

불감시간을 갖는 Affine 시스템의 안정도 해석과 제어기 설계

Controller Design and Stability Analysis of Affine System with Dead-Time

변 황 우*, 양 해 원
(Hwang-Woo Byun and Hai-Won Yang)

Abstract : The Nyquist robust stability margin is proposed as a measure of robust stability for systems with Affine TFM(Transfer Function Matrix) parametric uncertainty. The parametric uncertainty is modeled through a Affine TFM MIMO (Multi-Input Multi-Output) description with dead-time, and the unstructured uncertainty through a bounded perturbation of Affine polynomials. Gershgorin's theorem and concepts of diagonal dominance and GB(Gershgorin Bands) are extended to include model uncertainty. Multiloop PI/PID controllers can be tuned by using a modified version of the Ziegler-Nichols (ZN) relations. Consequently, this paper provides sufficient conditions for the robustness of Affine TFM MIMO uncertain systems with dead-time based on Rosenbrock's DNA. Simulation examples show the performance and efficiency of the proposed multiloop design method for Affine uncertain systems with dead-time.

Keywords : stability margin, robustness, dead-time, GBM(gershgorin band method), affine TFM MIMO system, RM-PI/PID (robust multiloop-PI/PID)

I. 서론

제어 시스템의 해석에 있어서 모델링의 어려움은 가정한 모델의 불확실성에 기인한다. 이 경우 보통 경계된 놈(norm)으로 불확실성에 대한 섭동들을 표현하곤 한다. 구조화된 섭동들은 구조화된 블록들[1,2] 또는 매개변수의 불확실성[3]에 의해 표현된다. 이러한 불확실한 섭동은 플랜트의 미지의 특성인 외란과 액츄에이터, 센서 등의 오작동으로 인한 잡음으로 표현된다. 공정계통에서 대부분 존재하는 불감대(dead band) 또한 이러한 섭동으로 볼 수 있으며 이는 안정도를 저하시키고 제어에 여러 어려움을 발생시키곤 한다. 비구조적인 불확실성에 대한 논의는 1980년대 초반에 강인한 안정성 문제를 주파수 영역에서 해석한 Zames의 H_∞ 제어 이론[4]와 상태공간에서 두 개의 대수 리카티 방정식(algebraic Riccati equation)을 풀어 H_∞ 노음(noise)을 최소화하는 강인한 안정성의 해를 제시한 Glover 와 Doyle의 제어 이론[5], 그리고 플랜트의 불확실성에 대해 페루프 전달함수의 주파수 응답 크기가 허용 변동 범위 내에 놓이도록 니콜스 선도와 보드 선도에서의 loop shaping을 이용하여 설계하는 방식인 QFT (Quantitative Feedback Theory) 제어이론[6] 등에 의해 발전되어 왔다.

한편, 실구간(real intervals)에서 전달함수의 매개변수들은 구조화된 불확실성으로 표현될 수 있으며 이는 Kharitonov에 의해 잘 알려져 있다[3]. Kharitonov 이론은 고정된 구간에 있어서 분모·분자 다항식의 계수가 변하는 구간 플랜트(interval plant)로부터 파생된 Kharitonov 플랜트 집합의 안정도를 결정하는데 사용되고 있으며, Barmish[7], Bartlett[8]을

통해 발전되어져 왔다.

특히, 구간 다항식에 대한 불확실한 매개변수의 강인제어 이론은 90년대 중반 이후로 Bhattacharyya[9], Djaferis[10], Ackerman[11] 등에 의해 체계적으로 연구되었다. 이러한 구간 플랜트는 강인한 안정도 문제를 해결하는데 있어서 유용하게 사용되고 있으며 이 경우 각각의 플랜트 계수들이 하나 이상의 불확실한 매개변수에 의존하는 Affine 플랜트가 될 수 있다. 불확실한 Affine 플랜트에 대한 Kharitonov의 접근은 직접적이지는 않지만 Fu[12]는 Affine 불확실성을 갖는 플랜트들에 대해 Nyquist 평면에 있어서 전체의 불확실성 값 집합을 정량화하였다.

Rosenbrock은 Nyquist 안정도와 설계개념을 통해 SISO PID 설계법을 MIMO 시스템으로 확대하였으나 수동적인 시행착오법의 설계방법을 사용하였다[13]. 이에 비해 Hu와 Xu는 DNAM (Direct Nyquist Array Method)을 이용하여 다변수 PID 제어를 자동적으로 구성하는 방법을 제안하였다[14]. 한편, 이들이 사용한 플랜트는 모두 선형·시불변 특성을 갖는 시스템으로 고정된 매개변수를 갖는 시스템이다.

본 논문에서는 그동안 상기한 연구자 등에 의해 수행되었던 SISO 구간 다항식의 안정도 문제를 불감시간(dead-time)을 갖는 Affine MIMO 플랜트를 대상으로 하여 수행하였으며 이를 통해 LTI(Linear Time Invariant) 시스템에 머물렀던 DNA 연구를 불감시간을 갖는 불확실한 Affine TFM MIMO 시스템으로 확장하여 안정도 여유(stability margin)와 강인성을 분석하였다. 또한 기존의 GBM 방식은 위상교차 주파수만을 구하여 제어를 구성하는 한계감도법(ultimate sensitivity method)을 주로 사용하였으나 본 논문에서는 위상교차 주파수와 이득교차주파수를 모두 사용하여 자동적으로 제어기 계수를 설계하는 강인한 다중 루프 PI/PID 제어기(RM-PI/PID: Robust Multiloop-PI/PID Controller)를 설계하였다. 특히, 불감시간이 이득여유와 위상여유에 어떠한

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2004. 11. 18., 채택확정 : 2005. 1. 2.

변황우 : 한양대학교 전기공학부(byunhwoo@suncheon.ac.kr)

양해원 : 한양대학교 전자컴퓨터공학부(hwyang@email.hanyang.ac.kr)

영향을 미치는지를 DNA 및 GB 분석을 통하여 정량적으로 규명하였으며 제어기의 안정도와 강인성 분석을 위하여 대 각 지배 이론[20], DNA 안정도 이론[13], 안정도 정리[21] 등을 사용하였다. 모의실험을 통해 전통적인 ZN법과 IMC (Internal Model Controller) 동조법보다 우수한 성능(오버슈트의 감소, 빠른 응답)을 보이는 것으로 알려진 Tyreus-Luyben 이 제안한 TL 동조법[15]과의 비교분석을 통해 본 논문에서 제시한 설계의 유효성을 검증하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 1장은 서론이며 2장은 불감시간을 갖는 Affine TFM MIMO 시스템과 일반화 GBM에 대한 정의, 안정도 여유를 기술하고 있다. 3장은 GBM을 이용한 다중 루프 PI/PID의 제어기 설계, 이득여유와 위상 여유 계산, 강인성 해석을 위한 안정도 이론 등을 기술한다. 4장에서는 이에 대한 모의실험을 수행하고 5장으로 본 논문의 결론을 맺는다.

II. Affine 시스템과 일반화 GBM, 안정도 여유

1. 불감시간을 갖는 Affine TFM MIMO 시스템

측정에서의 지연, 또는 제어기 동작에서의 지연, 작동기에서의 지연 등을 운반지연(transport lag) 또는 불감시간(dead time)이라고 한다. 불감시간은 일반적인 전달함수의 분자요소에 지연요소 e^{-Ls} 가 부가되는 형태로 존재하며 시스템은 지연요소가 없을 때의 경우에 비해 응답특성이 변하게 된다. 이러한 불감시간 현상은 공정제어의 대부분에 존재하는 특성으로 안정도가 나빠지고 제어하는데 여러 가지 어려움을 발생시킨다.

한편, 불확실한 매개변수를 갖는 시스템은 보통 4가지로 구분할 수 있다. 이는 구간 다항식(interval polynomials), Affine 선형 불확실성 구조(affine linear uncertainty structure), 다중 Affine 불확실성 구조(multiaffine uncertainty structure), 다항식 형태의 불확실성 구조(polynomial uncertainty structure)의 형태를 갖는다. 본 논문에서는 그 중에 불감시간을 갖는 Affine 선형 시스템을 고려한다.

일반적으로 선형 Affine 플랜트의 DNA는 Nyquist로서 정의되며 다중 루프에 대한 설계와 안정도 분석을 위해 유용한 이론의 기초를 제공한다. 또한 전통적인 DNAM에 대한 제어기 설계에 있어서는 도식적인 시행오차 접근법을 사용하는 GBM을 형상화함으로써 얻어진다[13].

분모·분자 다항식 함수들의 계수들이 섭동벡터 p 에 Affine하게 의존하는 함수로서 Baab[16]등이 정의한 유한 차원을 갖는 선형, 시불변 SISO 시스템을 가정한다.

$$g(s, p) = \frac{n_0(s) + \sum_{i=1}^k p_i(s)n_i(s)}{d_0(s) + \sum_{i=1}^k p_i(s)d_i(s)} \cdot e^{-Ls}, p \in Q \quad (1)$$

여기서 $n_0(s)$ 와 $d_0(s)$ 는 공칭 다항식들이고 $n_i(s)$ 와 $d_i(s)$ 는 섭동 다항식들이다. 그리고 $p = [p_1, p_2, \dots, p_k]^T$ 는 경계된 4차 다각형에 속하는 섭동 벡터로서 $Q = \{p \in R^k \mid p_i^- \leq p_i \leq p_i^+, i = 1, 2, \dots, k\}$ 로 주어진다. 여기서 p_i^- 는 섭동 벡터의 최소값, p_i^+ 는 섭동 벡터의 최대

값을 표현한다.

(1)의 불감시간을 갖는 불확실한 Affine 시스템을 전달함수 벡터 행렬형태(vector-matrix form)로 표현하면 다음처럼 표현된다.

$$g(s, p) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^v \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} n_{00} \\ n_{10} \\ \vdots \\ n_{v0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{01} & n_{02} & \dots & n_{0k} \\ n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n_{v1} & n_{v2} & \dots & n_{vk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} \right)}{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^n \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} d_{00} \\ d_{10} \\ \vdots \\ d_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0k} \\ d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} \right)} \cdot e^{-Ls} \quad (2)$$

$$= \frac{s_n^T(n_0 + n_k \cdot p)}{s_d^T(d_0 + d_k \cdot p)} \cdot e^{-Ls}$$

여기서 s_n 과 s_d 는 라플라스 변수 s 의 거듭제곱(powers)을 포함하는 $v+1$ 과 $n+1$ 의 차원을 갖는 벡터들이다. 또한, $n_0 \in R^{v+1}$, $d_0 \in R^{n+1}$ 과 $n_k \in R^{(v+1) \times k}$, $d_k \in R^{(n+1) \times k}$ 는 Affine 매개변수의 불확실성 구조를 표현하는 상수들이다.

(2)는 불감시간을 갖는 Affine SISO 전달함수를 표현한 것으로 이것을 Affine TFM $g(s) = [g_{rc}(s)]_{z \times z}$; $r, c = 1, \dots, z$ MIMO 시스템으로 확장하면 (3)이 된다.

$$g(s, p) = [g_{rc}(s, p)]_{z \times z} = \begin{bmatrix} g(s, p)_{11} & g(s, p)_{12} & \dots & g(s, p)_{1z} \\ g(s, p)_{21} & g(s, p)_{22} & \dots & g(s, p)_{2z} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g(s, p)_{z1} & g(s, p)_{z2} & \dots & g(s, p)_{zz} \end{bmatrix} \cdot e^{-Ls} \quad (3)$$

2. 일반화 GBM

1931년에 발견된 Gershgorin Circle 정리는 복잡한 정사각행렬의 고유값을 계산에 의하지 않고 단지 행렬의 성분들을 이용하여 그려지는 원들을 이용하여 고유값이 존재하는 영역과 그의 위치를 복소평면 위에 나타낼 수 있는 근거를 제공한다. 따라서 Gershgorin 정리는 2개의 정리로 구성되어 있으며, 제 1정리는 행렬의 주 대각선의 성분들을 중심으로 하고 주 대각선 성분 각각에 대하여 그 성분이 있는 행의 나머지 성분들의 절대값의 합을 반지름으로 하는 원들 안에 그 행렬의 고유값이 모두 놓인다는 정리이다. 제 2정리는 n 차 정사각행렬 A 의 Gershgorin Circle들 중에서 서로 소가 아닌 k 개의 A 의 Gershgorin Circle이 있으면 이런 원 k 개들의 합집합 내부에 k 개의 A 의 고유값이 존재한다는 정리이다.

한편, 일반화 GBM을 해석하기 위해 다음 그림 1의 제어 시스템을 구성한다.

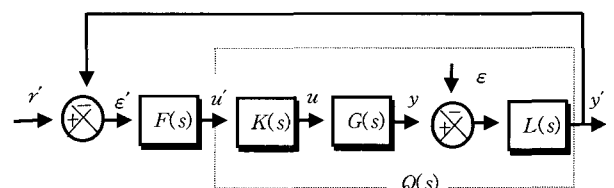


그림 1. 일반화 GBM에서의 제어계.

Fig. 1. Control system in generalized GBM.

그림 1에서 사용된 $G(s)$ 는 제어대상, $F(s)$ 는 $diag(f_i(s))$ 로 주어지는 주보상기, $K(s)$ 는 $k_{ij}(s)$ 을 갖는 외란 제거용 전치 보상기, $L(s)$ 는 $l_{ij}(s)$ 를 갖는 후치 제어기, $Q(s)$ 는 의사 제어대상 (pseudo plant)이다. 즉,

$$Q(s) = L(s)G(s)K(s) = \begin{bmatrix} q_{11}(s) & \dots & q_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1}(s) & \dots & q_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}, r' = \begin{pmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ r'_m \end{pmatrix}, \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_m \end{pmatrix} \quad (5)$$

이다. $u'_i, y'_i, r'_i, \varepsilon'_i$ 는 각각 i 번째 조작량, 제어량, 목표값, 편차이며 u, y, r, ε 는 각각 의사 조작량 벡터, 의사 제어량 벡터, 의사 목표값 벡터, 의사 편차 벡터이다. i 루프의 주보상기 $f_i(s)$ 만을 제거한 시스템의 u' 에서 y' 로의 전달함수를 $h_i(s|F)$ 로 나타내면

$$h_i(s|F) = q_{ii}(s) + \eta_i(s|F) \quad (6)$$

$$\eta_i(s|F) = -v^T_i(s|\bar{i})F(s|\bar{i})(I + Q(s|\bar{i})F(s|\bar{i}))^{-1}w_i(s|\bar{i})$$

이다. 단, $Q(s|\bar{i}), F(s|\bar{i})$ 는 $Q(s), F(s)$ 의 제 i 행, i 열을 제거해서 얻어지는 $(m-1)$ 차 정방행렬, $v^T_i(s|\bar{i})$ 는 $Q(s)$ 의 i 행에서 요소 $q_{ii}(s)$ 를 제거해서 얻어지는 $(m-1)$ 차 행벡터, $w_i(s|\bar{i})$ 는 $Q(s)$ 의 i 열에서 요소 $q_{ii}(s)$ 를 제거해서 얻어지는 $(m-1)$ 차 열벡터이다.

한편, 양 또는 0의 수 $e_1(s), \dots, e_m(s)$ 를 m 차 정방 행렬

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & |q_{12}| & \dots & |q_{1m}| \\ |q_{21}| & 0 & \dots & |q_{2m}| \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ |q_{m1}| & |q_{m2}| & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이 반 M -행렬이 되도록 고른다. 여기서 반 M -행렬이란 비대각 요소가 (-) 또는 0이고 주좌 소행렬(leading principle minor)이 모두 양 또는 0인 실정방(positive real) 행렬인 경우이다.

한편, 일반화 GBM에 따르는 정리로 Araki의 정리[17]의 정리가 있다. Araki의 정리는 i 번째 이외의 루프 주보상기 $f_j(s)$ 가 $|f_j(s)^{-1} + a_{jj}(s)| > e_j(s)$ ($j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$)을 만족시키면 i 루프 개루프 전달함수 $h_i(s|F)$ 와 $q_{ii}(s)$ 의 차 $|\eta_i(s|F)|$ 가 (8)로 주어져 $h_i(s|F)$ 와 f_i 의 곱의 벡터궤적이 어느 범위에 있는지를 알 수 있다는 정리이다.

$$\begin{aligned} |\eta_i(s|F)| &< e_i(s) \quad (e_i(s) > 0 \text{인 경우}) \\ &= 0 \quad (e_i(s) = 0 \text{인 경우}) \end{aligned} \quad (8)$$

또한, Gershgorin Band는 일반화 Gershgorin 원판($\mathcal{S}_i(jw)$)의 중심이 $f_i(jw)q_{ii}(jw)$ 이고 반지름이 $|f_i(jw)|e_i(jw) = \lambda(jw|Q)|f_i(jw)q_{ij}(jw)|$ 으로 주어지는 경우 w 가 $-\infty$ 로부터 ∞ 까지 변화할 때 $\mathcal{S}_i(jw)$ 의 궤적(Γ_i)을 말하며, 여

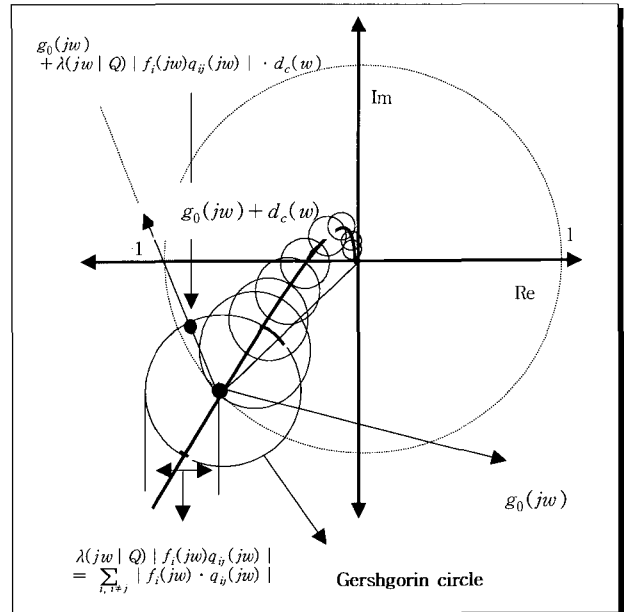


그림 2. 임계섭동 반경과 안정도 여유.

Fig. 2. Stability margin and critical perturbation radius.

기서 λ 는 정방행렬 $\zeta_i(jw) = q_{ij}(s)/q_{jj}(s)$ ($i, j=1, \dots, m, i \neq j$)의 최대 고유값 또는 Frobenius-Perron의 근을 일컫는다.

3. GBM을 이용한 안정도 여유

안정도여유는 시스템모델의 불확실성에 대해서 안정한 정도를 나타내는 상대적 지표로서 이득여유와 위상여유로 표시한다. 일반적으로 바람직한 안정도여유는 이득여유 6[dB] 이상, 위상여유 30~60°으로 알려져 있으며 그 계통이 외란이나 기준값의 변화가 있을 때 미리 정의된 정상상태값을 유지할 수 있다면 그 시스템은 안정도 여유가 있다고 할 수 있다[18].

한편, 그림 2에서 나타난 임계방향(critical direction)과 임계섭동 반경(critical perturbation radius)을 보고 Baab이 주장한 안정도 여유[16]을 구하면 다음과 같다. (1)처럼 정의된 SISO 시스템을 공칭값과 섭동으로 분류하여

$$g_0(s) = n_0(s)/d_0(s), \Delta(s) = \sum_{i=1}^k n_i(s)/\sum_{i=1}^k d_i(s) \quad (9)$$

으로 하면 다음처럼 안정도 여유 $k_N(w)$ 을 정의할 수 있다.

$$k_N(w) = \frac{\lambda(jw|Q)|f_i(jw)q_{ij}(jw)|}{|1 + g_0(jw)|} \quad (10)$$

또한 임계방향 $d_c(jw)$ 를 $-1 + g_0(jw)/|1 + g_0(jw)|$ 으로 하고 임계섭동 반경 $\lambda(jw|Q)|f_i(jw)q_{ij}(jw)|$ 과 $\zeta(jw)$ 을 정의하면 다음처럼 정의된다.

$$\begin{aligned} &\lambda(jw|Q)|f_i(jw)q_{ij}(jw)| : \\ &= \max_{\alpha \in R^+} \{ \alpha \mid z = g_0(jw) + \alpha d_c(jw) \in V(w) \} \\ &= \begin{cases} |1 + g_0(jw)| - \zeta(jw) & \text{if } -1 \notin V_c(w) \\ |1 + g_0(jw)| + \zeta(jw) & \text{otherwise} \end{cases} \\ \zeta(jw) &:= \min_{\alpha \in R} \{ |\alpha| \mid z = -1 + \alpha d_c(jw) \in V(w) \} \end{aligned}$$

III. GBM을 이용한 다중 루프 PI/PID 제어기의 설계와 강인성 해석

1. RM-PI/PID 제어기의 설계

PID 제어기의 동조기술은 Ziegler-Nichols(1942)의 한계감도법을 시작으로 Hrone & Reswick(1952)의 전달함수 표현에서 매개변수를 구하는 방법, Yoshikazu & Nishikawa(1984)의 제어기 자동동조법, Astrom & Hagglund(1984)가 제안한 페루프 시스템에서 임계이득과 임계진동주기를 계단입력에 대한 시스템의 진폭과 주파수에 의해 결정하는 방법, Schei(1992)가 제안한 페루프 시스템에서 시스템의 안정도와 성능이 결정되는 제한된 임계주파수에서 제어 매개변수를 결정할 수 있는 방법 등으로 발전하였다. 그 이외에도 Kitamori의 모델매칭 Self-tuning, Kuwata의 개량형 한계감도법, IMC(Internal Model Controller) 설계기술, Cohen-Coon법인 지배극 설계(dominant pole design)가 있으며, 시영역최적화법(time domain optimization methods), 주파수 영역형상(frequency domain shaping), LQG 최적 제어법(optimal control methods)등도 폭넓게 사용되고 있다. 특히, Ho 등은 이득여유와 위상여유를 사용하는 다양한 PID 설계 기술을 공식화하여 IMC, IAE-setpoint, ITAE-setpoint, ISE-setpoint, IAE-load, ITAE-load, ISE-load, ZN step response, ZN ultimate cycling, Cohen-Coon 등을 분석하였다[19].

일반적인 GBM 설계법은 입력력 쌍 $G(s)$ 의 결정, λ 를 작게 하기 위한 $Q(s) = L(s)G(s)K(s)$ 의 근사 대각화, GBM 및 $f_i(s)h_i(s|F)$ 의 벡터제적(이득 위상 곡선)을 사용한 주보상기의 설계, 외란 억제 · 목표값 응답 · 루프간 상호간섭 · 안정도 여유의 검토를 통한 성능평가 등으로 구성된다. 제어기 설계 절차 중에서 제일 중요한 것이 주보상기 설계이다. 가장 간단한 방법은 복소 평면상에 일반화 Gershgorin 원판 $\sigma_i(j\omega)$ 을 그린 후 원판의 가장자리와 음의 실축과의 교점 $(-x_i, 0)$ 과 대응 주파수 w_i 를 구하여 $\epsilon_i = 1/x_i$, $T_i = 2\pi/w_i$ 의 관계를 이용하여 제어기를 구성하는 한계감도법(ultimate sensitivity method)이 있다. 이 방법보다 좀더 정밀한 방법은 Nichols 설계법을 이용하는 것이다. 이 방법은 주보상기를 P제어기로 하여 $f_i(s)h_i(s|F)$ 의 이득 위상곡선이 모두 $M_p = \alpha$ (프로세스에 대한 페루프 이득곡선의 피크값의 기준량)의 조건을 만족하도록 이득을 조정한다. 다음으로 각 루프에 대해 $f_i(s)h_i(s|F)$ 의 이득 위상곡선과 위상각 $= -180^\circ$ 직선과의 교점에 대한 각 주파수 w_i 를 구하여 $T_i = 2\pi/w_i$ 의 관계를 통해 P제어 일 때의 안정한계에 대한 지속진동주기로 간주하여 각 루프 조절계의 적분시간 · 미분시간을 결정하는 방식이다.

한편, 개루프 상태에서 시스템의 계단응답특성에 기초를 두는 Ziegler-Nichols 동조 형태에 따르면 제어기 계수는 (11)이 되며, 여기서 K_{cr} , P_{cr} 는 최대이득 및 최대 진동주기를 뜻한다. 본 논문에서의 제어기 매개변수는 주파수를 사용한 수정된 Ziegler-Nichols 동조 규칙을 따르며 제안한 RM-PI/PID 설계법은 시스템 주파수 응답에 기초한다.

$$K_j = 0.45 \frac{K_{cr}}{f}, T_i = \frac{2\pi}{1.2w} f = 0.83P_{cr} \text{ (RM-PI)}$$

$$K_j = 0.6 \frac{K_{cr}}{f}, T_i = \frac{\pi}{w} f = 0.5P_{cr}, T_{Dj} = \frac{\pi}{4w f} = 0.125P_{cr} \text{ (RM-PID)} \tag{11}$$

여기서 $P_{cr} = 2\pi/w$ 의 관계를 만족한다. 한편, (11)의 제어기 계수들은 다음의 2절에서 설명하게 될 이득여유 및 위상여유와 다음의 관계를 갖는다. 즉, 이득여유와 위상여유는 (22)-(25)처럼 플랜트와 제어기 함수로 표현되며 이들은 각각 4개의 값 w_{pi} , w_{gi} , K_j , T_{Dj} 를 포함한다. 그래서 이들 4개의 수식에 포함된 w_{pi} , w_{gi} , K_j , T_{Dj} 의 값은 Newton-Raphson법과 Gauss 소거법을 사용하여 구할 수 있으며 이에 따라 (11)의 제어기 값은 자동적으로 구해진다. 만약 이득여유와 위상여유가 달라지면 w_{pi} , w_{gi} , K_j , T_{Dj} 의 값은 자동적으로 변하게 된다.

본 논문은 모의실험을 통하여 불감시간을 포함한 경우와 그렇지 않은 경우에 대해 이득여유와 위상여유의 변화를 정량적으로 구했고 이에 따른 제어기 변화를 살펴보았다. 결국, 본 논문에서 제안한 MIMO 플랜트에 대해 강인한 다중 루프 제어기 RM-PID를 설계하기 위해서 제안된 설계법을 요약하면 다음과 같다. i) 대각 지배(diagonally dominant)인 프로세스를 결정하고 그렇지 못하면 대각지배로 준비된 예비 보상기(pre-compensator)를 설계한다. ii) 임계주파수에서의 이득여유와 위상여유를 구한다. 만약 주 보상기 $F(s)$ 가 사용된다면 시스템은 $G(s)$ 대신에 $G(s)F(s)$ 를 고려하여야 한다. iii) 각각의 루프에 대해 PID 계수 값을 산출하는 수정된 Ziegler-Nichols의 동조법을 사용하여 구현하며 자동 적용기술은 자동 동조(auto-tuning) PID를 사용한다. 상기한 대각지배는 Etfhymios & Neil의 대각지배 이론[20]으로 설명될 수 있다. 이는 Affine TFM을 $g(s) = [g_{rc}(s)]_{n \times n}$ 으로 놓고 $T(s)$ 를 행렬 $T(s) = g(s) (\text{diag}[g(s)])^{-1}$ 이라고 가정한 경우, $T(s)$ 의 Frobenius-Perron의 고유치(eigenvalue)가 나이퀴스트 일주주위에 모든 주파수들에 있어서 2보다 적다면 TFM $g(s)$ 는 일반화된 대각 지배임을 뜻한다는 이론이다.

2. GBM을 이용한 이득여유 및 위상여유의 계산 및 안정도 이론

GB를 통해 PI/PID 제어기를 설계하기 위해 제어기 전달함수 행렬 $F(s)$ 를 다음처럼 가정한다.

$$F(s) = \text{diag} [f_1(s), \dots, f_j(s)], (j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, m) \tag{12}$$

여기서 $f_j(s)$ 는 PI/PID 제어기함수로서 다음으로 주어진다.

$$f_j(s) = K_j(1 + \frac{1}{sT_{Dj}}) \text{ (PI)} \tag{13}$$

$$f_j(s) = K_j(1 + \frac{1}{sT_{Dj}} + sT_{Dj}) = \frac{K_j}{sT_{Dj}} (\frac{1}{2} sT_{Dj} + 1)^2 \text{ (PID)}$$

여기서 $T_{Dj} = \frac{1}{4} T_i$ (Ziegler-Nichols method)이다. 그림 3을 통하여

$$\phi'_m = \pi - \angle B, A'_M = \frac{1}{|C|} \tag{14}$$

이며, r_1 은 이득교차주파수에서 Gershgorin 원판의 반지름

이고 c_1 은 Gershgorin 원판의 중심이다. 이론적으로 SISO 시스템에서 안정하기 위한 조건은 (14)처럼 단지 2개의 점들(B, C)로 정의되는 이득여유(A'_M), 위상여유(ϕ'_m)가 $(-1+j0)$ 을 포함하지 않아야 한다. 한편, 주어진 플랜트의 공칭점에서의 이득여유(A_M), 위상여유(ϕ_m)는 (15), (16)으로 표현된다.

$$\phi_m = \phi'_m + \sin^{-1} \frac{\sum_{i,j \neq i} |f_i(jw) \cdot q_{ij}(jw_{gi})|}{|f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw_{gi})|}$$

$$\cong \phi'_m + 2 \sin^{-1} \frac{\sum_{i,j \neq i} |g_{ij}(jw_{gi})|}{2 |g_{ii}(jw_{gi})|}$$
(15)

(15)의 후반부는 근사 대각화에 따라 λ 가 작아지도록 (4)의 $Q(s) = L(s)G(s)K(s)$ 를 결정하면 (즉, $L(s) = K(s) = I$) 성립하는 식이다.

$$\frac{1}{A'_M} = \sum_{i,j \neq i} |f_i(jw) \cdot q_{ij}(jw_{pi})| + |f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw_{pi})|$$

$$\left(|f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw_{pi})| = \frac{1}{A_M} \right)$$

$$A_M = \frac{1}{\frac{1}{A'_M} - \sum_{i,j \neq i} |f_i(jw) \cdot q_{ij}(jw_{pi})|}$$
(16)

$$A_M = \frac{1}{\frac{1}{A'_M} - \sum_{i,j \neq i} |f_i(jw) \cdot q_{ij}(jw_{pi})|}$$
(17)

$f_i(jw) \cdot q_{ii}(s) = g_i(s)f_i(s)$, $|f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw)| = \frac{1}{A_M}$ 이므로

$$A_M = \frac{1}{|f_i(jw) \cdot q_{ii}(jw_{pi})|} = \frac{1}{|g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi})|}$$
(18)

$\phi_m = \pi + \angle q_{ii}$ 이므로

$$\phi_m = \pi + \angle(g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi}))$$
(19)

$$|g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi})| = 1$$
(20)

$$\angle(g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi})) = -\pi$$
(21)

이 되며, (17)과 (18)이 같으므로

$$A_{M,i} = \frac{1}{|g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi})|} - A'_M \left(1 + \frac{\sum_{i,j \neq i} |g_{ij}(jw_{pi})|}{|g_{ii}(jw_{pi})|} \right) = 0$$

$$A_{M,i} = A'_M |f_i(jw_{pi})| \left(|g_{ii}(jw_{pi})| + \sum_{i,j \neq i} |g_{ij}(jw_{pi})| \right) - 1 = 0$$
(22)

이 된다. (15)과 (19)이 같으므로

$$\phi_{m1,i} = \pi + \angle(g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi}))$$

$$- \phi'_m - 2 \sin^{-1} \frac{\sum_{i,j \neq i} |g_{ij}(jw_{gi})|}{2 |g_{ii}(jw_{gi})|} = 0$$
(23)

이 되고, (20)식을 제공하여 정리하면

$$|g_{ii}(jw_{gi})f_i(jw_{gi})|^2 = 1$$
(24)

$$A_{M2,i} = |g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{gi})|^2 - 1 = 0$$

이 된다. 또한 (22)을 정리하면

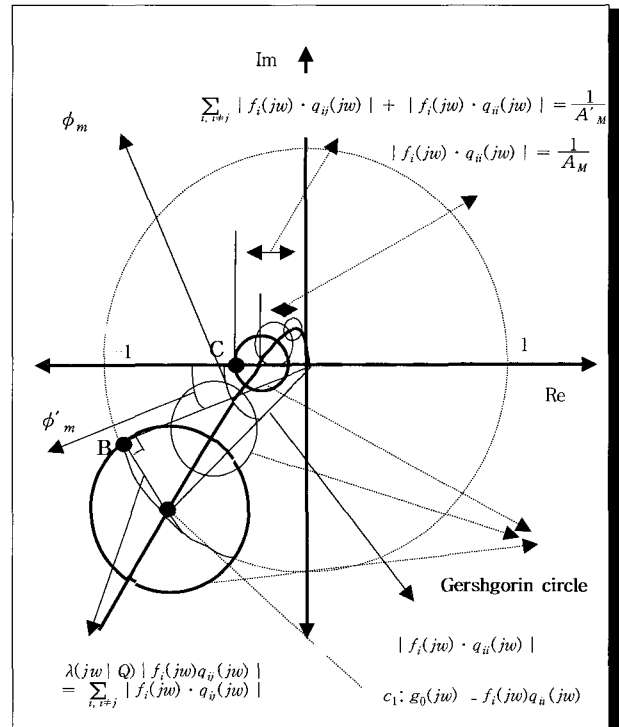


그림 3. 이득교차 주파수(w_{gi})와 위상교차 주파수(w_{pi})에서의 GB를 갖는 안정도여유 및 Nyquist 선도.

Fig. 3. Nyquist diagram and stability margin with Gershgorin band at gain-crossover frequency(w_{gi}) and phase-crossover frequency(w_{pi}).

$$\phi_{m2,i} = \angle(g_{ii}(jw_{pi})f_i(jw_{pi})) + \pi = 0$$
(25)

이 되며, (15)과 (17), 그리고 (4)과 (13)을 (22)-(25)에 대입하여 w_{pi} , w_{gi} , K_b , T_b 를 구할 수 있으며 이는 Newton-Raphson법과 Gauss 소거법을 사용하여 구한다. 한편, 이득교차 주파수 w_{gi} 와 위상 교차 주파수 w_{pi} 를 구하는 과정은 참고문헌 [22]을 참조하기 바란다.

Affine 시스템의 강인성 해석을 해석하기 위해서는 다음의 안정도 이론을 고려하여야 한다. 그것은 DNA (Direct Nyquist Array) 안정도 이론[13]으로 불리고 있는 것으로 이는 다음의 두 조건이 만족하면 그림 1의 폐루프 제어계가 안정하다는 이론이다. 즉, DNA 안정도 이론은 $Q(s)$ 의 불안정한 극의 수를 μ_0 로 하고 $f_i(jw)q_{ii}(jw)$ 의 벡터궤적이 점 $(-1,0)$ 주위를 반시계 방향으로 도는 횟수를 μ_i 로 할 때 $\sum_{i=1}^m \mu_i = \mu_0$ 이 성립하여야 한다는 조건과 모든 일반화 GB 궤적 Γ_i 이 점 $(-1,0)$ 을 포함하지 않는다는 조건이 그것이다. 또한 Larchman과 Crisalle의 안정도 이론[21]에 따르면 $g(s)$ 가 (1)처럼 주어지고 $g_0(s)$ 가 단위 피드백 하에서 안정한 경우, 만약 $g(s)$ 와 $g_0(s)$ 가 같은 수의 개 루프 불안정한 극들을 갖는다면 불확실한 폐루프 시스템은 $k_N(w) < 1, \forall w$ 에서 단위 피드백 하에 안정하다는 결론을 얻는다.

한편 불감시간이 안정도에 미치는 영향을 살펴보면 불감

시간 시정수 L 이 클수록 안정도가 나빠지고 제어하는데 여러 가지 어려움을 발생시킨다는 점과 큰 불감시간을 가진 시스템에서는 위상지연이 크다는 점 그리고 어떤 시각에서 앞의 시스템의 거동이 과거의 입력 및 그 이후의 입력뿐만 아니라 그 시각까지의 어떤 기간에 있어서 시스템의 거동 자체에도 의존한다는 것이다. 이러한 것은 불감시간을 포함하는 시스템의 상태가 무한 차원인 것을 의미하고 그 점에서 분포상수 시스템의 일종이라고 생각하는 쪽이 좋은 경우가 많다. 사실 어떤 종류의 분포상수 시스템은 입력력사이에 불감시간이 존재한다. 불감시간을 포함한 시스템의 안정도를 평가하는 방법은 성능레벨을 비교하는 방법이 있다. 이는 성능 레벨(performance level) δ 가 "0"보다 큰 값으로 주어진 경우 모든 $\omega \geq 0$ 과 $p \in P$ 에 대해 필요 충분조건으로 (26)이 주어진다면 (27)을 만족해야 한다는 것이다.

$$\left| \frac{n_i(j\omega, p^*)}{d_i(j\omega, p^*)} \cdot e^{-Ls} \right| < \delta \quad (26)$$

$$\max_{p \in P} \|g(j\omega, p^*) \cdot e^{-Ls}\|_\infty < \delta \quad (27)$$

즉, 주파수 ω 가 ∞ 로 증가하면 $|g(j\omega, p^*) \cdot e^{-Ls}|$ 는 'zero'로 감소하기 때문에 이것은 $(n_i(j\omega, p^*) - \delta d_i(j\omega, p^*)) e^{j\phi} \cdot e^{-Ls} \neq 0$ 의 영점 배제 조건(zero-exclusion condition)이 $\omega \in R$ 에 대해, 그리고 $p \in P$ 와 $\phi \in [0, 2\pi]$ 에 대해, (27)식이 만족하는지를 점검해야 한다. 이를 통해 복소 계수 다항식(complex coefficients polynomial) $g_\phi(s, p^*) = (n_i(s, p^*) - \delta d_i(s, p^*) e^{j\phi}) \cdot e^{-Ls}$ 이 모든 $p \in P$ 와 $\phi \in [0, 2\pi]$ 에 대해 개방 좌측 반평면(open LHP)에 근을 가짐을 확인해야 한다.

IV. 모의 실험

본 모의실험에서는 3장에서 논의된 RM-PI/PID를 설계하기 위해 불감시간을 갖는 Affine TFM MIMO 시스템과 안정도 여유를 분석한다.

(1)을 통해 정의된 Affine 플랜트의 정의에 따라서 $i=3$ 인 2×2 형태의 불감시간을 갖는 Affine TFM MIMO 시스템을 고려하자.

$$g(s, p^*) = [g_{rc}(s, p)]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} g(s, p)_{11} & g(s, p)_{12} \\ g(s, p)_{21} & g(s, p)_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} g(s, p)_{11} &= g(s, p)_{11}^{ud} \cdot e^{-2s} \\ &= \frac{1.5 + [-1, 1]}{2.2s^3 + 4.4s^2 + (3.6 + [-1, 1])s + 0.9} \cdot e^{-2s} \\ g(s, p)_{12} &= g(s, p)_{12}^{ud} \cdot e^{-2s} \\ &= \frac{1.5}{1.8s^3 + 4.4s^2 + 4.4s + 0.9 + [-0.5, 0.5]} \cdot e^{-2s} \\ g(s, p)_{21} &= g(s, p)_{21}^{ud} \cdot e^{-2s} \\ &= \frac{1.5}{2.2s^3 + (3.6 + [-3, 3])s^2 + 3.6s + 1.1 + [-0.3, 0.3]} \cdot e^{-2s} \\ g(s, p)_{22} &= g(s, p)_{22}^{ud} \cdot e^{-2s} \\ &= \frac{1.5 + [-0.3, 0.3]}{1.8s^3 + 3.6s^2 + 4.4s + 1.1} \cdot e^{-2s} \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 $g(s, p)^{ud}$ 는 불감시간이 없는(undead-time) 플랜

트를 의미한다. (29)에서 보듯이 불감시간 $T=2[s]$ 로 하고 지연요소 $e^{-j\omega T}$ 에 대한 가장 간단한 근사적인 2차의 Pade 근사법을 사용하면 다음 식을 얻는다.

$$e^{-j\omega T} \approx \frac{1 - \frac{j\omega T}{2} + \frac{(j\omega T)^2}{12}}{1 + \frac{j\omega T}{2} + \frac{(j\omega T)^2}{12}} \quad (30)$$

본 모의실험에서는 Matlab version 5.3을 사용하였고 Control System Toolbox version 4.1의 LTI Viewer를 이용하여 본 실험을 수행하였다.

그림 4는 (29)에 대한 불감시간이 없는 Affine TFM 시스템 $g(s, p)_{11}^{ud}, g(s, p)_{12}^{ud}, g(s, p)_{21}^{ud}, g(s, p)_{22}^{ud}$ 의 Nyquist 선도와 DNA, GB를 그린 것이며, 그림 5는 불감시간이 있는 Affine TFM 시스템 $g(s, p)_{11}, g(s, p)_{12}, g(s, p)_{21}, g(s, p)_{22}$ 의 Nyquist 선도와 DNA, GB를 그린 것이다. 여기서 사용한 GB를 구하기 위해 사용한 주대각선 성분 이외의 절대값의 합은 주대각선 성분의 크기의 1/2로 정하였다.

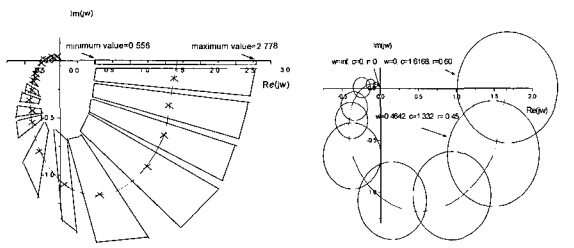
특히, 그림 5는 불감시간을 갖는 플랜트에 대해 주파수 0.01~100[rad/sec]에서 20-30개의 주파수들로 나누어 표시한 것으로 오른쪽 그림은 $g(s, p) = [g_{rc}(s, p)]_{2 \times 2}$ 의 GB를 그린 것이다. 왼쪽 그림은 DNA를 그린 것으로 "x"는 공칭점을 표시한다. 공칭점에서의 값은 (a) 최소값=0.556, 최대값=2.778, (b) 최소값=1.071, 최대값=3.750, (c) 최소값=1.071, 최대값=1.875, (d) 최소값=1.091, 최대값=1.637로 나타나고 있다.

또한 표 1은 불감시간을 갖는 시스템과 불감시간이 없는 시스템의 이득여유와 위상여유를 비교한 것이다. 표 1에서 보면 알수 있듯이 불감시간이 있는 경우는 불감시간이 없는 플랜트에 비해서 이득여유와 위상여유가 작아짐을 알 수 있다. 특이한 것은 위상 교차 주파수의 차이는 없으나 이득교차 주파수의 감소가 나타나고 있다는 점이다. 이는 불감시간 "L"이 증가할수록 크게 나타나고 있다.

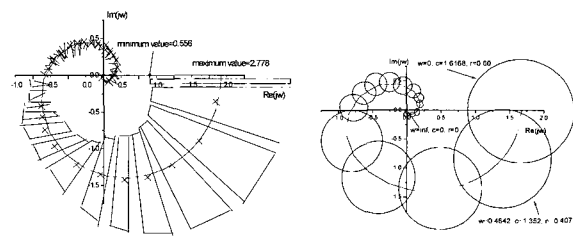
표 1. 불감시간이 없는 Affine TFM MIMO 시스템과 불감시간을 갖는 Affine TFM MIMO 시스템에 대한 이득여유와 위상여유, 위상교차주파수 (w_{pi})와 이득교차주파수 (w_{gi}).

Table 1. Gain margin & phase margin, phase-crossover frequency (w_{pi}) & gain-crossover frequency (w_{gi}) for affine TFM MIMO system with dead-time and affine TFM MIMO system without dead-time.

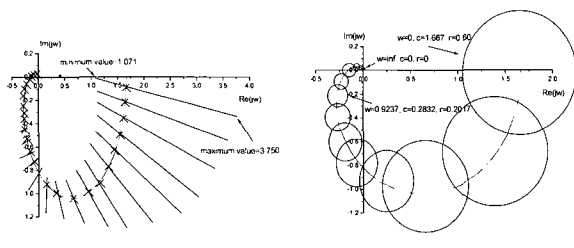
Transfer Function	Gain Margin part		Phase Margin part	
	gain margin [dB]	phase-crossover frequency w_{pi} [rad/sec]	phase margin [deg]	gain-crossover frequency w_{gi} [rad/sec]
$g(s, p)_{11}^{ud}$	4.2000	0.4845	84.9109	1.2792
$g(s, p)_{11}$	1.2067	0.4845	29.4501	0.5974
$g(s, p)_{12}^{ud}$	6.5704	0.3477	104.2069	1.5635
$g(s, p)_{12}$	1.6230	0.3477	64.3788	0.6208
$g(s, p)_{21}^{ud}$	3.1939	0.4736	101.2516	1.2792
$g(s, p)_{21}$	1.2016	0.4736	47.0434	0.6585
$g(s, p)_{22}^{ud}$	5.1333	0.3047	120.6962	1.5635
$g(s, p)_{22}$	1.6541	0.3047	85.7847	0.6767



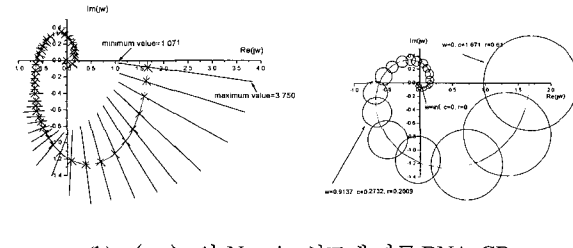
(a) $g(s, p)_{11}^{ud}$ 의 Nyquist 선도에 따른 DNA, GB



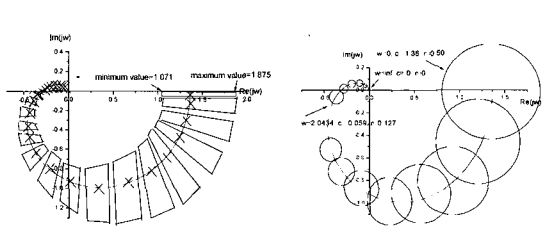
(a) $g(s, p)_{11}$ 의 Nyquist 선도에 따른 DNA, GB



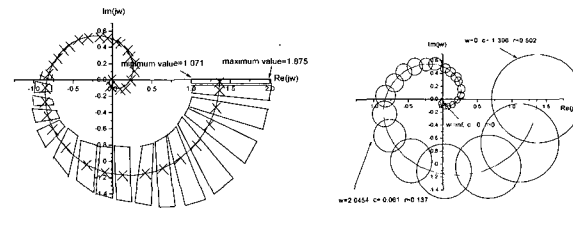
(b) $g(s, p)_{12}^{ud}$ 의 Nyquist 선도에 따른 DNA, GB



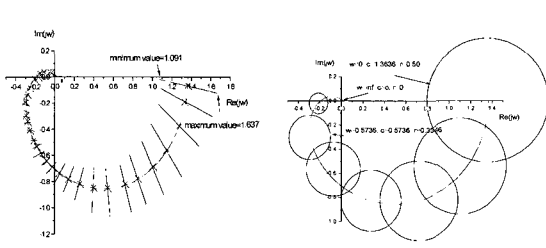
(b) $g(s, p)_{12}$ 의 Nyquist 선도에 따른 DNA, GB



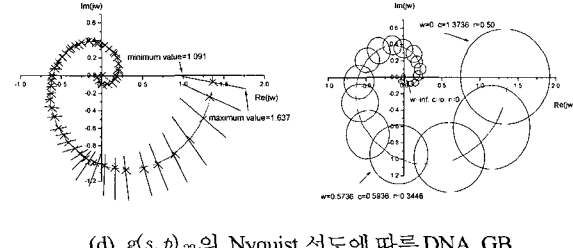
(c) $g(s, p)_{21}^{ud}$ 의 Nyquist 선도에 따른 DNA, GB



(c) $g(s, p)_{21}$ 의 Nyquist 선도에 따른 DNA, GB



(d) $g(s, p)_{22}^{ud}$ 의 Nyquist 선도에 따른 DNA, GB



(d) $g(s, p)_{22}$ 의 Nyquist 선도에 따른 DNA, GB

그림 4. 불감시간이 없는 Affine TFM 시스템에 대한 Nyquist 선도와 DNA, GB.

Fig. 4. Nyquist diagram and GB, DNA for Affine TFM system without dead-time.

Tyresus-Luyben이 제안한 TL-PI 동조법과 본 논문에서 제안한 GBM을 이용한 RM-PI 동조법과의 비교분석을 통해 본 논문에서 제시한 설계의 유효성을 검증하고자 한다. 일반적으로 TL 동조법은 전통적인 ZN법과 IMC 동조법보다 우수한 성능(오버슈트의 감소, 빠른 응답)을 보이는 것으로 알려져 있다[15]. 표 2는 불감시간을 갖는 Affine TFM 시스템에 대해 RM-PI 동조법과 TL-PI 동조법을 사용한 경우의 PI 계수를 비교한 것이다. 본 논문에서는 RM-PI 동조규칙으로

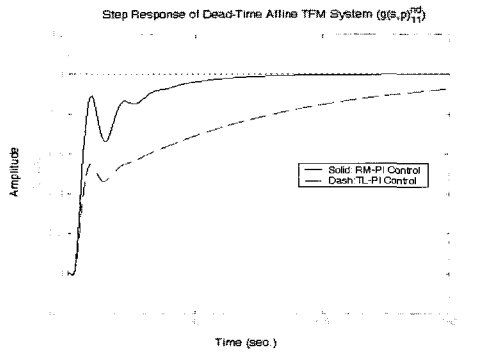
그림 5. 불감시간을 갖는 Affine TFM 시스템에 대한 Nyquist 선도와 DNA, GB.

Fig. 5. Nyquist diagram and GB, DNA for Affine TFM system with dead-time.

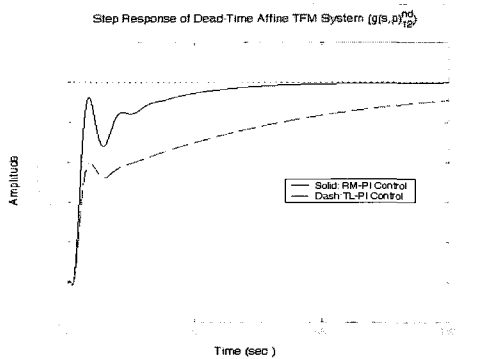
$K_j = 0.45 \cdot K_{cr}$, $T_I = 0.83 \cdot P_{cr}$ 을 사용하고, TL-PI 동조에서는 $K_j = 0.31 \cdot K_{cr}$, $T_I = 2.2 \cdot P_{cr}$ 규칙을 사용하였다.

그림 6은 표 2에 있는 제안된 RM-PI와 TL-PI의 계수를 사용하여 계단응답(step response)을 구한 결과이다.

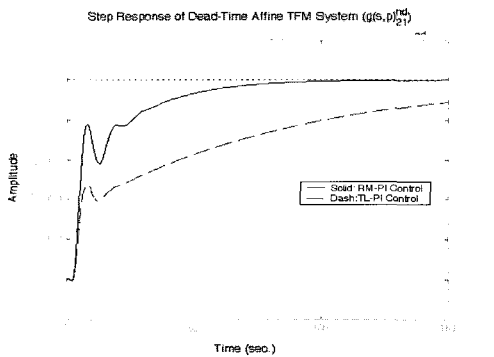
그림 6에서 보면 알 수 있듯이 본 논문에서 제안한 GM 동조법을 사용한 RM-PI 제어는 TL 동조법을 사용한 TL-PI 제어보다 Tracking과 안정도 여유면에서 우수함을 알 수 있다. 이는 표 3에서 알 수 있듯이 제어를 통해 얻어진 이득여유와 위상여유의 비고를 통해서도 확인할 수 있다.



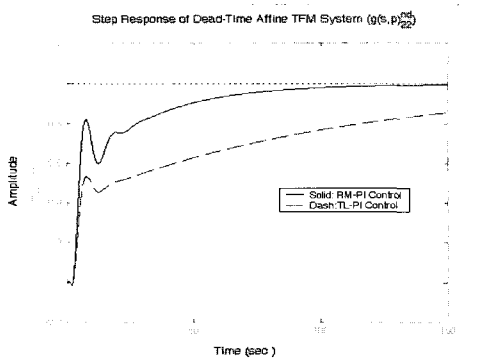
(a) $g(s, p)_{11}$ 의 RM-PI 제어 및 TL-PI 제어의 계단 응답



(b) $g(s, p)_{12}$ 의 RM-PI 제어 및 TL-PI 제어의 계단 응답



(c) $g(s, p)_{21}$ 의 RM-PI 제어 및 TL-PI 제어의 계단 응답



(d) $g(s, p)_{22}$ 의 RM-PI 제어 및 TL-PI 제어의 계단 응답

그림 6. RM-PI 제어 및 TL-PI 제어의 계단 응답 비교
Fig. 6. Step response comparison of TL-PI control PI and RM-PI control.

표 2. 불감시간을 갖는 Affine TFM 시스템의 GM 동조법과 TL 동조법의 PI 계수 비교.

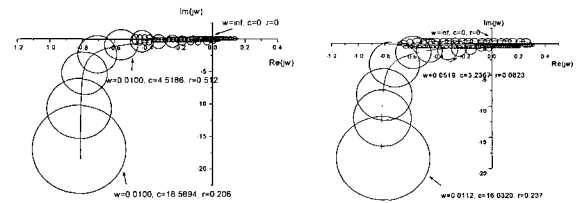
Table 2. PI coefficient comparison of TL tuning and GM tuning.

Tuning Method	Controlled Variable Transfer Function	$K_j (f=1)$	$T_j (f=1)$	K_{cr}	P_{cr}
		proposed RM-PI Tuning	$g(s, p)_{11}$	0.45 K_{cr} 0.5430	0.83 P_{cr} 10.7627
	$g(s, p)_{12}$	0.7304	14.9998	1.6230	18.0720
	$g(s, p)_{21}$	0.5407	11.0125	1.2016	13.2681
	$g(s, p)_{22}$	0.7444	17.1143	1.6541	20.6197
TL-PI Tuning		0.31 K_{cr}	2.2 P_{cr}		
	$g(s, p)_{11}$	0.3741	28.5277	1.2067	12.9671
	$g(s, p)_{12}$	0.5031	39.7584	1.6230	18.0720
	$g(s, p)_{21}$	0.3725	29.1897	1.2016	13.2681
	$g(s, p)_{22}$	0.5128	45.3633	1.6541	20.6197

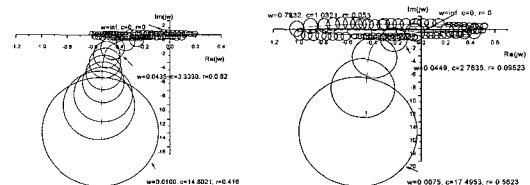
표 3. 제안된 RM-PI 동조와 TL-PI 동조와의 안정도 여유 비교

Table 3. Comparison of stability margin against TL-PI tuning and proposed RM-PI tuning.

Tuning Method	Gain Margin part		Phase Margin part	
	gain margin [dB]	phase-crossover frequency ω_{pi} [rad/sec]	phase margin [deg]	gain-crossover frequency ω_{gi} [rad/sec]
TL-PI Tuning	2.0595	0.1485	97.6462	0.5605
	2.1035	0.2099	86.2213	0.5913
	2.1250	0.0953	107.7356	0.6258
	2.1503	0.1450	109.7418	0.6527
proposed-PI (RM-PI) Tuning	3.1464	0.0278	118.8951	0.5838
	3.1664	0.0375	131.3903	0.6099
	3.1804	0.0202	114.4042	0.6465
	3.1898	0.0215	126.8710	0.6678



(a) 보상된 $g(s, p)_{11}$, $g(s, p)_{12}$ 의 Nyquist 선도와 GB



(b) 보상된 $g(s, p)_{21}$, $g(s, p)_{22}$ 의 Nyquist 선도와 GB

그림 7. 보상된 Affine TFM 시스템에 대한 Nyquist 선도와 GB.
Fig. 7. Nyquist diagram and GB for compensated affine TFM system.

표 4. 보상된 Affine TFM 시스템에 대한 성능지수.

Table 4. Performance index for compensated Affine TFM system.

Transfer Function	PID Controller coefficient				
	$P.O.$	T_s	ζ	α	w_n
$g(s, \rho)_{11}$	5	4	0.71	0.99968	1.408
$g(s, \rho)_{12}$	5	4	0.69	0.99981	1.449
$g(s, \rho)_{21}$	5	4	0.73	0.9937	1.369
$g(s, \rho)_{22}$	5	4	0.75	0.9999	1.333

그림 7은 불감시간을 갖는 Affine TFM 시스템($g(s, \rho)_{11}$, $g(s, \rho)_{12}$, $g(s, \rho)_{21}$, $g(s, \rho)_{22}$)에 대한 보상된 결과를 Nyquist 선도와 GB로 그린 것이다. 그림 7에서는 본 논문에서 제안한 RM-PI/PID 제어기의 설계를 위해 Nyquist 안정도 분석에 기초한 GBM (Gershgorin Band Method)을 사용하여 PID 동조(tuning)를 수행하였다. 또한, 특이한 것은 불감시간의 영향으로 인해 GB값이 주파수가 증가함에 따라 감소하는 비율이 특정한 주파수($\omega=0.7232[\text{rad/sec}]$)에서 일시적으로 값이 증가한 후 감소한다는 것이다.

그림 7을 통해 보상된 구간 플랜트에 대한 성능평가를 위해 백분율 오버슈트(percent overshoot) $P.O.$ 와 정상상태 오차(e_{ss}), 감쇠비(ζ), 정정시간(T_s), 제동인자(α), 고유주파수(w_n)등을 계산하면

$$P.O. = 100 e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, T_s = \frac{4}{\zeta w_n}, \alpha = \zeta w_n \quad (31)$$

의 관계를 갖는다. 표 4는 보상된 구간 플랜트에 대한 성능지수를 $P.O.$ 와 T_s, ζ, α, w_n 등으로 표시하고 있다. 특히, 백분율 오버슈트를 5%로, 정정시간을 2초 이내로 설정하면 ζ 는 0.69보다 커야한다. 따라서 임의 값으로 ζ 를 설정한 후 정정시간(T_s), 제동인자(α), 고유주파수(w_n)를 차례로 구하면 표 4와 같다. 표 4에서 알 수 있듯이 보상된 Affine TFM 시스템은 제동인자 값이 거의 '1'에 가까워 완전히 제동됨을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 불감시간을 갖는 제어시스템의 강인성에 대한 연구를 수행하였다. 따라서 본 논문의 특징을 살펴보면 i) 그동안 SISO 구간 다항식의 안정도에 머물렀던 문제를 불감시간(dead-time)을 갖는 Affine MIMO 플랜트를 대상으로 하여 확대 수행한 점, ii) LTI(Linear Time Invariant) 시스템에 머물렀던 DNA 연구를 불감시간을 갖는 불확실한 Affine TFM MIMO 시스템으로 확장하여 안정도 여유(stability margin)와 강인성을 분석한 점, iii) 기존의 GBM 방식은 위상교차 주파수만을 구하여 제어기를 구성하는 한계감도법(ultimate sensitivity method)을 주로 사용하였으나 본 논문에서는 위상교차 주파수와 이득교차주파수를 모두 사용하여 자동적으로 제어기 계수를 설계하는 강인한 다중 루프 PI/PID (RM-PI/PID: Robust Multiloop-PI/PID Controller) 제어기를 설계하였다는 점, iv) 불감시간이 이득여유와 위상여유에 어떠한 영향을 미치는지를 DNA 및 GB 분석을 통하여

정량적으로 규명한 점 등이다. 이를 위해 모의실험에서는 2x2 형태의 불감시간을 갖는 Affine TFM MIMO 시스템을 사용했으며 GBM을 사용한 RM-PI 동조법의 우수성을 입증하고자 Tyreus-Luyben이 제안한 TL 동조법과의 비교분석을 수행하였다. 비교 분석결과 Tracking과 안정도에 있어서 본 논문에서 제시한 설계의 효율성 검증할 수 있었고, 불감시간을 갖는 보상된 Affine TFM 시스템은 제동인자 값이 거의 '1'에 가까워 완전히 제동됨을 알 수 있었다.

향후 본 저자는 다른 다양한 동조법과의 비교분석에 더욱 매진할 것이다.

참고문헌

- [1] J. C. Doyle, "Analysis of feedback systems with structured uncertainties", *IEE Proc. Part D*, vol. 129, no. 6, pp. 242-250, 1982.
- [2] J. Doyle, A. Packard and K. Zhou, "Review of LFTs, LMIs, and μ ", *Proc. of the 30th IEEE Control and Decision Conference*, pp. 1227-1232, 1991.
- [3] V. L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations", *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 14, no. 11, pp. 1483-1485, 1987.
- [4] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, 1981.
- [5] K. Glover, J. C. Doyle, "State-space fomulate for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity", *System and Control Letters*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.
- [6] C. H. Houpis, *Quantitative Feedback Theory(QFT) Technique*, CRC Press, pp. 701-717, 1996.
- [7] B. R. Barmish, C. V. Hollot, F. Kraus, and R. Tempo, "Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, pp. 707-714, 1992.
- [8] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and L. Huang, "Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges", *Math. Control & Signals Sys.*, vol 1, pp. 61-71, 1988.
- [9] S. P. Bhattacharyya et al 2, *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, 1995.
- [10] T. E. Djaferis, *Robust Control Design: A Polynomial Approach*, Kluwer Academic Pub., Boston, 1995.
- [11] J. Ackerman, *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [12] M. Fu, "Computing the frequency response of linear systems with parametric perturbations", *System and Control Letters*, vol. 15, pp. 45-52, 1990.
- [13] H. H. Rosenbrock, *State-Space and Multivariable Theory*,

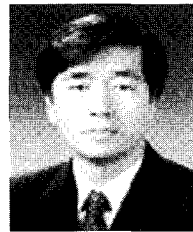
London : U. K. Nelson, 1970.

- [14] W. K. Ho and W. Xu, "Multivariable PID controller design based on the direct nyquist array method", *Proc. of the American Control Con. Pennsylvania*, pp. 3524-3528, 1998.
- [15] W. L. Luyben, "Getting more information from relay-feedback tests". *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 40, pp. 4439-4402, 2001.
- [16] C. T. Baab, J. C. Cockburn, H. A. Latchman & O. D. Crisalle, "Extension of the nyquist robust margin to systems with nonconvex value Sets", *AACC*, pp. 1414-1419, June, 2001.
- [17] M. Araki and O. I. Nwokah, "Bounds for closed-loop transfer function of multivariable systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 20, pp. 666-670, 1975.
- [18] K. Zhou, J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, New Jersey, 1998.
- [19] W. K. Ho, O. P. Gn, E. B. Tay, & E. E. Ang, "Performance and gain and phase marins of well-known PID tuning formulas", *IEEE Trans. on Control systems tech.*, vol. 4, pp. 473-477, 1996.
- [20] K. Etfhymios and M. Neil, "Extreme point solution to diagonal dominance problem and stability analysis of uncertain systems.", *Proc. of the American Control Con.*, pp. 3936-3940, 1997.
- [21] H. A. Latchman, O. D. Crisalle and V. R. Basker, "The nyquist robust stability margin-A new metric for robust stability", *International J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 7, pp. 211-226, 1997.
- [22] 변황우, 양해원, "불확실한 Affine TFM(Transfer Function Matrix) 시스템의 강인한 다중 루프 제어기 설계", *대한전기학회논문지*, 제54권, 제1호, pp. 17-25, 1. 2005.



변 황 우

1965년 7월 8일생. 1991년 강원대학교 전기공학과 졸업. 1995년 건국대학교 전기공학과 졸업(석사). 1998년 한양대학교 전기공학과 박사과정 수료. 현재 순천제일대학 메카트로닉스과 조교수. 관심분야는 인공지능제어.



양 해 원

1950년 3월 20일생. 1971년 서울대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1973). 일본 교토대 박사(1982). 1986~현재 한양대 전자컴퓨터공학부 교수. 대한전기학회 부회장(현재). 관심분야는 지능 및 적응제어.