

확장형 Boussinesq 방정식에서 비선형파의 내부 조파:
선 조파기법과 원천함수기법
Internal Generation of Nonlinear Waves for Extended Boussinesq Equations:
Line Source Method and Source Function Method

김건우* · 이창훈** · 서경덕*
Gunwoo Kim*, Changhoon Lee** and Kyung-Duck Suh*

요 지 : 본 연구에서 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에 대하여 한 격자의 조파 띠에 균일하게 분포하는 원천함수를 유도하였다. 원천함수를 포함하는 확장형 Boussinesq 방정식에 부분단계분리법을 적용하여, 에너지 전송속도를 사용하는 선 조파기법의 타당성을 해석적으로 증명하였다. 수평공간 1차원의 경우 선형파 뿐만 아니라 비선형파를 조파하여 원천함수기법에 의한 내부조파기법의 정확성을 검증하였다. 또한 원천함수기법에 의한 수치 결과가 선 내부조파기법에 의한 수치 결과와 동일함을 확인하였다.

핵심용어 : 확장형 Boussinesq 방정식, 내부조파, 원천함수기법, 선 조파기법, 비선형파, 수치실험

Abstract : In this study, derivation is made of a one-grid source function for the extended Boussinesq equations of Nwogu (1993) in order to generate nonlinear waves internally. The energy velocity approach used in the line source method is verified analytically by the fractional step splitting method. The source function method is verified by generating accurately nonlinear waves as well as linear waves for horizontally one-dimensional cases. It is found that numerical solutions by the source function method are the same as those by the line source method.

Keywords : extended Boussinesq equations, internal generation of waves, source function method, line source method, nonlinear waves, numerical experiment

1. 서 론

해양공학자들은 먼 바다에서 주로 바람에 의해서 발생한 파랑이 연안으로 전파하면서 발생하는 변화의 과정을 예측하기 위하여 소위 파랑변형식을 개발하였다. 파랑 변형식 중에서 쌍곡선형의 시간 의존식(time-dependent equations)은 천수, 굴절, 회절, 반사 등의 복합적인 현상을 해석할 수 있다. 그 중에서 Boussinesq 방정식은 규칙파 뿐만 아니라 불규칙파의 변형도 모의할 수 있고 파랑간의 비선형 현상도 모의할 수 있다. Peregrine(1967)은 바다에서부터 해수면까지 평균한 유속을 사용하여 수심이 변하는 해역에도 적용할 수 있는 Boussinesq 방정식을 유도하였다. 진

통적인 Boussinesq 방정식은 상대수심 kh (k 는 파수, h 는 시간 평균 수심)을 매개변수로 섭동법을 사용하여 유도된 식이기 때문에 상대수심이 큰 심해에서는 정확성이 크게 떨어진다. 이러한 문제점을 극복하기 위해서 Madsen and Sorensen(1992)은 운동방정식에 보정항을 넣어 심해에서 적용성이 향상된 확장형 Boussinesq 방정식을 개발하였다. 또한, Nwogu(1993)는 바다에서부터 해수면까지 평균한 유속이 아닌 임의 수심에서의 유속을 사용하여 심해의 적용성을 향상시켰다. 또한, Wei et al.(1995)과 Madsen and Schäffer(1998)는 각각 Nwogu의 식과 Madsen과 Sorensen의 식에 추가적으로 파랑간의 비선형 현상을 최고로 고려한 확장형 Boussinesq 방정식을 개발하였다.

*서울대학교 지구환경시스템공학부(Corresponding author: Gunwoo Kim, School of Civil, Urban and Geosystem Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea. maossi1@snu.ac.kr)

**세종대학교 토목환경공학과(Department of Civil and Environmental Engineering, Sejong University)

파랑식에서 파랑에너지를 만드는 방법은 외부조파와 내부조파로 나눌 수 있다. 외부조파는 수면변위나 유속 또는 흐름(flux)을 매시간 단계에서 외부경계에 임의로 지정하는 방법이다. 이 경우 계산영역에서 구조물이나 수심의 변화로 발생한 반사파의 에너지가 외부의 조파경계에 이르러 완전히 빠져나가지 못할 수 있다. 이 경우 조파경계에서 반사파가 다시 반사되어 영역의 내부로 퍼져나가는 문제가 발생하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 내부조파 기법이 고안되었다. 내부조파기법은 외해 경계에 위치한 에너지 감쇠대와 함께 사용되어, 계산영역에서 반사된 파가 조파 띠(source band)를 통과하여 에너지 감쇠대에서 소멸되어 계산영역 내부에 에너지가 축적되지 않으면서 조파가 가능하다. 내부조파는 조파방법에 따라 선 조파기법(line source method)과 원천함수기법(source function method)으로 나눌 수 있다.

선 조파기법은 조파선(즉, 조파 띠의 폭이 한 격자간격 임)에서 매시간 단계에 계산된 수면변위에 임의의 양을 더해 주는 것이다. 더해 주는 양은 조파선에서 매시간 단계 동안 전송된 부피를 한 격자 간격으로 나눈 값의 두 배이다. 두 배를 더하는 이유는 조파된 파랑이 조파선의 양쪽으로 퍼져나가기 때문이다. 두 번째로 원천함수기법은 조파 띠에서 원천항을 포함한 지배방정식(질량 보존식 또는 운동량 보존식)을 사용하는 방법이다. 선 조파기법은 Larsen and Dancy(1983)가 Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식에서 최초로 사용하였으며, 부피흐름(volume flux)이 질량전송의 관점 하에 위상속도 C 로 전파한다고 가정하였다. 그런데, Lee and Suh(1998)는 Radder and Dingemans(1985)의 환경사방정식에서 위상속도 대신 에너지 전송의 관점 하에 에너지속도 C_e 를 사용하여 내부조파를 성공적으로 할 수 있었다. 이후 Lee et al.(2001)은 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에도 위상속도 대신 에너지속도를 사용하여야 내부조파가 제대로 된다는 사실을 확인하였다. 그들은 Larsen과 Dancy가 위상속도를 사용하여 내부조파를 제대로 할 수 있었던 것은 Peregrine의 Boussinesq 방정식이 천해에서만 적용되며 천해에서는 에너지속도가 위상속도와 거의 같기 때문에 정확한 조파가 가능했던 것이고, 더 나아가 모든 파랑식에서 에너지속도를 사용하여야 한다고 주장하였다. 그들의 주장은 Nadaoka 등(1994)의 비선형 환경사방정식의 내부조파에서도 증명되었다(이종인 등, 1999).

그런데 선 조파기법은 어떤 파랑식(예를 들어, Lee et al.(2003)의 확장형 환경사방정식)에서는 수치적인 동요가

발생하는 문제점이 있다. 그러나 이러한 문제점이 원천함수기법에서는 나타나지 않았다. Madsen and Larsen(1987)은 Copeland(1985)의 환경사방정식에서 두 격자 폭의 조파 띠에 분포하는 원천함수를 최초로 사용하였다. 이후, Wei et al.(1999)은 비선형 천수방정식, Peregrine의 Boussinesq 방정식, Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식에 Green 함수 해법을 사용하여 여러 격자 폭의 조파 띠에 분포하는 Gaussian 형태의 원천함수를 해석적으로 유도하였고, Kim et al.(2004)은 시간의존 확장형 환경사방정식(Suh et al., 1997; Lee et al., 2003)에서 규칙파 뿐만 아니라 불규칙파도 조파할 수 있는 원천함수를 유도하였다.

최근 김건우 등(2004)은 Peregrine의 Boussinesq 방정식과 Suh et al.(1997), Lee et al.(1998), Lee et al.(2003)의 시간의존 확장형 환경사방정식에 대해서 한 격자에 균일하게 분포하는 직사각형 형태의 원천함수를 유도하였다. 또한 한 격자만의 원천함수로도 조파가 정확히 이루어지는 것을 수치적으로 보였으며, 부분단계분리법으로 원천항을 고려할 때 기존의 선 조파기법과 일치하는 것을 확인하였다. 즉, 선 조파기법에서 전송 속도로 에너지속도를 사용해야 하는 것을 해석적으로 증명하였다. 김건우 등(2004)의 연구는 수심이 일정한 경우 선형의 규칙파에 대해서 Helmholtz 식으로 귀결되는 시간의존 파랑식에 대해서만 이루어졌으며, 선형파에 대한 조파만 검증되었다. 한 격자의 원천함수는 소멸과 성분이 포함된 확장형 Boussinesq 방정식에 대해서 유도된 바 없으며, 비선형파에 대한 조파 가능성에 대해서도 연구된 바가 없다.

본 연구에서는 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에서 한 격자 폭의 원천함수를 해석적으로 구하고, 부분단계분리법을 통해서 한 격자 폭의 원천함수기법이 에너지 속도를 사용하는 선 조파기법과 일치함을 확인한다. 그리고 선형파에 대해서 유도된 원천함수를 비선형파에도 적용 가능하도록 확장한다. 본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 제 2절에서는 확장형 Boussinesq 방정식에 한 격자 폭의 원천함수를 유도하여 선 조파기법과 비교하였고, 원천함수를 비선형파에 대해서 확장하였다. 제 3절에서는 선형파와 비선형파에 대해서 수치실험을 하였으며, 제 4절에 중요한 결과를 요약하였다.

2. 내부조파

2.1 선 조파기법

Lee and Suh(1998)가 제안한 에너지 전송 개념의 선

조파기법은 조파선에서 매 시간단계(즉, n 번째 시간단계)에 계산된 수면변위 η^{model} 에 다음과 같이 η^* 를 더해 주는 방법이다.

$$\begin{aligned} \eta^{n+1} &= \eta^{model} + \eta^* \\ &= \eta^{model} + 2\eta' \frac{C_e \Delta t}{\Delta x} \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $\eta' (= a \exp\{i(\lambda y - \omega t)\})$ 는 조파하고자 하는 입사파의 수면변위, C_e 는 에너지속도, θ 는 x 축에 대한 입사각이고, Δx 와 Δt 는 각각 x 축 방향의 격자간격과 시간간격이다. 또한 a 는 입사파의 진폭, $\lambda (= k \sin \theta)$ 은 y 축 방향의 파수, ω 는 각주파수, $i = \sqrt{-1}$ 이고, 위 첨자 $n+1$ 은 $n+1$ 번째 시간단계를 의미한다. 조파선은 y 축과 나란하다고 가정하였다.

Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \{(h + \eta)\mathbf{u}\} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right. \\ \left. + \left(z_\alpha + \frac{h}{6} \right) h \nabla \{ \nabla \cdot (h\mathbf{u}) \} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta + z_\alpha \left[\frac{z_\alpha}{2} \nabla (\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) \right. \\ \left. + \nabla \left\{ \nabla \cdot \left(h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 η 는 수면변위, \mathbf{u} 는 임의의 위치($z=z_\alpha$)에서의 수평 방향의 유속, h 는 정지수면에서의 수심, g 는 중력가속도, ∇ 은 수평미분연산자, $\alpha = (z_\alpha/h)^2/2 + z_\alpha/h$ 이다. 본 연구에서는 $\alpha = -0.4$ 로 하였으며, 이 때 $z_\alpha/h = -0.551$ 이다. 수심이 일정할 때 \mathbf{u} 에 대해 선형화된 식으로 두 식을 결합하고, 공간에 대해서 한 번 적분하면 다음과 같이 속도포텐셜 ϕ 에 대한 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - gh \nabla^2 \phi - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) gh^3 \nabla^2 (\nabla^2 \phi) + \alpha h^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

여기서, ϕ 는 \mathbf{u} 와 $\mathbf{u} = \nabla \phi$ 의 관계에 있다.

수심이 일정한 경우에 기하광학기법을 사용하여 파랑 식에 적용되는 에너지속도를 구할 수 있다. 속도포텐셜을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\phi = A(x, y, t) \exp(i\Psi) \quad (5)$$

여기서, $A(x, y, t)$ 는 속도포텐셜의 진폭, Ψ 는 위상함수이다. 각주파수 ω 와 파수벡터 $\mathbf{k} (= (k \cos \theta, k \sin \theta) = (l, \lambda))$ 는 위상함수와 다음의 관계에 있다.

$$\mathbf{k} = \nabla \Psi, \quad \omega = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (6)$$

식 (5)로 표현되는 속도포텐셜을 파랑식 (4)에 대입한 뒤 $O(\partial A/\partial t, \nabla A)$ 의 정도까지 정리하면, 실수부와 허수부에서 각각 다음과 같이 분산관계식과 에너지전송식을 구할 수 있다(Lee et al., 2001).

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh \frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2}{1 - \alpha (kh)^2}} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\mathbf{k} \omega}{k k} \left[1 - \frac{(kh)^2}{3 \left\{ 1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 \right\} \{ 1 - \alpha (kh)^2 \}} \right] \\ \cdot \nabla A^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

에너지전송식 (8)에서 에너지속도 벡터 C_e 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_e = \frac{\mathbf{k} \omega}{k k} \left[1 - \frac{(kh)^2}{3 \left\{ 1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 \right\} \{ 1 - \alpha (kh)^2 \}} \right] \\ = C_e (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned} \quad (9)$$

또한 에너지속도 C_e 는 다음과 같다.

$$C_e = \frac{\omega}{k} \left[1 - \frac{(kh)^2}{3 \left\{ 1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 \right\} \{ 1 - \alpha (kh)^2 \}} \right] \quad (10)$$

입사파 성분 중에서 조파선에 직각인 x 축 방향의 성분만이 전파하므로, 매 시간 조파선의 수면변위에 더해주는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta^* &= 2\eta' \frac{C_e \Delta t}{\Delta x} \cos \theta \\ &= 2a \exp\{i(\lambda y - \omega t)\} \frac{\omega}{k} \end{aligned}$$

$$\left[1 - \frac{(kh)^2}{3 \left\{ 1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 \right\} \{ 1 - \alpha (kh)^2 \}} \right] \frac{\Delta t}{\Delta x} \cos \theta \quad (11)$$

2.2 한 격자의 원천함수를 사용한 내부조파

원천함수 s 를 식 (2)의 우변에 더하고, 수심이 일정할 때 선형화된 식으로 표현한 후 공간에 대해서 한번 적분하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - gh \nabla^2 \phi - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) gh^3 \nabla^2 (\nabla^2 \phi) + \alpha h^2 \nabla^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -gs \quad (12)$$

ϕ 와 s 를 각각 $\phi = \tilde{\phi} \exp\{i(\lambda y - \omega t)\}$ 와 $s = \tilde{s} \exp\{i(\lambda y - \omega t)\}$ 로 표현하여 대입하면 다음과 같은 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$C_1 \frac{d^4 \tilde{\phi}}{dx^4} + C_2 \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dx^2} + C_3 \tilde{\phi} = g \tilde{s} \quad (13)$$

여기서 계수 C_1, C_2, C_3 은 각각 다음과 같다.

$$C_1 = \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) gh^3 \quad (14)$$

$$C_2 = gh + \alpha \omega^2 h^2 - 2 \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) gh^3 \lambda^2 \quad (15)$$

$$C_3 = \omega^2 - gh \lambda^2 - \alpha \omega^2 h^2 \lambda^2 + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) gh^3 \lambda^4 \quad (16)$$

식 (13)의 동차해(homogeneous solution)는 다음과 같은 선형의 진행파 또는 소멸파이다.

$$\tilde{\phi}_h = \exp(\pm i l x) \quad (17)$$

원천함수를 포함한 식 (12)의 특수해를 구하기 위해 Green 함수법을 사용한다. Green 함수 $G(\xi, x)$ 가 다음의 조건식을 만족한다고 가정한다.

$$C_1 \frac{d^4 G(\xi, x)}{d\xi^4} + C_2 \frac{d^2 G(\xi, x)}{d\xi^2} + C_3 G(\xi, x) = \delta(\xi - x) \quad (18)$$

위 식에서 ξ 는 활동변수(active variable)이고, x 는 고정되어 있고, $\delta(\xi - x)$ 는 델타함수이다. G 와 $\tilde{\phi}$ 는 다음과 같은 선형파의 방사 경계조건을 만족한다.

$$\frac{d^n G}{d\xi^n} = (+il)^n G, \quad \frac{d^n \tilde{\phi}}{d\xi^n} = (+il)^n \tilde{\phi}; \quad \xi \rightarrow +\infty$$

$$\frac{d^n G}{d\xi^n} = (-il)^n G, \quad \frac{d^n \tilde{\phi}}{d\xi^n} = (-il)^n \tilde{\phi}; \quad \xi \rightarrow -\infty \quad (19)$$

식 (18)과 방사 경계 조건식 (19)를 만족하는 $G(\xi, x)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$G(\xi, x) = \begin{cases} G_+ = a_1 \exp\{il_1(\xi - x)\} + a_2 \exp\{il_2(\xi - x)\}, & \xi > x \\ G_- = a_1 \exp\{il_1(x - \xi)\} + a_2 \exp\{il_2(x - \xi)\}, & \xi < x \end{cases} \quad (20)$$

여기서, l_1 과 l_2 는 모두 식 (13)을 만족하는 파수로서 다음과 같다.

$$l_1 = \sqrt{\frac{C_2 - \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1}} \quad (21)$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1}} \quad (22)$$

G 가 $\xi=x$ 에서 연속임을 이용하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 = 0 \quad (23)$$

또한, 식 (18)을 적분하고, $G, dG/d\xi, d^2G/d\xi^2$ 가 $\xi=x$ 에서 연속임을 이용하면 다음의 관계식을 구할 수 있다.

$$C_1 \frac{d^3 G}{d\xi^3} \Big|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = 1 \quad (24)$$

식 (23)과 (24)를 만족하는 a_1 은 다음과 같다.

$$a_1 = \frac{i}{2C_1 l_1 (l_1^2 - l_2^2)} \quad (25)$$

분산관계식 (7)과 l_1, l_2 의 정의에 의해서 a_1 은 다음과 같이 표현된다.

$$a_1 = - \frac{ik}{2 \left\{ \omega^2 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) gh^3 \right\} \cos \theta} \quad (26)$$

Green 함수에서 진폭이 a_2 인 지수함수는 소멸파 성분이므로 $|\xi-x|$ 가 클 때 무시할 수 있을 만큼 작다. 따라서, 진폭이 a_1 인 진행파 성분만 고려한다. 식 (18)의 양변에 $\tilde{\phi}(\xi)$ 을 곱하고 ξ 에 대해서 $-\infty$ 부터 $+\infty$ 까지 적분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ C_1 \frac{d^4 G(\xi, x)}{d\xi^4} + C_2 \frac{d^2 G(\xi, x)}{d\xi^2} + C_3 G(\xi, x) \right\} \tilde{\phi}(\xi) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x) \tilde{\phi}(\xi) d\xi \quad (27)$$

식 (27)의 좌변에 부분적분을 취하고, 식 (19), (13)을 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ C_1 \frac{d^4 G(\xi, x)}{d\xi^4} + C_2 \frac{d^2 G(\xi, x)}{d\xi^2} + C_3 G(\xi, x) \right\} \tilde{\phi}(\xi) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, x) \left\{ C_1 \frac{d^4 \tilde{\phi}(\xi)}{d\xi^4} + C_2 \frac{d^2 \tilde{\phi}(\xi)}{d\xi^2} + C_3 \tilde{\phi}(\xi) \right\} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, x) g \tilde{s}(\xi) d\xi \quad (28)$$

식 (27)의 우변은 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x) \tilde{\phi}(\xi) d\xi = \tilde{\phi}(x) \quad (29)$$

식 (28)과 식(29)가 같아야 하므로 $\tilde{\phi}(x)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{\phi}(x) = g \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, x) \tilde{s}(\xi) d\xi$$

$$= g \left\{ \int_{-\infty}^x G_-(\xi, x) \tilde{s}(\xi) d\xi + \int_x^{+\infty} G_+(\xi, x) \tilde{s}(\xi) d\xi \right\} \quad (30)$$

원천함수의 진폭은 다음과 같이 조파선을 중심으로 좌우로 $\Delta x/2$ 의 폭에 일정한 값을 갖는 함수를 사용한다.

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} D, & |x - x_s| \leq \frac{\Delta x}{2} \\ 0, & |x - x_s| > \frac{\Delta x}{2} \end{cases} \quad (31)$$

x_s 를 중심으로 $+\infty$ 방향과 $-\infty$ 방향으로 진행하는 파에 대해서 식 (30)의 적분을 Fig. 1의 (a)와 (b)에 개념적으로 나타내었다. $+\infty$ 방향으로 진행하는 파의 경우(Fig. 1(a))에, 조파영역 외부의 x 에 대해서, 즉 $x > x_s + \Delta x/2$ 이면, $\tilde{s}(x) = 0$ 이므로 식 (30)의 두 번째 적분 값은 0이다. $\tilde{\phi}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\tilde{\phi}(x) = g \int_{-\infty}^x G_-(\xi, x) \tilde{s}(\xi) d\xi$$

$$= g \int_{x_s - \Delta x/2}^{x_s + \Delta x/2} a_1 \exp\{i l(x - \xi)\} D d\xi$$

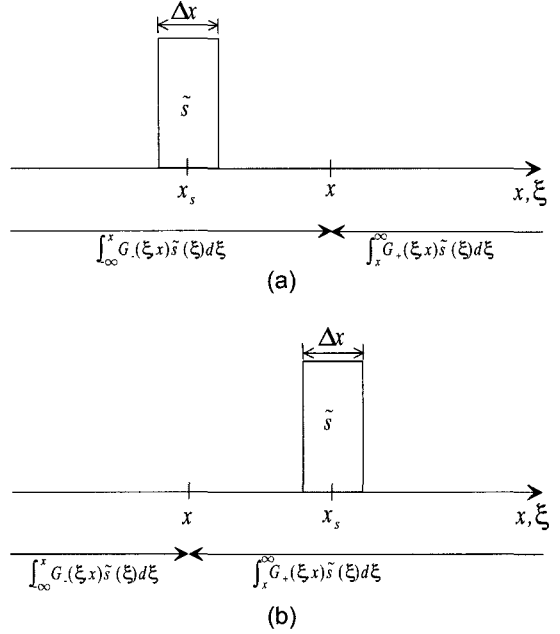


Fig. 1. Schematic diagram for integrating around source region, (a) $x > x_s$, (b) $x < x_s$.

$$= g a_1 D \exp\{i l(x - x_s)\} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{l \Delta x}{2}\right)$$

$$\cong g a_1 D \Delta x \exp\{i l(x - x_s)\} \quad (32)$$

조파선으로부터 $-\infty$ 방향으로 진행하는 파에 대해서 $\tilde{\phi}$ 를 마찬가지로 구할 수 있다. 따라서, 조파선에서 양쪽으로 대칭적으로 조파되는 파는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{\phi}(x) = -i \frac{g k D \Delta x}{\omega \left\{ \omega^2 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) g k^4 h^3 \right\}} \exp(i l |x - x_s|) \cos \theta \quad (33)$$

그리고, 조파하고자 하는 파는 다음과 같다.

$$\tilde{\phi} = -i \frac{g a}{\omega \{ 1 - \alpha (k h)^2 \}} \exp(i l |x - x_s|) \quad (34)$$

여기서, α 는 조파하고자하는 파의 진폭이다. 식 (33)과 식 (34)를 비교하면 원천함수의 크기 D 가 다음과 같이 결정된다.

$$D = 2a \frac{\omega^2 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) g k^4 h^3}{\omega k \{ 1 - \alpha (k h)^2 \}} \frac{\cos \theta}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= 2a \frac{\omega}{k} \left[1 - \frac{(kh)^2}{3\{1 - \alpha(kh)^2\} \left\{ 1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)(kh)^2 \right\}} \right] \frac{\cos \theta}{\Delta x} \\
&= 2a \frac{C_e}{\Delta x} \cos \theta \quad (35)
\end{aligned}$$

위 식을 유도할 때 식 (9)로 표현된 에너지 속도 C_e 를 이용하였다. 따라서, 원천함수 s 는 다음과 같다.

$$s = 2\eta' \frac{C_e}{\Delta x} \cos \theta, \quad |x - x_s| \leq \Delta x/2 \quad (36)$$

2.3 부분단계분리법에 의한 조파기법의 비교

부분단계분리법은 원천항을 포함하는 보존식을 원천항을 포함하지 않은 동차식(homogeneous equation)과 원천항을 포함한 시간에 대한 미분방정식으로 분리하여 차례로 계산하는 방법이다.

원천함수를 포함한 확장형 Boussinesq 방정식의 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \{ (h + \eta) \mathbf{u} \} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{z_\alpha}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \\
+ \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla \{ \nabla \cdot (h \mathbf{u}) \} = 2\eta' \frac{C_e}{\Delta x} \cos \theta \quad (37)
\end{aligned}$$

이 식을 원천항을 제외한 동차식과 원천항을 포함한 미분방정식으로 분리하면 동차식은 식 (2)와 동일하며, 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 2\eta' \frac{C_e}{\Delta x} \cos \theta \quad (38)$$

이 방정식을 전방차분(forward-time differencing)을 취하면 다음과 같다.

$$\frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} = 2\eta' \frac{C_e}{\Delta x} \cos \theta \quad (39)$$

조파선에서 매시간단계(즉, n 번째 시간단계)에 운동방정식과 연속방정식으로 표현되는 동차식을 사용하여 계산된 수면변위를 η^{model} 이라 하면 이 값은 식 (39)의 η^n 에 해당된다. 따라서, 식 (39)로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\eta^{n+1} = \eta^{model} + 2\eta' \frac{C_e \Delta t}{\Delta x} \cos \theta \quad (40)$$

식 (40)에서 우변의 두 번째 항이 η^{*i} 이고 이 값은 식 (1)로 표현되는 값과 똑같다. 즉, 선 조파기법에서 에너지전송의 개념으로 조파선에 매 시간단계에 더해지는 수면변위 값은 원천함수기법에서 한 격자 폭의 원천함수로 매 시간 더해지는 수면변위 값과 일치한다.

2.4 비선형파에 적용 가능한 원천함수

Lee et al.(2001)은 선 조파기법으로 천해에 발생하는 비선형파인 cnoid 파를 조파한 바 있다. 그들은 선형파의 에너지 속도를 사용하면서도 η' 에 cnoid 파의 수면변위를 취함으로써 비선형파를 정확하게 조파할 수 있었다. 선 조파기법과 한 격자에 분포하는 원천함수 기법은 부분단계분리법에 의해 수학적으로 대등하기 때문에, 원천함수에서 수면변위를 나타내는 부분인 η' 에 비선형파의 수면변위를 사용하면 비선형파의 조파가 가능하다. cnoid 파를 조파하는 경우에 η' 는 다음과 같다.

$$\eta' = \eta_i + Hcn^2 \left(\frac{2Kt}{T} | m \right) \quad (41)$$

여기서, H 는 파고, η_i 는 마루의 최저점에서의 수면변위이고, 다음과 같이 결정된다.

$$\eta_i = \frac{H}{m} \left(1 - m - \frac{E}{K} \right) \quad (42)$$

여기서 cn 은 야코비 타원 함수(Jacobian elliptic function), K 는 1종의 완전 타원 적분(complete elliptic integral of the first kind), E 는 2종의 완전 타원 적분(complete elliptic integral of the second kind)이고, m 은 파형을 결정하는 매개변수이다.

3. 수치실험

원천함수기법과 선 조파기법을 사용하여 선형파 뿐만 아니라 비선형파를 내부조파하여 공간 1차원 수치실험을 수행하였다. 비선형파의 경우 비선형성과 분산성이 균형을 이루면서 파형이 보전되는 cnoid 파를 조파하였다. 또한 Wei et al.(1999)과 마찬가지로 정현형의 시간 조화 항으로 표현되는 비선형파를 조파하여 그 가치를 논하였다.

3.1 모형식의 차분화

본 연구에서는 Wei and Kirby(1995)의 예측자-수정자

기법을 사용하여 지배방정식을 차분화하였다. 식 (2)와 (3)에 원천함수와 스폰지 층에서의 에너지감쇠 효과를 포함시킨 1차원 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \{(h + \eta)u\}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{z_\alpha}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right\} = s \quad (43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + z_\alpha \left\{ \frac{z_\alpha}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\} + \omega D_s u = 0 \quad (44)$$

에너지 감쇠항 D_s 는 스폰지 층 안에서 다음과 같이 정의된다.

$$D_s = \frac{\exp(d/W) - 1}{e - 1} \quad (45)$$

여기서, $W=2.5L$ (L 은 파장)은 스폰지 층의 폭이고, d 는 스폰지 층이 시작하는 지점에서 떨어진 거리이다.

식 (43), (44)를 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = E(\eta, u, s) \quad (46)$$

$$\frac{\partial \{U(u)\}}{\partial t} = F(\eta, u) \quad (47)$$

여기서, U, E, F 는 각각 다음과 같다.

$$U = u + z_\alpha \left\{ \frac{z_\alpha}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right\} \quad (48)$$

$$E = -\frac{\partial \{(h + \eta)u\}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{z_\alpha}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h^2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right\} + s \quad (49)$$

$$F = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \omega D_s u \quad (50)$$

u 와 η 를 모두 공간 격자의 가운데에 위치시켜 엇갈리지 않은 격자(unstaggered grid)를 구성하면, u 와 η 는 각각 $u(x, t) = u_j^n$ 와 $\eta(x, t) = \eta_j^n$ 로 표현되며, 여기서 첨자인 j 와 n 은 각각 x 축 방향 격자번호와 시간 단계이다. 미분항의 차분화로 인한 절삭오차의 크기를 줄이기 위해서 식 (48), (49), (50)의 공간 미분항을 모두 $O(\Delta x^4)$ 의 정도로

차분하고, 식 (46), (47)의 시간 미분항을 4차의 Adams-Bashforth-Moulton 기법으로 차분하였다.

예측자 단계는 3차의 Adams-Bashforth 기법으로 다음과 같이 시간차분 하였다.

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n + \frac{\Delta t}{12} (23E_j^n - 16E_j^{n-1} + 5E_j^{n-2}) \quad (51)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{12} (23F_j^n - 16F_j^{n-1} + 5F_j^{n-2}) \quad (52)$$

또한, 수정자 단계에서는 4차의 Adams-Moulton 기법으로 다음과 같이 시간차분 하였다.

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n + \frac{\Delta t}{24} (9E_j^{n+1} + 19E_j^n - 5E_j^{n-1} + E_j^{n-2}) \quad (53)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{24} (9F_j^{n+1} + 19F_j^n - 5F_j^{n-1} + F_j^{n-2}) \quad (54)$$

수정자 단계는 계산결과가 수렴할 때까지 반복하여 계산한다. 그리고 식 (48)은 삼중대각행렬(tridiagonal matrix)의 연립방정식을 이루므로 Thomas 알고리즘을 사용하여 U_j^{n+1} 로부터 u_j^{n+1} 를 구하였다.

3.2 선형파의 조파

파고를 0.001 m로 충분히 작게 하여 수심 10 m일 때 천해($kh=0.1$)와 심해($kh=1.0$)인 경우에 선형파의 조파 성능을 검증하였다. 계산영역으로는 조파선의 좌우로 2.5 파장의 거리를 두고, 더 나아가 2.5 파장의 스폰지 층을 두어 영역의 경계로 오는 파의 에너지가 흡수되게 하였다. 계산영역의 가운데에 Δx 폭의 조파영역을 두었다. 계산영역을 Fig. 2에 개념적으로 도시하였다. 수치실험에서 Δx 는 $L/60$ (여기서, L 은 파장)로 두어 파형을 충분히 재현하도록 했으며, Δt 는 $Cr=C_c \Delta x/\Delta x=0.1$ 로 두어 수치적으로 안정적인 해를 얻게 하였다. 시작단계에서 모든 변수들은 0으로 두었으며, 파를 점진적으로 조파하기 위해서 $\tanh(n\Delta t/T)$

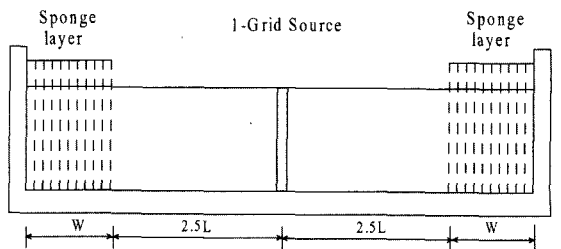


Fig. 2. Computational domain for wave generation.

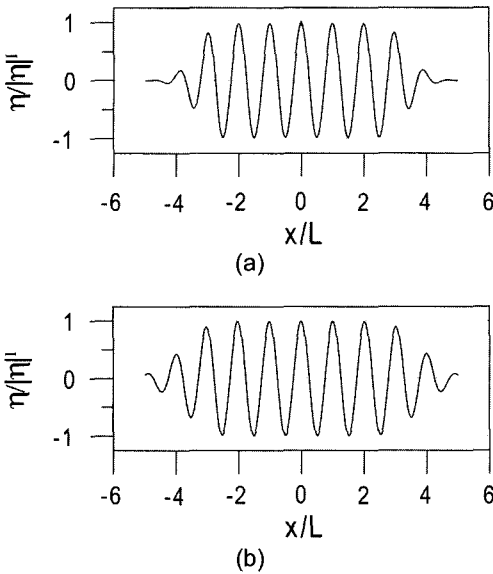


Fig. 3. Normalized water surface elevation of linear waves at $t=30T$ by using line source method: (a) shallow water ($kh=0.1\pi$), (b) deep water ($kh=\pi$).

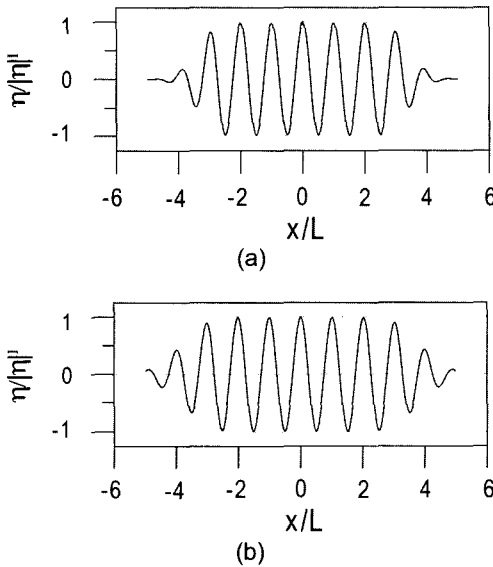


Fig. 4. Normalized water surface elevation of linear waves at $t=30T$ by using one-grid source function method: (a) shallow water ($kh=0.1\pi$), (b) deep water ($kh=\pi$).

를 원천함수에 곱하였다.

Fig. 3과 4는 각각 선 조파기법과 한 격자의 원천함수 기법을 사용하여 조파한 결과이다. 모든 경우에 목적인 파의 파고와 파장이 정확하게 재현되었다. 즉, 엇갈리지 않은 격자에서도 선 조파기법으로 정확한 조파가 가능하였으며, 한 격자에 분포하는 원천함수로도 정확한 조파가 가

능하였다.

3.3 비선형파의 조파

천해의 비선형파에 대한 조파 성능을 검증하기 위해서 선형파 수치실험과 동일한 계산영역에서 수심 10 m, 주기 20 s인 경우에 파고 1 m, 2 m, 3 m인 파를 조파하였다. 이 때 상대수심은 $kh=0.1\pi$ 로서 천해이고, 파고 1 m, 2 m, 3 m에 대해서 Ursell 수는 각각 0.48, 0.96, 1.44이고, 매개변수 m 은 각각 0.9360, 0.9938, 0.9992이다. Fig. 5와 6에 각각 Lee et al.(2001)의 선 조파기법과 본 연구에서 유도된 비선형파에 대한 원천함수를 사용하여 각각 조파하여 결과를 비교하였다. 모든 경우에 목적인 비선형파의 수면변위와 위상이 정확히 재현되었다. 즉, 선 조파기법과 마찬가지로 원천함수에 비선형파의 수면변위 시계열을 사용함으로써 비선형파의 조파가 가능한 것을 확인하였다. 원

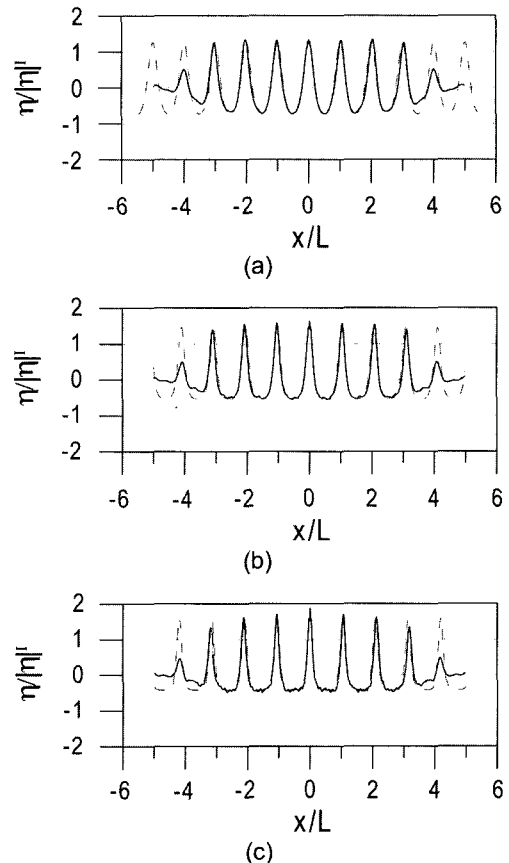


Fig. 5. Normalized water surface elevation of cnoidal waves at $t=30T$ by using line source method: (a) $H=1$ m, (b) $H=2$ m, (c) $H=3$ m; solid line = numerical solution, dashed line = analytical solution.

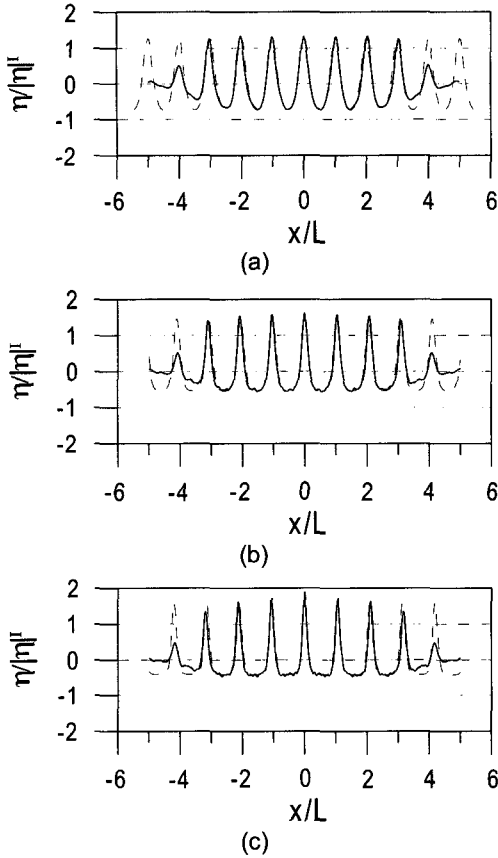


Fig. 6. Normalized water surface elevation of cnoidal waves at $t=30T$ by using one-grid source function method: (a) $H=1$ m, (b) $H=2$ m, (c) $H=3$ m; solid line = numerical solution, dashed line = analytical solution.

천함수의 폭이 한 격자 간격으로 매우 짧아서 비선형파의 전파 현상이 나타날 정도로 길지 않기 때문에 조파에 미치는 비선형 효과가 미미했으며, 조파 영역을 벗어나서는 비선형 파랑식이 비선형파의 전파를 정확히 재현하는 것으로 판단된다.

3.4 Gauss 함수 형태의 원천함수를 사용한 비선형파 조파

Wei et al.(1999)이 선형파의 경우 확장형 Boussinesq 방정식에 대해서 유도한 Gauss 함수 형태의 원천함수는 다음과 같다.

$$s = \frac{2a \exp\{i(\lambda y - \omega t)\} \left\{ \omega^2 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) g k^4 h^3 \right\} \cos \theta}{\omega k \{1 - \alpha(kh)^2\}} \exp\{-\beta(x-x_s)^2\} \tag{55}$$

여기서, I 와 β 는 다음과 같고,

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{I^2}{4\beta}\right) \tag{56}$$

$$\beta = \frac{80}{\delta^2 L^2} \tag{57}$$

δ 는 원천함수의 폭을 결정하는 매개변수이며 0.3-0.5 사이의 값을 사용한다.

본 연구에서 유도된 한 격자의 원천함수는 Gauss 함수 형태의 원천함수와 형상만 다를 뿐 유도에 사용된 모든 가정이 동일하다. 따라서, Gauss 함수의 폭이 충분히 좁을 때는 본 연구에서와 마찬가지로 비선형파의 수면변위를 사용하여 비선형파의 조파가 가능하다. 비선형파의 조파가 가능한 Gauss 함수 형태의 원천함수는 비선형파의 수면변위 η' 에 대해서 다음과 같다.

$$s = \frac{2\eta' \left\{ \omega^2 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) g k^4 h^3 \right\} \cos \theta}{\omega k \{1 - \alpha(kh)^2\}} \exp\{-\beta(x-x_s)^2\} \tag{58}$$

제 3.3절의 실험조건과 마찬가지로 계산영역으로 수심 10 m, 주기 20 s인 경우에 파고 1 m, 2 m, 3 m인 파를 조파하였다. 식 (55)로 조파하는 경우 입사파의 수면변위를 $\eta' = a \exp\{i(\lambda y - \omega t)\}$ 로 하였고, 식 (58)로 조파하는 경우 입사파의 수면변위를 $\eta' = \eta_i + H \frac{cn^2(2kx/Tm)}{m}$ 로 하였다. 조파한 결과를 각각 Fig. 7과 8에 도시하였다. 식 (55)로 조파하는 경우 선형파에 대한 원천함수로 조파하면 선형파의 형태로 조파되며, 파가 양쪽으로 진행하면서 지배방정식의 비선형성으로 인해 마루가 뾰족하고 골이 평평한 비선형파로 전이되었다. 그러나, 상대파고가 증가할수록 비선형파로 전이하는 과정에서 파형이 많이 일그러졌다. 천해에서 비선형파가 파봉에서 물 입자가 풀리는 성질과 분산성으로 물 입자가 확산되는 성질이 서로 균형을 이루어져 파형이 깨어지지 않고 유지되는데 이러한 현상이 고려되지 않고 선형파의 모양으로 조파하는 것은 무의미하다고 판단된다. 반면 식 (58)로 조파하는 경우, 즉 천해에서 파랑의 비선형성과 분산성이 균형을 이룬 cnoid 파를 조파하는 경우 비선형파의 파고와 위상을 정확히 재현하였다.

4. 결 론

Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에 대하여

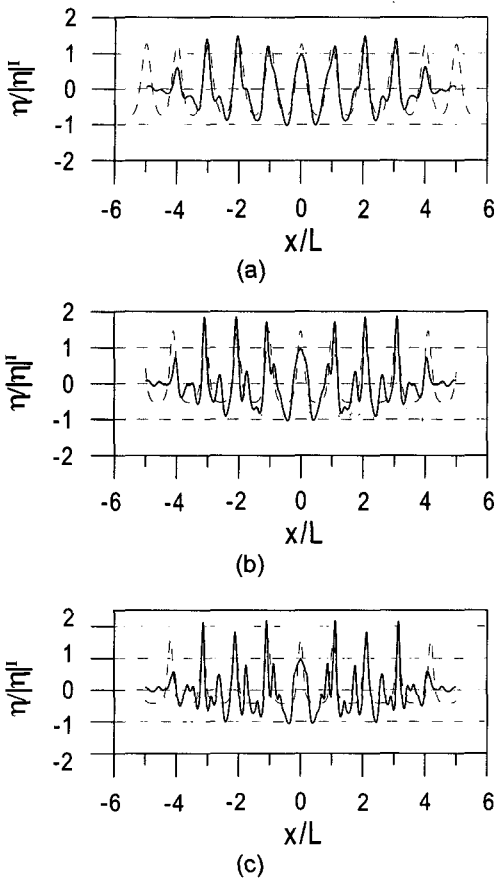


Fig. 7. Normalized water surface elevation of waves at $t=30T$ by generating sinusoidally varying waves with Gaussian source function method (Wei et al., 1999): (a) $H=1$ m, (b) $H=2$ m, (c) $H=3$ m; solid line = numerical solution, dashed line = analytical solution of cnoidal waves.

Lee et al.(2001)의 선 조파기법을 정리하였고, 한 격자 폭의 조파 띠에 균일하게 분포하는 원천함수를 해석적으로 유도하였다. 김건우 등(2004)이 Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식과 Suh et al.(1997), Lee et al.(1998), Lee et al.(2003)의 시간의존 확장형 환경사방정식에 대해서 보인 비와 같이, 한 격자의 원천함수를 포함한 확장형 Boussinesq 방정식에 부분단계분리법을 적용하면, 원천함수가 없는 식으로 계산된 수면변위에 원천항의 영향을 더해주는 양이 선 조파기법 사용 시 에너지 전달 개념으로 더해지는 수면변위 값과 같았다. 즉, 확장형 Boussinesq 방정식에서 선 내부 조파 시 전송 속도로 에너지속도를 사용해야 하는 것을 해석적으로 증명하였다.

선형파에 대해서 유도된 한 격자의 원천함수에 비선형파의 수면변위를 사용하여 비선형파를 조파할 수 있는 원

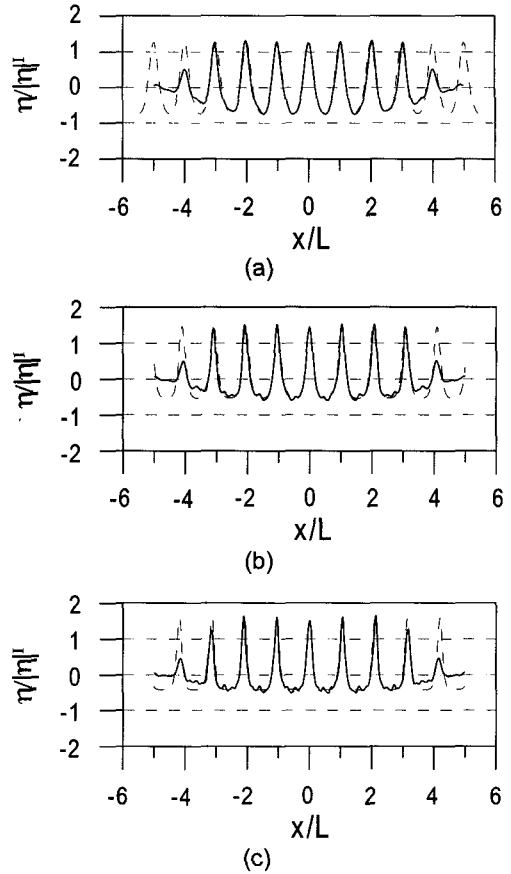


Fig. 8. Normalized water surface elevation of waves at $t=30T$ by generating cnoidal waves with Gaussian source function method: (a) $H=1$ m, (b) $H=2$ m, (c) $H=3$ m; solid line = numerical solution, dashed line = analytical solution of cnoidal waves.

천함수를 제안하였으며, 수치실험을 통해서 선형파와 비선형파에 대해서 모두 조파하고자 하는 파의 파고와 위상을 정확히 재현하는 것을 확인하였다. 그리고, 기존에 선형파에 대해서 유도된 Gauss 함수 형태의 원천함수도 마찬가지로의 방법으로 비선형파에 대해서 확장하였다.

김건우 등(2004)의 연구와 이번 연구를 통해서 한 격자에 분포하는 원천함수기법과 선 조파기법이 서로 별개의 내부조파기법이 아니라 똑같다는 것이 시간의존 확장형 환경사방정식과 Boussinesq 방정식에서 모두 확인되었다. 유한차분 모형에서는 한 격자의 조파 띠에 분포하는 원천함수를 사용하는 조파기법이 최소의 조파 폭을 사용하고도 정확한 조파가 가능하므로 최적의 조파방법으로 판단된다. Woo and Liu(2004)는 확장형 Boussinesq 방정식의 유한요소모형에 Gauss 함수 형태의 원천함수를 사

용하여 조파한 바 있다. 유한요소모형에서 최소의 폭을 사용하는 원천함수에 대한 연구도 필요하다고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호: R01-2003-000-10635-0)의 지원으로 수행되었음.

참고문헌

- 김진우, 이창훈, 서경덕 (2004). 시간의존 파랑변형식에서의 내부조파: 선 조파기법과 원천함수기법. 대한토목학회논문집, 24(6B), 585-594.
- 이종인, 윤성범, 이정규 (1999). 다성분 파동방정식의 내부 조파와 유속성분의 특성. 대한토목학회논문집, 19(2-5), 635-644.
- Kim, G., Lee, C. and Suh, K.-D. (2004). Generation of incident random waves in numerical mild-slope equation models using a source function method. Proc. of 2nd Int. Conf. on Asian and Pacific Coasts, Makuhari.
- Larsen, J. and Dancy, H. (1983). Open boundaries in short wave simulations a new approach. Coastal Engineering, 7, 285-297.
- Lee, C., Cho, Y.-S. and Yum, K. (2001). Internal generation of waves for extended Boussinesq equations. Coastal Engineering, 42, 155-162.
- Lee, C., Kim, G. and Suh, K.-D. (2003). Extended mild-slope equation for random waves. Coastal Engineering, 48, 277-287.
- Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.-S. and Suh, K.D. (1998). Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. Coastal Engineering, 34, 243-257.
- Lee, C. and Suh, K.D. (1998). Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations. Coastal Engineering, 34, 35-57.
- Madsen, P.A. and Larsen, J. (1987). An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation. Coastal Engineering, 11, 329-351.
- Madsen, P.A. and Schäffer, H.A. (1998). Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves derivation and analysis. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 356, 3123-3184.
- Madsen, P.A. and Sorensen, O.R. (1992). A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly varying bathymetry. Coastal Engineering, 18, 183-204.
- Nadaoka, K., Beji, S., and Nakagawa, Y. (1994). A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions. Proc. of 24th Int. Conf. Coastal Eng., 427-442.
- Nwogu, O. (1993). Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engineering, ASCE, 119, 618-638.
- Peregrine, D.H. (1967). Long waves on a beach. J. Fluid Mech., 27, 815-827.
- Radder, A.C. and Dingemans, M.W. (1985). Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves. Wave Motion, 7, 473-485.
- Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S. (1997). Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. Coastal Engineering, 32, 91-117.
- Wei, G. and Kirby, J.T. (1995). Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engineering, 121(5), 251-261.
- Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T. and Subramanya, R. (1995). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. J. Fluid Mech., 294, 71-92.
- Wei, G., Kirby, J.T. and Sinha, A. (1999). Generation of waves in Boussinesq models using a source function method. Coastal Engineering, 36, 271-299.
- Woo, S.-B. and Liu, P. L.-F. (2004). Finite-element model for modified Boussinesq equations. II: applications to nonlinear harbor oscillations. J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engineering, 130(1), 17-28.

Received February 14, 2005

Accepted March 9, 2005