지 영향을 미치게 된다. 이로 인해 단일 입력을 갖는 시스템도 시간 지연 값의 크기에 따라 한 샘플링 구간에 두 개 이상의 입력을 갖는 경우가 발생한다. 이런 경우 한 스텝 이전의 입력이 현재 스텝 입력보다 시스템에 늦게 들어오는 경우 이전 스텝의 입력은 무시된 채 현재 스텝의 입력만이 시스템에 영향을 미치게 된다. 이런 이유로 시변 지연 값이 샘플링 크기보다 큰 경우에는 각 샘플링 구간마다 몇 번째 입력이 시스템에 영향을 미치는지 확인하는 과정이 반드시 필요하다. 이번 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위해서 각 시간 지연을 구성하는 요소를 비교하였다. k 번째 시간지연은 $D_k = q_k T + \gamma_k$ 와 같이 쓸 수 있다. 여기에서 q_k 는 지연 값이 샘플링 크기의 몇 배인지를 나타내고, γ_k 는 지연 값이 샘플링 구간상의 어디에 위치하는지를 나타낸다. 따라서 q_k 값을 비교하면 지연된 입력이 몇 번째 샘플링 구간에서 시스템에 인가되는지를 확인할 수 있다. 그리고 한 샘플링 구간에 두 개의 입력이 작용하는 경우엔 γ_k 값을 비교하여 몇 번째 입력이 시스템에 먼저 영향을 미치는지를 확인할 수 있다. 다음은 이러한 과정을 나타낸다.

$q_{k-1} = 0$ 이고 $q_k = 0$ 인 경우에는 k 번째 구간에 k 번째 입력이 지연되어 인가된다. 따라서 k 번째 구간상에서의 입력 값은 그림 1 과 같으며, 입력 값은 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u(k - q_k - 1) & kT \leq t < kT + \gamma_k \\ u(t) &= u(k - q_k) & kT + \gamma_k \leq t < (k + 1)T \end{aligned} \quad (30)$$

$q_{k-1} = 0$ 이고 $q_k = 1$ 인 경우에는 k 번째 구간에 k 번째 입력이 영향을 미치지 않기 때문에 $k - 1$ 번째 입력이 영

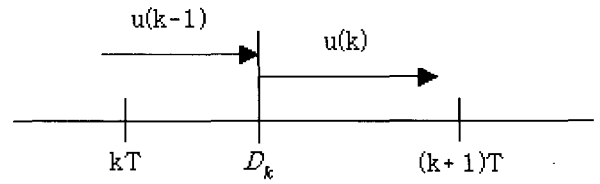


그림 1. $q(k-1)=0$ 과 $q(k)=0$ 일 경우의 입력값.
Fig. 1. The input values when $q(k-1)=0$ and $q(k)=0$.

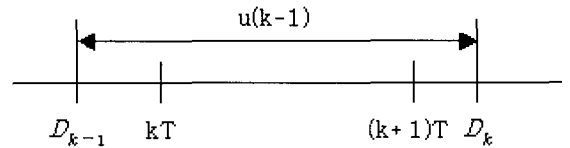


그림 2. $q(k-1)=0$ 와 $q(k)=1$ 일 경우의 입력값.
Fig. 2. The input values when $q(k-1)=0$ and $q(k)=1$.

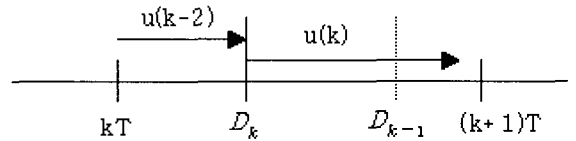


그림 3. $q(k-1)=1$ & $q(k)=0, r(k-1) \geq r(k)$ 일 경우의 입력값.
Fig. 3. The input values when $q(k-1)=1$ & $q(k)=0, r(k-1) \geq r(k)$.

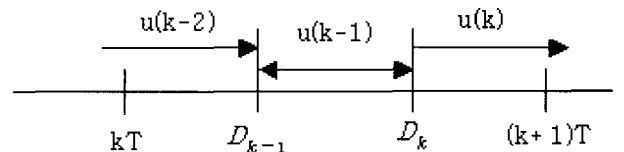


그림 4. $q(k-1)=1$ & $q(k)=0, r(k-1) < r(k)$ 일 경우의 입력값.
Fig. 4. The input values when $q(k-1)=1$ & $q(k)=0, r(k-1) < r(k)$.

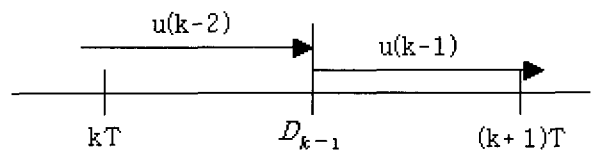


그림 5. $q(k-1)=1$ and $q(k)=1$ 일 경우의 입력값.
Fig. 5. The input values when $q(k-1)=1$ and $q(k)=1$.

향을 미치게 된다. 따라서 이 구간상에서 입력 값은 그림 2와 같으며 (31)과같이 결정된다.

$$u(t) = u(k - q_k) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (31)$$

$q_{k-1} = 1$ 이고 $q_k = 0$ 인 경우에는 한 샘플링 구간에 두 개의 입력 값이 존재하게 된다. 따라서 어떤 입력 값이 시스템에 먼저 영향을 미치는지를 확인해야 한다. 먼저 $\gamma_{k-1} \geq \gamma_k$ 인 경우에는 $k-1$ 번째 입력이 시스템에 영향을 미치기 전에 k 번째 입력이 먼저 시스템에 인가되기 때문에 $k-1$ 번째 입력은 무시된다. 따라서 입력 값은 그림 3과 같으며, (32)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u(k - q_k - 2) & kT \leq t < kT + \gamma_k \\ u(t) &= u(k - q_k) & kT + \gamma_k \leq t < (k+1)T \end{aligned} \quad (32)$$

반면에 $\gamma_{k-1} < \gamma_k$ 인 경우에는 $k-1$ 번째 입력과 k 번째 입력이 모두 시스템에 영향을 미치기 때문에 입력 값은 그림 4와 같으며 다음 식으로 결정된다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u(k - q_k - 2) & kT \leq t < kT + \gamma_{k-1} \\ u(t) &= u(k - q_k - 1) & kT + \gamma_{k-1} \leq t < kT + \gamma_k \\ u(t) &= u(k - q_k) & kT + \gamma_k \leq t < (k+1)T \end{aligned} \quad (33)$$

마지막으로 $q_{k-1} = 1$ 이고 $q_k = 1$ 인 경우에는 k 번째 샘플링 구간에 $k-1$ 번째 입력만이 영향을 미치므로 입력 값은 그림 5와 같고, (34)으로 결정된다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u(k - q_k - 1) & kT \leq t < kT + \gamma_{k-1} \\ u(t) &= u(k - q_k) & kT + \gamma_{k-1} \leq t < (k+1)T \end{aligned} \quad (34)$$

위 결과를 Taylor 급수 전개를 이용한 N차 근사식에 대입하면 샘플링 크기의 두 배보다 작은 시변 지연이 있는 비선형 시스템의 이산화 식을 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 $q_{k-1} = 0$ 이고 $q_k = 0$ 인 경우에는 상태 벡터 값이 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} x(kT + \gamma_k) &= \Phi_{\gamma_k}^N(x(kT), u(k - q_k - 1)) \\ & \quad kT \leq t < kT + \gamma_k \\ x(kT + T) &= \Phi_{T-\gamma_k}^N(x(kT + \gamma_k), u(k - q_k)) \\ & \quad kT + \gamma_k \leq t < (k+1)T \end{aligned} \quad (35)$$

$q_{k-1} = 0$ 이고 $q_k = 1$ 인 경우에는 상태 벡터 값이 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \Phi_T^N(x(kT), u(k - q_k)) \\ & \quad kT \leq t < (k+1)T \end{aligned} \quad (36)$$

$q_{k-1} = 1$ 이고 $q_k = 0$ 인 경우에 먼저 $\gamma_{k-1} \geq \gamma_k$ 라면 상태 벡터 값은 다음과 같고

$$\begin{aligned} x(kT + \gamma_k) &= \Phi_{\gamma_k}^N(x(kT), u(k - q_k - 2)) \\ & \quad kT \leq t < kT + \gamma_k \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \Phi_{T-\gamma_k}^N(x(kT + \gamma_k), u(k - q_k)) \\ & \quad kT + \gamma_k \leq t < (k+1)T \end{aligned}$$

$\gamma_{k-1} < \gamma_k$ 이면 상태 벡터 값은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} x(kT + \gamma_{k-1}) &= \Phi_{\gamma_{k-1}}^N(x(kT), u(k - q_k - 2)) \\ & \quad kT \leq t < kT + \gamma_{k-1} \\ x(kT + \gamma_k) &= \Phi_{\gamma_k - \gamma_{k-1}}^N(x(kT + \gamma_{k-1}), u(k - q_k - 1)) \\ & \quad kT + \gamma_{k-1} \leq t < kT + \gamma_k \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \Phi_{T-\gamma_k}^N(x(kT + \gamma_k), u(k - q_k)) \\ & \quad kT + \gamma_k \leq t < (k+1)T \end{aligned}$$

마지막으로 $q_{k-1} = 1$ 이고 $q_k = 1$ 인 경우에는 상태 벡터 값이 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} x(kT + \gamma_{k-1}) &= \Phi_{\gamma_{k-1}}^N(x(kT), u(k - q_k - 1)) \\ & \quad kT \leq t < kT + \gamma_{k-1} \end{aligned} \quad (39)$$

IV. 컴퓨터 시뮬레이션

본 논문에서 제안한 알고리즘의 성능을 확인하기 위하여 일반적인 CSTR(Continuous Stirred Tank Reactor) 시스템에 대해서 모의 실험을 진행하였다. 시스템의 방정식은 다음과 같다.

$$x'(t) = -x^2(t) - 3x(t) + u(t - D(t))(1 - x(t)) \quad (40)$$

초기 조건은 $x(0) = 0$ 이며, 입력과 시간 지연 값은 정현파로 구성하였다. 본 모의 실험에서는 sin 지연 값의 주기를 변화시켰을 때와 샘플링 주기를 변화시켰을 때의 두 가지 경우에 대해서 실험을 실시하였다. 본 연구를 통해서 제안하는 Taylor series 방법과 Matlab ODE Solver를 이용한 결과를 시스템의 정확한 값으로 가정하고 비교하였다. Matlab 결과를 기준 값으로 사용할 수 있는 근거는 Kazantzis[15]에서 확인할 수 있다. 그림 6은 샘플링 주기 $T = 0.05 \text{ sec}$ 일 때, 입력 $u(t - D(t)) = 0.9 * \sin((t - D(t))/4)$, 시간 지연 $D(t) = 0.04 * \sin(t/4) + 0.05$ 를 갖는 시스템에 대한 상태 값과 상태 오차를 나타내는 그림이다.

그림에서 확인할 수 있듯이 상태 값 오차의 최대값은 1%를 넘지 않는다. 그림 7은 같은 입력에 주기가 늦어진 지연 값이 시스템에 인가된 결과이며, 이때 입력의 시간지연은 $D(t) = 0.04 * \sin(t/8) + 0.05$ 으로 설정하였다. 그림 8은 지연 값이 $D(t) = 0.04 * \sin(t/12) + 0.05$ 인 경우이며, 그림 9는

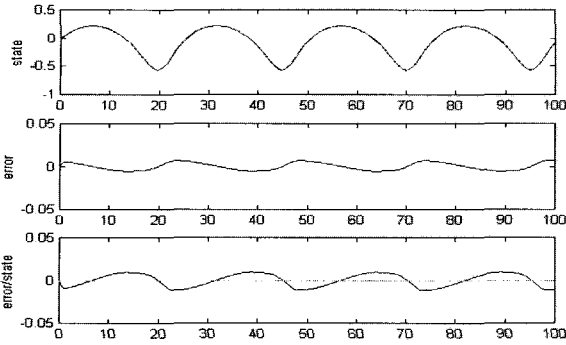


그림 6. CSTR의 상태값과 상태오차(T=0.05sec).
Fig. 6. State error and state value of CSTR(T=0.05sec).

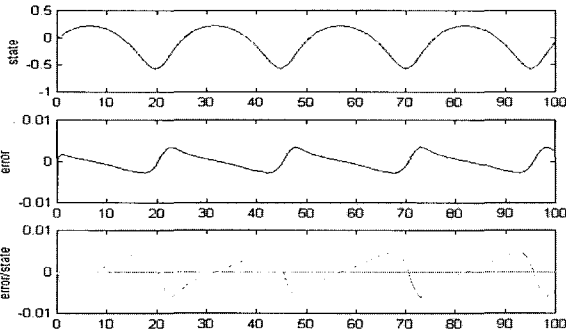


그림 7. 지연의 사인과 주기가 변하는 경우.
 $D(t) = 0.04 * \sin(t/8) + 0.05$
Fig. 7. Period of sine delay is variable.
 $D(t) = 0.04 * \sin(t/8) + 0.05$

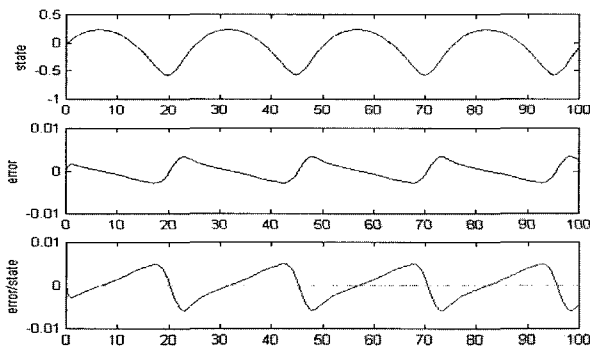


그림 8. 지연의 사인과 주기가 변하는 경우.
 $D(t) = 0.04 * \sin(t/12) + 0.05$
Fig. 8. Period of sine delay is vaoable.
 $D(t) = 0.04 * \sin(t/12) + 0.05$

지연 값이 $D(t)=0.04*\sin(t/16)+0.05$ 인 경우이다. 그림 10 는 입력 $u(t-D(t))=0.9*\sin(((t-D(t))/4)$, 시간 지연 $D(t)=0.04*\sin(t/4)+0.05$ 을 값을 갖고 샘플링 주기 $T=0.01\text{sec}$ 인 경우의 상태 값과 상태 오차를 나타낸다. 그림 11은 그림 10과 같은 입력과 시간 지연을 갖는 대신 샘플링 주기가 $T=0.005\text{sec}$ 인 경우를 나타내고 있다. 각각의

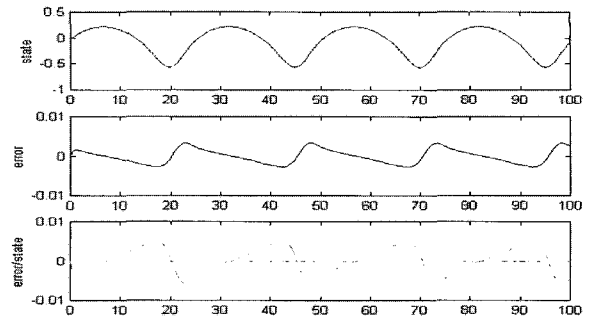


그림 9. 지연의 사인과 주기가 변하는 경우.
 $D(t) = 0.04 * \sin(t/16) + 0.05$
Fig. 9. Period of sine delay is variable.
 $D(t) = 0.04 * \sin(t/16) + 0.05$

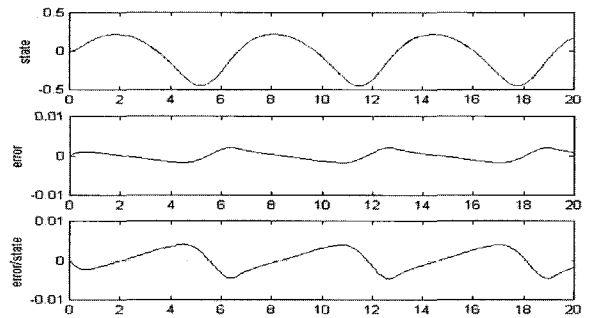


그림 10. 지연의 샘플링 주기가 변하는 경우(T=0.01sec).
Fig. 10. Sampling time of delay is variable(T=0.01sec).

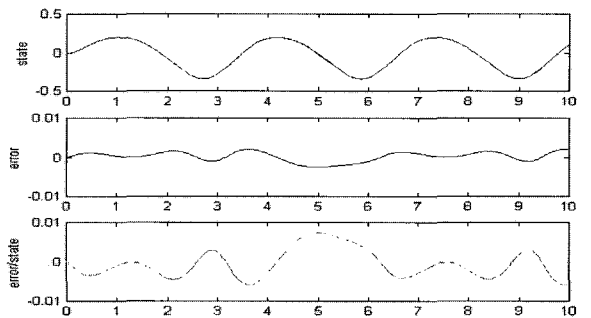


그림 11. 지연의 샘플링 주기가 변하는 경우(T=0.005sec).
Fig. 11. Sampling time of delay is variable(T=0.005sec).

경우에 대한 RMS 값은 샘플링 주기 $T=0.05\text{sec}$ 인 경우 0.0018을 나타내었다. 샘플링 주기 $T=0.01\text{sec}$ 인 경우에는 RMS 값이 0.0014를 나타내었고 끝으로 샘플링 주기 $T=0.005\text{sec}$ 인 경우에는 RMS 값이 0.0009를 나타내었다. 결과적으로 샘플링 주기가 짧아질수록 RMS값이 적어짐을 알 수 있었다. 실험 결과를 통해서 일반적으로 알고 있듯이 시스템의 샘플링 주기가 작아질수록 상태 오차 값이 작아짐을 확인할 수 있었다. 시스템의 샘플링 주기가 같은 경우에는 시간 지연 값의 변화가 작을수록 상태 오차가 더 작아진다는 것을 확인할 수 있다. 이는 시뮬레이션을 진행할 때 시변 지연 값에 0차 홀드 가정을 적용했기 때문에 발생하는 현상이

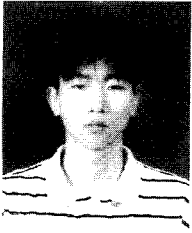
라 해석할 수 있다. 즉, 이산 시간 영역에서는 시변 지연 값이 샘플링 된 시점의 값을 유지한 채 샘플링 구간에서 지속되기 때문에 샘플링 구간상에서 연속적으로 변하는 연속 시간 영역에서의 시변 지연 값을 정확히 추종하지는 못한 채 다소 오차를 보이게 되며 이러한 지연 값의 오차가 상태 값 계산에 영향을 미쳐 상태 오차를 발생시킨다고 할 수 있다. 그러므로 시변 지연을 갖는 비선형 시스템의 이산화 연구에서는 시변 지연 값에 대한 이산화 알고리즘의 성능이 매우 중요하다는 것을 알 수 있다. 본 컴퓨터 시뮬레이션 결과에 따르면 최대 상태 오차는 연속 시간 영역에서의 상태 값을 기준으로 1%를 벗어나지 않았고, 적절한 샘플링 주기와 시변 지연 값을 갖는 시스템에서는 상태 값 대비 10^{-2} %대의 오차를 나타냈다. 또한 각 오차 값에 대한 RMS 값을 확인해봄으로써 본 연구에서 제안한 이산화 알고리즘의 성능이 만족할 만한 수준임을 보여준 것이다. 최대 상태 오차 값을 줄이기 위해서는 시변 지연 값에 1차 홀드 가정을 적용해봄으로써 상태 값 계산에 영향을 미치는 지연 오차를 줄일 필요가 있으며 이는 본 연구의 향후 과제라 하겠다.

V. 결론

본 논문에서는 시간 지연이 시간에 따라 변하는 시변 시간 지연 특성의 입력을 가진 비선형 시스템을 Taylor 급수를 이용하여 이산화 하는 방법을 제안하였다. 제안한 알고리즘의 성능을 검증하기 위하여 다양한 예제에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하였다. 각 시뮬레이션에서는 공통적으로 시간 지연이 샘플링 주기의 두 배 이하의 값을 갖도록 제한하였으며, 시변 지연 값의 이산화 과정에서는 각 샘플링 구간마다 0차 홀드 가정(ZOH assumption)을 적용하였다. 실험 결과를 통하여 시스템의 샘플링 주기가 작을수록 상태 오차 값이 적어지는 것을 확인할 수 있었으며, 또한 시스템의 샘플링 주기가 같은 경우에는 시간 지연 값의 변화가 작을수록 상태 오차가 더 작아진다는 것을 확인할 수 있었다. 이는 시변 지연 값에 0차 홀드 가정을 적용했기 때문에 발생하는 현상으로 판단된다. 시뮬레이션 결과 적은 연속 시간 영역을 기준으로 적은 상태 오차를 보였으며, 다양한 샘플링 주기와 시변 지연 값을 갖는 시스템에서도 상태 값 대비 미미한 오차를 나타내었다. 또한 각 오차 값에 대한 RMS 값을 확인해봄으로써 본 연구에서 제안한 이산화 알고리즘의 성능이 우수함을 알 수 있었다. 향후 최대 상태 오차 값을 개선 위해 시변 지연 값에 1차 홀드 가정하는 연구를 진행할 계획이다.

참고문헌

- [1] M. Boutayeb, "Observer design for linear time-delay systems", *System & Control Letters*, 2001.
- [2] R. C. Luo, L.-Y. Chung, "Stabilization for linear uncertain systems with time latency", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2002.
- [3] M. Nihtila, T. Damak, J. P. Babary, "On-line estimation of the time delay via orthogonal collocation", *Simulation Practice and Theory*, 1997.
- [4] 노영훈, 오준호, "시간지연 시스템에서의 불확실성 추정을 갖는 슬라이딩 모드제어", 제어자동화시스템공학 논문지, 제6권, 제11호, pp. 963-967, 11, 2000.
- [5] 송성호, 박섭형, 이봉영, "시변 시간 지연을 갖는 불확실한 이산 시간 선형 시스템의 건실 안정성", 제어자동화시스템공학 논문지, 제5권, 제6호, pp. 641-646, 8, 1999.
- [6] 임홍재, 정완균, 서일홍, "시간 지연이 있는 양방향 원격 제어 시스템의 예측 제어", 제어자동화시스템공학 논문지 제6권, 제4호, pp. 295-304, 4, 2000.
- [7] C. T. Chen, "Linear system theory and design. holt", Rinhart and Winston, Orlando 1984.
- [8] S. Hohmann, A. Konrad, and V. Krebs, "Exact sampled-data representation of continuous-time nonlinear systems by finite polynomials with exactly determined coefficients", *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, pp. 1628-1633, 2001.
- [9] Franklin, G. F., Powell, J. D. and Workman, M. L., "Digital control of dynamic system." Addison-Wesley, New York 1988.
- [10] R. J. Vaccaro, "Digital control." McGraw-Hill, New York 1995.
- [11] A. Isidori, "Nonlinear control systems: an introduction", Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [12] M. Vidyasagar, "Nonlinear systems analyses." Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1978.
- [13] N. Kazantzis, and C. Kravaris, "System-theoretic properties of sampled-data representations of nonlinear systems obtained via taylor-lie series", *Int. J. Control*, pp. 997-1020, 1997.
- [14] N. Kazantzis, and C. Kravaris, "Time-discretization of nonlinear control systems via taylor methods, *Comp. Chem. Engn.* pp. 763-784, 1999.
- [15] N. Kazantzis, K. T. Chong, J. H. Park, A. G. Parlos, "Control-relevant discretization of nonlinear systems with time-delay using taylor-lie series", *Journal of ASME*, 2003.
- [16] B. R. Holt, and M. Morari, "Design of resilient processing plants-V.: The effect of deadtime on dynamic resilience." *Chem. Eng. Sci.*, pp. 1229-1237, 1985.



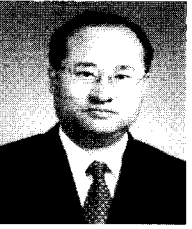
최형조

2002년 전북대학교 기계공학부 졸업. 2002년 8월~현재 전북대학교 대학원 메카트로닉스공학과 재학중. 관심분야는 시간지연 시스템 제어, 네트워크 시스템 제어.



박지향

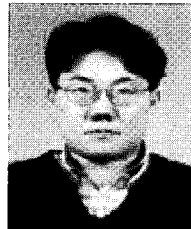
2002년 전북대학교 제어계측공학과 졸업. 2004년 전북대학교 제어계측공학과 대학원 졸업. 2004년 7월~현재 삼성 SDI 근무. 관심분야는 시간지연 시스템 제어, 네트워크 시스템 제어.



정길도

1960년 7월 24일생. 1984년 미국 오레곤 주립대학 기계공학(공학사), 1986년 미국 조지아공대 기계공학과(공학석사). 1993년 미국 텍사스 A&M대학기계공학과(공학박사). 1993년~1995년 영남대학교 기계공학과 전임강사. 1995년~현재 전

북대학교 전자정보공학부 부교수. 관심분야는 시스템규명, 멀티미디어전송, 시간지연 시스템제어, 컴퓨터 네트워크 모델링.



이수영

1964년 10월 2일생, 1988년 2월 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사), 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학석사), 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학박사), 1995년 3월~1999년 8월 한국과

학기술연구원 휴먼로봇연구센터 선임연구원, 1997년 2월-1998년 2월 Univ. of Southern California, Dept. of CS, Post Doc. 1999년 9월-현재 국립전북대학교 전자정보공학부 조교수. 관심분야는 인간형 로봇, 이동 로봇, 지능 제어.