응용통계연구 제 18권 1호, 2005년, pp. 57-66

얼랑분포의 축차확률비검정과 관련된 적분 방정식의 해

이은경[1] 나명환[2] 이윤동[3]

요 약

본 연구에서는 얼랑(Erlang)분포의 규모모수에 대한 축차확률비검정(SPRT)과 관련된 적분방정식의 정확한 해를 구하는 법을 살펴보기로 한다. 축차확률비검정에서 그 평균 표본 개수, 그리고 1종 오류 확률과 2종 오류 확률은 프레돔 형태의 적분 방정식으로 나타나게 된다. 이러한 적분 방정식은 보통 가우시안 쿼드러쳐(qudrature)를 이용하여 근사적으로 그 해를 구하는 것이 일반적이다. 얼랑분포의 경우 이러한 적분방정식의 해가 정확하게 구할 수 있음이 알려져 있다. 본 연구에서는 얼랑분포에서 그 해를 구하는 구체적 방법을 살펴보기로 한다.

주요용어: 얼랑분포, 적분방정식, 축차확률비검정

1. 서론

얼랑분포는 포아송 확률과정이나 그 합으로 나타나는 확률과정에서 주로 나타나는 분포로, 통신이론 등에 자주 사용되는 분포이다. 또한 정규분포에서 얻어지는 짝수 자유도를 갖는 표본분산의 분포도 얼랑분포를 따르는 것으로 알려져있다. 얼랑분포는 수리적인 정의상 모양모수가 자연수가 되는 감마분포로서 정의되고 그 분포함수가, 자연수 n에 대하여,

$$F_n(x) = (1 - e_{n-1}(x) \cdot e^{-x}) \cdot I(x \geq 0)$$

와 같이 주어진다. 여기서 $e_n(x) \equiv 0$, $n = -1, -2, \ldots$이고 $e_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$, $n = 0, 1, \ldots$ 라고 정의되었고, $I(\cdot)$ 는 괄호 안의 값이 참이면 1을 갖고 그렇지 않으면 0을 갖는 특성함수이다.

축차확률비검정은 Neyman-Pearson 정리에 기반을 둔 검정법으로, 오류 확률들이 동일한 경우에 평균적으로 가장 작은 수의 표본만으로 검정 절차를 수행하게 하는 장점을 가지고 있다. 또한 공정관리에서 거론되는 누적합관리도는 반복적인 축차확률비검정으로 해석되어진다. 독립인 확률변수열 X_i, $i = 1, 2, \ldots$ 이 있을 때, 그 각각의 평균이 μ 이고 분포함수가 $F_n(x/\mu)$ 로 주어진 경우에서 $H_0 : \mu = \mu_0$ 이고 $H_1 : \mu = \mu_1$ 인 가설 검정을 위한 축차확률비검정 (SPRT) 는, $T_i(s) = s + \sum_{j=1}^{i}(X_j - k)$, $i = 1, 2, \ldots$라고 할 때, 통계량 $T_i(0)$

1) (120-750) 서울시 서대문구 대현동 11-1, 이화여자대학교 통계학과
E-mail: eklee@ewha.ac.kr
2) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300 번지 전남대학교 수학통계학부 조교수
E-mail: nmh@chonnam.ac.kr
3) (143-701) 서울시 광진구 화양동 1번지 건국대학교 응용통계학과 조교수
E-mail: poisson@dreamwiz.com (교신저자)

에 의하여 수행된다. 여기서 k 는 참조값 등으로 불리는 값으로 SPRT 의 최적성이 만족되도록 하기위하여 보통 $\mu_0/2$ 인 값이 자주 사용된다. 여기서와 이 이후에서 표현의 간결성을 위해서 일반성의 상실없이 $\mu_0 = 1$ 임을 가정하기로 한다. 초기값 T_0 는 s 를 갖는 것으로 정의된다. 축차확률비검정은 적당한 양수 h에 대하여, $0 \leq T_i \leq h$ 인 동안 반복적으로 검정을 계속하고 $T_i < 0$ 인 경우에 $\mu = min(1, \mu_1)$라는 결론을 내리고 검정 절차를 마무리하고, $T_i > h$ 인 경우에 $\mu = max(1, \mu_1)$라른 결론을 내리고 검정 절차를 마무리 하게된다.

이 때 t $(t > 0)$를 $T_i \notin [0, h]$ 가 되는 최초의 시점 i 이라고 할 때, 이러한 축차확률비 검정에서, t 의 기대값 $E(t)$로 정의되는, 평균표본개수 $N(s)$와 $\mu = min(1, \mu_1)$ 으로 결론이 날 확률 $P(s)$는 다음과 같은 적분방정식의 형태로 정의된다. 초기값 T_0가 s로 주어진 경우,

$$P(s) = F_n(k - s) + \int_0^h P(x) f_n(x - s + k) dx, \tag{1.1}$$

이고

$$N(s) = 1 + \int_0^h N(x) f_n(x - s + k) dx, \tag{1.2}$$

와 같이 표현된다. 여기서 $f_{n+1}(x) = (n!)^{-1} x^n e^{-x} I(x \geq 0)$ 이다.

위의 두 적분방정식의 해를 구하는 문제는, $n = 1$인 경우는 포아송 확률과정의 추정과 관리 문제에서 중요한 응용을 갖게되고, $n > 1$ 인 경우는 정규분포의 모분산에 대한 축차적 추정과 관리 문제에 중요한 응용성을 갖는다. Chang과 Gan (1995)는 위 적분방정식의 해를 구하는 대신 시뮬레이션 연구와 감마분포를 로그노말분포로 근사하는 방법론을 사용하여 공정분산의 관리를 위한 누적합관리도의 평균런의 길이에 관한 연구를 수행한 바 있다.

본 연구에 앞서 지수분포($n = 1$)인 경우는 Vardeman과 Ray(1985), Stadje(1987) 등에 의하여 연구 되어졌고, 일반적인 $n \geq 1$ 에 대하여는 Kohlruss(1994), Knoth(1998) 등에 의하여 연구되어졌다. Gan과 Choi(1994) 는 지수분포인 경우 Vardeman과 Ray(1985)가 제안한 근을 구하는 프로그램을 구현하였다. 최근 Lee(2004)는 앞서의 연구들에서 제시된 근을 하나의 통합적 틀 안에서 한꺼번에 구할 수 있음을 보였고, 특히 지수분포에 대하여 그 해를 선형방정식을 푸는 중간 과정 없이, 반복적으로 정의된 수열을 구함으로써 간단하게 얻을 수 있음을 보였다.

그러나 Lee(2004)의 방법을 직접적으로 적용하게 되면, n 이 3 이상이 되고 h 가 큰 값을 갖는 경우에 적용하는 경우, 그 중간 과정에서 풀어야 하는 선형방정식이 조건이 나쁜 (ill- conditioned) 행렬을 포함하게 되어 현실적으로 그 해를 구할 수 없는 문제에 직면하게 된다. Knoth(1998)는 누적합관리도 평균런의 길이를 구하는 연구에서 Lee(2004)와 마찬가지로 일반적 수식을 구하였으나, 그 수식에 오류가 있다. Knoth(1998)에 그림으로 표현된 수치적 결과에 대하여, 저자와의 개인적 교신에서 Knoth는 자신의 연구에서 수치적 계산은 논문에서 유도된 공식에 의한 것이 아니고, Brook과 Evans (1972) 에서와 같은 유한요소법에 근거한 근사적 방법을 사용한 것임을 밝힌 바 있다.

본 연구에서는 Lee(2004)에서 제안된 해를 구하는 과정에서 발생하는, 조건이 나쁜 행렬의 역행렬을 구해야 하는 수치적 문제를 분해정복적 방법에 의하여 해결하는 알고리즘

을 제안하게 된다. 이 과정에서 Lee(2004)가 제안한 방법의 일부를 보다 적용하기 쉽게 개선한다.

2. 적분방정식의 해

얼랑분포의 분포함수 $F_n(x)$와 밀도함수 $f_n(x)$는 $x<0$ 인 경우에 0 인 값을 갖는 이유로 위의 두 적분방정식 (1.1) 과 (1.2) 는 다음과 같이 다시 표현된다. $P(s)$와 $N(s)$를 통합적으로 $G_n(s)$라고 나타내기로 하자.

$$G_n(s)=\begin{cases} A_0+A_1R_n(k-s)+\displaystyle\int_0^h G_n(x)r_n(x-s+k)dx\ , & s\le k\text{일 때},\\ B_0+B_1R_n(k-s)+\displaystyle\int_{s-k}^h G_n(x)r_n(x-s+k)dx, & s\ge k\text{일 때}, \end{cases} \tag{2.1}$$

여기서 $R_n(x)=1-e_{n-1}(x)e^{-x}$ 이고 $r_{n+1}(x)=(n!)^{-1}x^ne^{-x}$ 이다. 또한 상수 (A_0,A_1,B_0,B_1)은 $P(s)$ 의 경우는 $(0,1,0,0)$인 값을 갖고, $N(s)$의 경우는 $(1,0,1,0)$으로 주어 진다.

Lee(2004)는 두 적분방정식 (1.1) 과 (1.2)의 해를 구하기 위하여 다음과 같은 방법을 사용하였다. $r_0(x)\equiv 0$ 와 $R_0(x)\equiv 1$라고 정의하면, $n=1,2,\ldots$에 대하여, 함수열 $R_n(x)$ 와 $r_n(x)$는

$$R_n'(x)=-R_n(x)+R_{n-1}(x), \tag{2.2}$$

$$\text{이고}\quad r_n'(x)=-r_n(x)+r_{n-1}(x). \tag{2.3}$$

인 성질을 갖는다. 이로 부터 D_s를 변수 s에 대한 미분 연산자라고 정의할 때, 적분방정식 (2.1)는 다음과 같이 축차적으로 정의되는 n차의 비제차 미분방정식(non-homogeneous differential equatrion)으로 표현된다. $n\ge 1$ 에 대하여,

$$(1-D_s)^nG_n(s)=\begin{cases} A_0+A_1\ , & s\le k\text{ 일 때 },\\ B_0+B_1+G_n(s-k)\ , & s\ge k\text{일 때 }, \end{cases} \tag{2.4}$$

로 주어진다. 위의 미분방정식을 살펴보면, $G_n(s)$, $s\in[-\infty,k]$ 는 선형 제차방정식(linear homogeneous differential equation)의 형태를 갖고, $G_n(s)$, $s\in[ik,(i+1)k]$ 는 비제차항이 $G_n(s)$, $s\in[(i-1)k,ik]$ 에 따라 결정되는 형태를 갖고 있다. 따라서 $G_n(s)$는 정의되는 구간 $s\in[ik,(i+1)k]$에 따라 다른 형태의 함수식으로 표현되게 된다.

두 양수 h, k의 비율 h/k 이상의 최소정수를 m 이라고 하면, 관심이 되는 구간 $s\in[0,(m+1)k]$ 는 $[0,k]\cup(k,2k]\cup\cdots\cup(mk,(m+1)k]$ 와 같이 $m+1$ 개의 구간으로 구분되고, $h\in((m-1)k,mk]$이다. 이 때 $[ik,(i+1)k]$ 인 구간에서의 $G_n(s)$를 $G_{n,i}(s)$라고 나타내기로 하자. 이로부터 (2.4)의 해는

$$G_{n,i}(s)=A+i\cdot B-e^{s-ik}\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{l,j}\,e_{l+n(i-j)}((l+i-j)k-s) \tag{2.5}$$

로 표현된다. 여기서 $A = A_0 + A_1$ 이고 $B = B_0 + B_1$ 인 것으로 정의되었다. 관심되는 구간 $[0,(m+1)k]$ 내에서 $G_n(s)$는 $n(m+1)$개의 계수 $\alpha_{l,j}$를 이용하여 표현된다.

이 계수를 구하기 위하여, 먼저 다음과 같은 연속성 조건을 고려한다. 미분 차수 $u = 0, 1, \ldots, (n-1)$에 대하여

$$(1-D_s)^u G_n(s) = \begin{cases} A_0 + A_1 R_{n-u}(k-s) + \int_0^h G_n(x) r_{n-u}(x-s+k)dx \ , \ k \geq s \\ B_0 + B_1 R_{n-u}(k-s) + \int_{s-k}^h G_n(x) r_{n-u}(x-s+k)dx \ , \ k \leq s. \end{cases} \tag{2.6}$$

인 관계를 얻는다. 위의 (2.6)에서 우측의 적분항은 절대연속인 측도에 대한 적분형태를 나타내고 있어서 함수 $G_n(s)$의 연속성과 관련없이 항상 연속함수로 나타나게 된다. 따라서 $u = 0, 1, \ldots, (n-1)$에 대하여 $(1-D_s)^u G_n(s)$는 연속인 함수이다. 그러므로

$$(1-D_s)^u G_{n,(i-1)}(ik) = (1-D_s)^u G_{n,i}(ik)$$

인 조건이 성립하고 이로부터,

$$q_{u,l}^{i,j}(n,h,k) = e_{l+n(i-j)-u}((l-j)k) - e^k \, e_{l+n(i-j-1)-u}((l-j-1)k)$$

라고 할 때, $i = 1, 2, \ldots, m$와 $u = 0, 1, \ldots, (n-1)$ 에 대하여

$$\sum_{j=0}^{i} \sum_{l=0}^{n-1} q_{u,l}^{i,j}(n,h,k)\, \alpha_{l,j} = B$$

인 nm개의 선형 방정식을 얻는다.

또한 나머지 n개의 조건식을 얻기위해 다음 사항을 고려하게 된다. Lee(2004)에서는 (2.6) 에 (2.5) 을 대입하고 $s = 0$인 경우에 대한 조건식을 이용하였으나 이 방식은 선형방정식의 풀이를 어렵게 만드는 단점이 있다. 이 점을 개선하기 위하여 보다 간단하게 표현되는

$$[(1-D_s)^u G_n(s)]_{s=h+k} = B_0 + B_1 \, R_{n-u}(-h)$$

인 조건으로 부터,

$$\begin{aligned} q_{u,l}^{m+1,j}(n,h,k) &= -e^{h-mk+k} \, e_{l+n(m-j)-u}((l-j-1)k + mk - h) \quad \text{이고} \\ d_u(n,h,k) &= -A - m\,B + B_0 + B_1 \, R_{n-u}(-h) \end{aligned}$$

라 할 때,

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{n-1} q_{u,l}^{m+1,j}(n,h,k)\, \alpha_{l,j} = d_u(n,h,k)$$

인 선형 조건을 얻는다. 여기서 $u = 0, 1, \ldots, (n-1)$이다. $s = 0$ 인 경우가 아니고 $s = h+k$인 경우를 대입하기 위해서는 $G_{n,m}(s)$가 구해져야 하므로 위의 방법은 Lee(2004)의 방법에 비

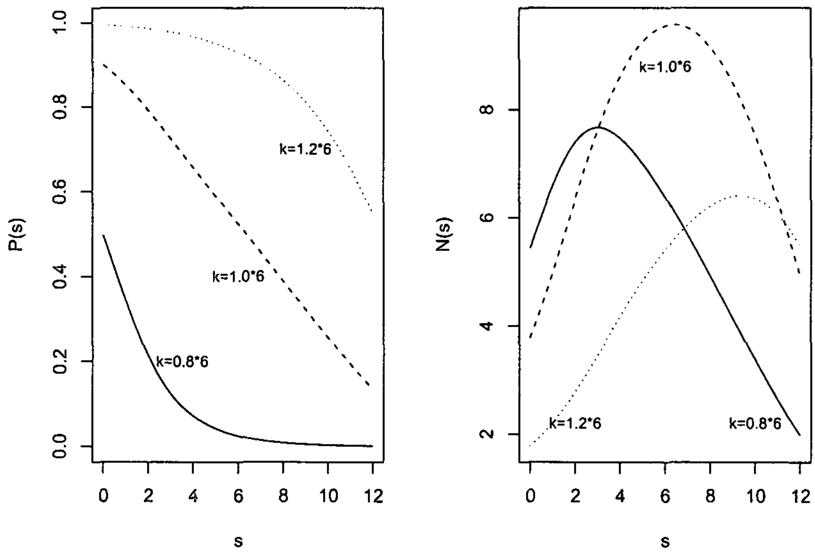

그림 2.1: n=6 이고 h=12 인 경우에서 P(s) 와 N(s)

해 m개의 계수를 더 구하여야 하는 단점이 있으나, 더욱 단순하고 간결한 알고리즘 표현을 가능하게 하는 장점이 있다.

벡터 $\boldsymbol{\alpha}_j$를 $\alpha_{l,j}, l=0,1,\ldots,(n-1)$ 로 이루어진 열벡터라고 하고, $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_0^t,\boldsymbol{\alpha}_1^t,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m^t)^t$라 하자. 그리고 $q^{i,j}$를 $\{q_{u,l}^{i,j}(n,h,k)\}_{u,l}$로 이루어진 $n\times n$ 행렬이라 하자. 또한 $\boldsymbol{d}$를 $d_u(n,h,k)$, $u=0,1,\ldots,(n-1)$ 로 이루어진 벡터라고 하고, $\mathbf{1}_n$을 크기 n인 열벡터 $(1,1,\ldots,1)^t$ 이라 하자. 그러면

$$Q=\begin{pmatrix} q^{1,0} & q^{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ q^{2,0} & q^{2,1} & q^{2,2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ q^{m,0} & q^{m,1} & q^{m,2} & \cdots & q^{m,m} \\ q^{(m+1),0} & q^{(m+1),1} & q^{(m+1),2} & \cdots & q^{(m+1),m} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\delta}=\begin{pmatrix} B\,\mathbf{1}_n \\ B\,\mathbf{1}_n \\ \cdots \\ B\,\mathbf{1}_n \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$$

라고 할 때 $\boldsymbol{\alpha}=Q^{-1}\boldsymbol{\delta}$ 인 관계가 성립한다. 행렬 Q는 크기가 $n(m+1)\times n(m+1)$ 인 조건이 나쁜 행렬이 되어 그 역행렬을 직접 구하는 것이 사실상 불가능하게 된다. Q가 조건이 나쁜 행렬이 되는 이유는 기본적으로 앞서 사용한 식에 개입되어 있는 $e_t(x)$ 때문이다. 이러한 문제를 근본적으로 해결하기 위해서는 직교다항식을 이용한 방법이 필요하나, 직교다항식을 사용하는 경우는 대신 적분방정식의 근에 대한 함수적 관계 규명에 어려움이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방법으로 본 논문에서는 행렬 Q의 역행렬을 직접 구하는 대신, 행렬 Q를 위에서와 같이 블럭 구조를 갖도록 정의하고, 그 특성을 이용하여 다음

에서와 같이 보다 크기가 작은 $n \times n$ 행렬들의 역행렬을 구함으로써 행렬 Q의 역행렬을 구하는 방법을 사용한다. 이렇게 함으로써, 공정분산의 축차적 관리 문제에서와 같이 통계적으로 관심이 되는 적당히 큰 n에 $(n \leq 7)$ 대하여도 별다른 수치적 어려움 없이 관심이 되는 계수 $\boldsymbol{\alpha}$를 구하는 것을 가능하다. 이를 위해서 다음과 같은 알고리즘이 고려되어진다.

1. $v^{(m+1),j} = q^{(m+1),j}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $\quad \boldsymbol{b}^{m+1} = \boldsymbol{d}$
2. $i = m, (m-1), \ldots, 1$의 순서로,
   $v^{i,j} = q^{i,j} - q^{i,i}[v^{(i+1),i}]^{-1} v^{(i+1),j}$, $j = 0, 1, \ldots, (i-1)$
   $\boldsymbol{b}^i = B\boldsymbol{1}_n - q^{i,i}[v^{(i+1),i}]^{-1}\boldsymbol{b}^{(i+1)}$

를 계산하고 이로 부터, 다음과 같이 하부 블럭 삼각행렬 V 와 $\boldsymbol{b}$를 구성한다.

$$V = \begin{pmatrix} v^{1,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v^{2,0} & v^{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ v^{m,0} & v^{m,1} & v^{m,2} & \cdots & 0 \\ v^{(m+1),0} & v^{(m+1),1} & v^{(m+1),2} & \cdots & v^{(m+1),m} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}^1 \\ \boldsymbol{b}^2 \\ \cdots \\ \boldsymbol{b}^m \\ \boldsymbol{b}^{m+1} \end{pmatrix}$$

이 때, $\boldsymbol{\alpha}$는 $V^{-1}\boldsymbol{b}$로 주어진다. 이의 계산을 위해서 블럭구조하에서의 전방향 대입법을 적용하여 다음과 같이 $\boldsymbol{\alpha}$를 구하게된다.

1. $\boldsymbol{\alpha}_0 = [v^{1,0}]^{-1}\boldsymbol{b}^1$
2. $\boldsymbol{\alpha}_i = [v^{(i+1),i}]^{-1}[\boldsymbol{b}^{(i+1)} - \sum_{j=0}^{i-1} v^{(i+1),j}\boldsymbol{\alpha}_j]$, $i = 1, 2, \ldots, m$

그림 2.1은 $n = 6$ 이고 $h = 12$ 일 때 $P(s)$와 $N(s)$를 위의 알고리즘에 따라 구한 결과이다. 각각에 대하여 k가 $n = 6$에 0.8,1.0,1.2 을 곱한 경우를 계산하였다.

3. 누적합 관리도에의 응용

축차확률비 검정의 응용방법으로 자주거론 되는 것이 누적합관리도를 통한 공정관리 문제이다. 누적합관리도는 다음과 같이 나타나는 T_i^u와 T_i^{1d}를 통하여 X_i들이 갖는 분포에서 평균의 증가나 감소를 검출하는 방법이다. $i = 1, 2, \ldots$에 대하여

$$\begin{aligned} T_i^u &= \max(\,0,\ T_{i-1}^u + (X_i - k)), \\ T_i^{1d} &= \min(\,0,\ T_{i-1}^{1d} + (X_i - k)) \end{aligned}$$

이고 $T_0^u = T_0^{1d} = s$이다. $T_i^u > h$ 인 경우 X_i들이 갖는 분포에서 평균의 증가가 일어난 것으로 판단하고, $T_i^{1d} < -h$ 인 경우 평균의 감소가 일어난 것으로 판단하게 된다. 누적합관리도의 특성은 보통 평균런의 길이로 표시되는데, T_i^u와 T_i^{1d}에 대한 평균런의 길이를 초기값 s에 대한 함수로 $H(s)$ 또는 $L^1(s)$와 같이 나타낼 때, 그 함수들도 적분항을 갖는 적분방정식의 형태로 다음과 같이 정의된다.

$$H(s) = 1 + H(0)F_n(k-s) + \int_0^h H(x)f_n(x-s+k)dx, \tag{3.1}$$

$$L^1(s) = 1 + L^1(0)(1 - F_n(k-s)) + \int_{-h}^0 L^1(x)f_n(x-s+k)dx, \tag{3.2}$$

위에서 $H(s)$ 는 $s \in [0,h]$를 포함하는 구간의 값이 주요 관심이되고, $L^1(s)$ 는 $s \in [-h,0]$을 포함하는 구간의 값이 관심대상이 된다. 특히 T_i^{1d}를 이용하여 평균의 감소를 검출하는 방법은 다음과 같은 동일한 방법을 가지게 된다.

$$\begin{aligned} T_i^{2d} &= \max(\ 0,\ T_{i-1}^{2u} - (X_i - k)), \\ T_i^{d} &= \min(\ h,\ T_{i-1}^{d} + (X_i - k)), \end{aligned}$$

일 때 $T_i^{2d} > h$ 이거나 $T_i^d < 0$ 인 경우 평균의 감소를 판단하게 된다. 각 경우에서 평균런의 길이는 적분방정식의 형태로 표현할 때 표현상 약간씩의 차이를 보이게 된다. 본 논문에서는 평균의 증가를 검출하기 위한 경우와의 일관된 표현을 위해서, 평균의 감소를 검출하기 위한 방법으로 T_i^d를 이용하는 방법을 주로 고려한다. T_i^d의 경우 평균런의 길이에 대한 함수 $L(s)$는

$$L(s) = 1 + L(h)(1 - F_n(h+k-s)) + \int_0^h L(x) f_n(x-s+k)dx, \tag{3.3}$$

로 나타나고, 관심 대상이 되는 구간은 $s \in [0,h]$을 포함하는 구간이다. 이 때 특히 관심이 되는 값은 $H(0)$과 $L(h)$가 되는데, 두 값은 각각 앞서 얻는 $N(s)$와 $P(s)$로 부터 다음과 같은 관계로 부터 직접 얻어진다.

$$H(0) = \frac{N(0)}{1-P(0)}, \qquad L(h) = \frac{N(h)}{P(h)}. \tag{3.4}$$

위 식은 누적합 관리도와 축차 확률비 검정의 관계에서 자주 거론되는 식으로, 누적합 관리도가 반복적인 축차 확률비 검정과 동일하다는 해석으로 부터 곧바로 얻어진다. 초기값이 0 으로 고정된 축차 확률비 검정에서 평균 표본 개수는 $N(0)$로 주어지고, 평균의 증가가 결론으로 주어질 확률은 $1 - P(0)$ 이므로, 평균의 증가가 얻어지기 까지의 평균런의 길이 $H(0)$는 위에서와 같이 주어진다. 마찬가지로 초기값이 h 로 주어진 축차 확률비 검정을 고려하는 경우, 그 평균 표본 개수 $N(h)$, 그리고 평균의 감소가 결론날 확률인 $P(h)$ 사이의 관계로 부터, 평균의 감소가 얻어지기 까지의 평균 런의 길이 $L(h)$ 에 대한 식의 위와 같이 주어진다.

또한, $H(s)$와 $L(s)$는 앞서 $G_n(s)$에 대한 식 (2.1)에서와 마찬가지의 형태로 표현되는데, 이 때 정의되는 (A_0, A_1, B_0, B_1)는 $H(s)$인 경우 $(1, H(0), 1, 0)$을 갖고 $L(s)$인 경우는 $A_0 = B_0 = 1 + L(h)$이고 $A_1 = B_1 = -L(h)$을 갖는 것으로 정의 된다. B_1이 $-L(h)$가 되는 이유는 $F_n(h+k-s)$가 $s \in [0, h+k]$인 구간에서 항상 0이상의 값을 갖기 때문이다. 위의 (3.3)를 (2.1)의 형태로 나타낼 때, 고려해야 할 점은 (2.1)에서의 $R_n(k-s)$ 대신에 $R_n(h+k-s)$가 사용된다는 점이다. 이 차이는 앞서 $G_n(s)$ 의 계수를 구하는 과정에서

$$d_u(n,h,k) \quad = \quad -A - m\,B + B_0 + B_1\,R_{n-u}(0)$$

로 다시 정의하는 것외에 다른 모든 과정은 동일하게 함으로써 해결 가능하다. 위의 (3.4)에 따라 $H(0)$와 $L(h)$를 구하면, $H(s)$와 $L(s)$는 완전하게 정의되고 앞서 설명한 알고리즘에 의하여 그 함수 값을 얻게 된다.

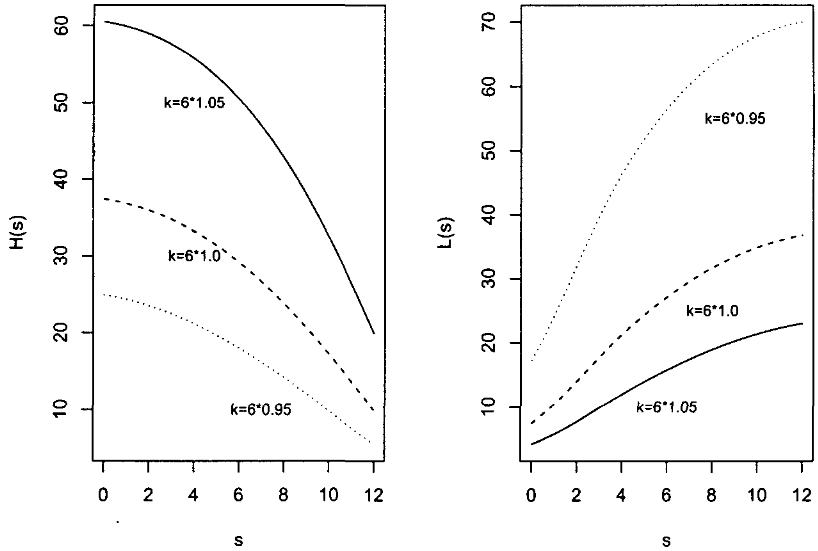

그림 3.1: n=6 이고 h=12 인 경우에서 H(s) 와 L(s)

그림 3.1은 $n = 6$ 이고 $h = 12$ 일 때 $H(s)$와 $L(s)$를 위의 알고리즘에 따라 구한 결과이다. 각각에 대하여 k가 $n = 6$에 0.95,1.0,1.05 를 곱한 경우를 계산하였다.

4. 맺음말

얼랑분포에 대한 축차확률비검정과 관련되어 적분방정식의 형태로 나타나는 네 가지 방정식의 정확한 근을 구하는 방법에 대하여 살펴 보았다. 이 연구에서 제시한 방법은 n이 적당히 큰 범위 내에서 통계적으로 관심이 되는 문제를 해결할 수 있는 정도의 수치적 정확성은 가지고 있으나, n이 매우 큰 경우에는 아직도 만족스러운 정도의 수치적 정확성을 제공해 주지는 못하는 것으로 보인다. 이 문제의 보다 정밀한 해결을 위해서는 직교다항식을 이용한 방법론 연구가 필요하리라 보인다. 이 논문에서 연구한 결과는 포아송 확률과정에 대한 축차적 추정 문제와 공정분산 추정과 관리를 위한 방법론 연구에 적용이 가능하리라 기대된다.

감사의 글

본 논문을 심사해주신 편집위원과 두분의 심사위원께 깊은 감사를 드립니다. 이 연구는 2004년도 이화여자 대학교 교내 연구비 지원에 의한 연구임.

참고문헌

Brook, D. and Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of cusum run length, *Biomtrka*, **59**, 539- 549.

Chang, T. C. and Gan, F. F. (1995). A cumulative sum control chart for monitoring process variance, *Journal of Quality Technology*, **27**, 109- 119.

Gan, F. and Choi, K. (1994). Computing average run lengths for exponential CUSUM schemes, *Journal of Quality Technology*, **26**, 134-139.

Knoth, S. (1998). Exact average run lengths of CUSUM schemes for Erlang distributions, *Sequential Analysis*, **17**, 173-184.

Kohlruss, D. (1994). Exact formulars for the OC and the ASN functions of the SPRT for Erlang distributions, *Sequential Analysis*, **13**, 53-62.

Lee, Yoon-dong. (2004). Unified solutions of integral equations of SPRT for exponential random variables, *Communications in Statistics A, Theory and Methods*, **33**, 65-74.

Stadje, W. (1987). On the SPRT for the mean of an exponential distribution, *Statistics & Probability Letters*, **5**, 389-395.

Vardeman, S. and Ray, D. (1985). Average run lengths for CUSUM schemes shen observations are exponentially distributed, *Technometrics*, **27**, 145-150.

[2004년 5월 접수, 2004년 9월 채택]

Solutions of Integral Equations Related to SPRT for Erlang Distribution *

Eun-Kyung Lee[1)] Myung Hwan Na[2)] Yoon-Dong Lee[3)]

ABSTRACT

In this paper, we propose a method to evaluate the solutions of the renewal equations related to SPRT for Erlang distribution. In SPRT, the Average Sample Number(ASN) and type I or type II error probabilities are shown in Fredholm type integral equations. The integral equations are generally solved by the approximation method using Gaussian quadrature. For Erlang distribution, it has been known that the exact solutions of the equations exist. We propose the algorithm to solve the equations.

Keywords: Erlang distribution; Integral equation; SPRT.

* This work was supported by Research Grant of Ewha Womans University

1) Professor, Dept. of Statistics, Ewha Womans University, 11-1 DaeHyun-Dong, Seoul, 120-750, Korea.
E-mail: eklee@ewha.ac.kr

2) Assistant professor, Dept. of Statistics, Chonnam National Univ., 300 YongBong-Dong, GwangJoo, 500-757, Korea.
E-mail: nmh@chonnam.ac.kr

3) Assistant professor, Dept. of Applied Statistics, Konkuk University, 1 hwaYang-Dong, Seoul, 143-701, Korea.
E-mail: poisson@dreamwiz.com