

# 천정 크레인시스템의 안정성 해석

반갑수<sup>#</sup>, 이광호<sup>\*</sup>, 모창기<sup>\*</sup>, 이종규<sup>\*</sup>

## Analysis of Stability for Overhead Crane Systems

Gab Su Ban<sup>#</sup>, Kwang Ho Lee<sup>\*</sup>, Chang Ki Mo<sup>\*</sup> and Jong Gyu Lee<sup>\*</sup>

### ABSTRACT

Overhead crane systems consist of trolley, girder, rope, objects, trolley motor, girder motor, and hoist motor. The dynamic system of these systems becomes a nonlinear state equations. These equations are obtained by the nonlinear equations of motion which are derived from transfer functions of driving motors and equations of motion for objects. From these state equations, Lyapunov functions of overhead crane systems are derived from integral method. These functions secure stability of autonomous overhead crane systems. Also constraint equations of driving motors of trolley, girder, and hoist are derived from these functions. From the results of computer simulation, it is founded that overhead crane systems is secure.

**Key Words** : Overhead crane systems (천정크레인시스템), Nonlinear state equations (비선형상태방정식), Lyapunov function (리아푸노브 함수), Constraint equations (구속방정식)

### 1. 서론

자동창고, 항만 등과 같은 작업장에서 운용되고 있는 천정 크레인이 화물을 운송할 때, 크레인의 이송 속도를 증가하면 화물운송시간을 단축할 수 있지만 크레인 구동모터의 가감속 특성, 외란 등의 영향으로 화물의 진자운동이 발생하여, 주변 시설물과의 충돌 및 운송화물이 크레인에서 이탈하여 큰 사고유발 등 크레인시스템의 안정성에 좋지 못한 영향을 끼칠 수 있다. 따라서 크레인 이송 속도에 영향을 미치는 크레인 구동모터의 원활한 운동으로 이러한 문제들을 해결할 필요가 있다. 지금까지

지 크레인의 제어기술을 적용하였을 때, 크레인 구동모터의 구속방정식은 구동모터의 최대 회전력, 최대 가속도를 이용하여 정의하였다. 이러한 최대값들은 구동모터의 특성을 미리 결정짓는 단점이 있다.

본 연구는 구동모터의 전달함수 및 뉴턴의 운동법칙으로부터 크레인의 비선형 상태방정식으로 구하고, 이 방정식에서 유도된 리아푸노브함수를 이용하여 크레인시스템을 안정시킬 수 있는 트롤리, 거더 및 호이스트 구동모터의 구속방정식을 유도한 다음 컴퓨터 시뮬레이션으로 검증하는 것이다.

접수일: 2004년 7월 6일; 게재승인일: 2005년 1월 21일

# 교신저자: 상주대학교 자동차공학과

E-mail gsbans@sangju.ac.kr Tel. (054) 530-5403

\* 상주대학교 자동차공학과

## 2. 크레인의 비선형 상태방정식

크레인시스템의 모델링에서 다음과 같은 가정을 한다.

① 줄의 질량을 무시하고, 화물은 형상이 무시되는 질점(mass point)이다.

②

화물의 흔들림각  $\theta$ 는 작다고 간주하여  $|\theta| \ll 1$ 이다.

③ 화물의 권상/권하 가속도  $Z$ 가 충분히 작다.

④ 화물의 질량이 크지 않고, 크레인 구동 모터의 감속비가 매우 크다.

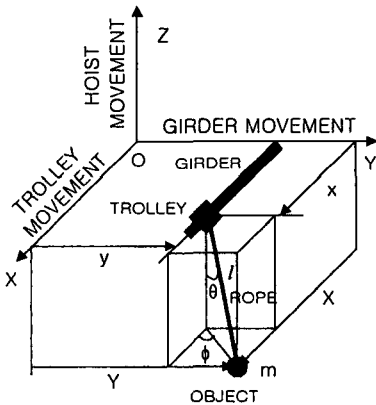


Fig. 1 Schematic diagram of the overhead crane which does three-dimensional motion

Fig. 1과 같이 트롤리, 거더 및 호이스트모터 등의 회전운동으로 크레인이 운송하는 화물의 위치는 다음과 같다.

$$X = x + l \sin \theta \cos \phi \quad (1)$$

$$Y = y + l \sin \theta \sin \phi \quad (2)$$

$$Z = -l \cos \theta \quad (3)$$

여기서,  $X, Y, Z$  는 각각 화물의  $X, Y, Z$  방향의 위치이고,  $x, y$  는 각각 트롤리, 거더의 이송 위치,  $l$ 은 줄 길이이고,  $\theta, \phi$  는 각각 화물의 흔들림각과 비틀림각을 나타낸다.

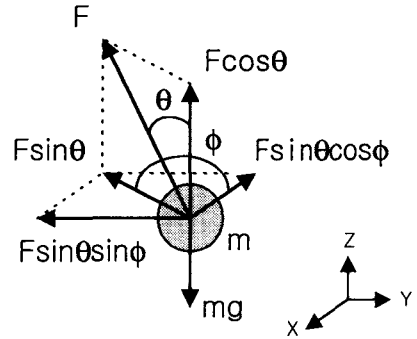


Fig. 2 Applied forces to act on the object

Fig. 2에서 뉴턴의 운동법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$m\ddot{X} = -F \sin \theta \cos \phi \quad (4)$$

$$m\ddot{Y} = -F \sin \theta \sin \phi \quad (5)$$

$$m\ddot{Z} = F \cos \theta - mg \quad (6)$$

여기서,  $m$ 은 화물의 질량,  $F$ 는 줄의 장력,  $g$ 는 중력가속도이다.

가정 ②, ③과 식 (1), (2), (4)~(6)으로부터 화물 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{X} = -\frac{g(X-x)}{l} \quad (7)$$

$$\ddot{Y} = -\frac{g(Y-y)}{l} \quad (8)$$

구동모터들의 회전운동으로 이송운동하는 크레인을 모터의 부하로 간주하여 다음과 같은 전달함수를 이용한다.

$$\Theta_m(s) = \frac{K V(s)}{s(1 + s\tau)} \quad (9)$$

여기서,  $K, \tau$  는 각각 크레인의 특성을 고려한 모터이득상수, 모터시상수이다.

식 (9)로부터 거더, 트롤리, 호이스트 모터의 운동방정식은 각각 다음과 같다.

$$\theta_x = \frac{K_x v_x}{\tau_x} - \frac{\theta_x}{\tau_x} \quad (10)$$

$$\theta_y = \frac{K_y v_y}{\tau_y} - \frac{\theta_y}{\tau_y} \quad (11)$$

$$\theta_z = \frac{K_z v_z}{\tau_z} - \frac{\theta_z}{\tau_z} \quad (12)$$

여기서, 첨자  $x, y, z$ 는 각각 트로리 모터, 거더 모터, 호이스트 모터를 나타내고,  $\theta, \dot{\theta}, K, \tau, v$ 는 각각 모터의 각속도, 각속도, 모터이득상수, 모터시상수, 입력 전압을 나타낸다.

식 (10)~(12)는 다음과 같은 운동방정식으로 변환될 수 있다.

$$\ddot{x} = \frac{r_x K_x v_x}{\tau_x} - \frac{\dot{x}}{\tau_x} \quad (13)$$

$$\ddot{y} = \frac{r_y K_y v_y}{\tau_y} - \frac{\dot{y}}{\tau_y} \quad (14)$$

$$\ddot{l} = \frac{r_z K_z v_z}{\tau_z} - \frac{\dot{l}}{\tau_z} \quad (15)$$

여기서,  $r$ 은 크레인 구동 휠(wheel)의 반지름,  $x = r_x \theta_x, y = r_y \theta_y, l = r_z \theta_z$ 를 나타낸다. 크레인의 운동방정식 (7), (8), (13)~(15)는 트롤리, 거더, 호이스트 모터의 입력전압으로 트롤리, 거더, 줄의 위치를 결정하는 다변수시스템이므로 다음과 같은 비선형 상태방정식이 된다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (16)$$

여기서,

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10}]^T$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$$

$$x_1 = x, \ x_2 = \dot{x}, \ x_3 = y, \ x_4 = \dot{y}, \ x_5 = l,$$

$$x_6 = \dot{l}, \ x_7 = X, \ x_8 = \dot{X}, \ x_9 = Y, \ x_{10} = \dot{Y},$$

$$u_1 = v_x, \ u_2 = v_y, \ u_3 = v_z \text{이며, } X, Y \text{는}$$

각각 화물의  $X, Y$ 축 방향의 속도를 나타낸다.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{x_2}{\tau_x} + \frac{r_x K_x}{\tau_x} u_1 \\ x_4 \\ -\frac{x_4}{\tau_y} + \frac{r_y K_y}{\tau_y} u_2 \\ x_6 \\ -\frac{x_6}{\tau_z} + \frac{r_z K_z}{\tau_z} u_3 \\ x_8 \\ -\frac{g(x_7 - x_1)}{x_5} \\ x_{10} \\ -\frac{g(x_9 - x_3)}{x_5} \end{pmatrix}$$

### 3. 모터의 구속방정식 유도

비선형 시스템이 리아푸노브 의미에서 안정하다면 운동에너지 형태로 표현되는 리아푸노브함수  $V(x)$ 와 그 함수의 변화율  $\dot{V}(x)$ 이 다음 조건을 만족한다.<sup>6</sup>

$$V(x) > 0 \quad (17)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (18)$$

친의 적분법<sup>7</sup>을 적용하여 리아푸노브 함수를 유도할 수 있도록 식 (16)의 비선형 상태방정식을 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_{10}) \quad (19)$$

$$k = 1, 2, \dots, 10$$

여기서,

$$\dot{x}_1 = f_1 = x_2, \ \dot{x}_3 = f_3 = x_4, \ \dot{x}_5 = f_5 = x_6,$$

$$\dot{x}_2 = f_2 = -\frac{x_2}{\tau_x} + \frac{r_x K_x}{\tau_x} u_1,$$

$$\dot{x}_4 = f_4 = -\frac{x_4}{\tau_y} + \frac{r_y K_y}{\tau_y} u_2,$$

$$\dot{x}_6 = f_6 = -\frac{x_6}{\tau_z} + \frac{r_z K_z}{\tau_z} u_3$$

$$\dot{x}_7 = f_7 = x_8, \quad \dot{x}_8 = f_8 = -g \frac{x_7 - x_1}{x_5}$$

$$\dot{x}_9 = f_9 = x_{10}, \quad \dot{x}_{10} = f_{10} = -g \frac{x_9 - x_3}{x_5}$$

식 (19)을 다음과 같이 변형하여 친의 적분식에 이용할 수 있도록 한다.

$$L_k = \dot{x}_k - f_k = 0 \quad (20)$$

리아푸노브 함수를 유도하는데 적용되는 크레인인스탬의 적분식  $I$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \left( \sum_{i=2}^{10} A_{i,i} x_i \right) L_i dt \\ &= \int_0^t (A_{2,2} x_2 L_2 + \dots + A_{10,10} x_{10} L_{10}) dt \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,  $A_{i,i} (i=2, 3, \dots, 10)$  는 리아푸노브함수를 유도하는데 이용되는 임의의 상수이다. 식 (20)를 식(21)에 대입하면 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \left\{ A_{2,2} x_2 \left( \dot{x}_2 - \frac{r_x K_x}{\tau_x} u_1 + \frac{x_2}{\tau_x} \right) \right. \\ &\quad + A_{3,3} x_3 (\dot{x}_3 - x_4) \\ &\quad + A_{4,4} x_4 \left( \dot{x}_4 - \frac{r_y K_y}{\tau_y} u_2 + \frac{x_4}{\tau_y} \right) \\ &\quad + A_{5,5} x_5 (\dot{x}_5 - x_6) \\ &\quad + A_{6,6} x_6 \left( \dot{x}_6 - \frac{r_z K_z}{\tau_z} u_3 + \frac{x_6}{\tau_z} \right) \\ &\quad + A_{7,7} x_7 (\dot{x}_7 - x_8) \\ &\quad + A_{8,8} x_8 \left( \dot{x}_8 + g \frac{x_7 - x_1}{x_5} \right) \\ &\quad + A_{9,9} x_9 (\dot{x}_9 - x_{10}) \\ &\quad \left. + A_{10,10} x_{10} \left( \dot{x}_{10} + g \frac{x_9 - x_3}{x_5} \right) \right\} dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)를 적분항과 적분항이 없는 식으로 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} (A_{2,2} x_2^2 + A_{3,3} x_3^2 + A_{4,4} x_4^2 \\ &\quad + A_{5,5} x_5^2 + A_{6,6} x_6^2 + A_{7,7} x_7^2 \\ &\quad + A_{8,8} x_8^2 + A_{9,9} x_9^2 + A_{10,10} x_{10}^2) \\ &\quad - \int_0^t \left\{ A_{2,2} x_2 \left( \frac{r_x K_x}{\tau_x} u_1 - \frac{x_2}{\tau_x} \right) \right. \\ &\quad + A_{3,3} x_3 x_4 + A_{5,5} x_5 x_6 + A_{7,7} x_7 x_8 \\ &\quad + A_{4,4} x_4 \left( \frac{r_y K_y}{\tau_y} u_2 - \frac{x_4}{\tau_y} \right) \\ &\quad + A_{6,6} x_6 \left( \frac{r_z K_z}{\tau_z} u_3 - \frac{x_6}{\tau_z} \right) \\ &\quad + A_{8,8} x_8 \frac{g(x_7 - x_1)}{x_5} + A_{9,9} x_9 x_{10} \\ &\quad \left. + A_{10,10} x_{10} \frac{g(x_9 - x_3)}{x_5} \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

리아푸노브함수를 유도하고자, 식 (23)에서 적분항이 없는 식  $F(x)$ 를 식 (24)로 나타내고, 적분항이 있는 식  $G(x)$ 를 식 (25)와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} (A_{2,2} x_2^2 + A_{3,3} x_3^2 + A_{4,4} x_4^2 \\ &\quad + A_{5,5} x_5^2 + A_{6,6} x_6^2 + A_{7,7} x_7^2 \\ &\quad + A_{8,8} x_8^2 + A_{9,9} x_9^2 + A_{10,10} x_{10}^2) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} G(x) &= A_{2,2} x_2 \left( \frac{r_x K_x}{\tau_x} u_1 - \frac{x_2}{\tau_x} \right) \\ &\quad + A_{3,3} x_3 x_4 + A_{5,5} x_5 x_6 \\ &\quad + A_{4,4} x_4 \left( \frac{r_y K_y}{\tau_y} u_2 - \frac{x_4}{\tau_y} \right) \\ &\quad + A_{6,6} x_6 \left( \frac{r_z K_z}{\tau_z} u_3 - \frac{x_6}{\tau_z} \right) \\ &\quad + A_{7,7} x_7 x_8 + A_{8,8} x_8 \frac{g(x_7 - x_1)}{x_5} \\ &\quad + A_{9,9} x_9 x_{10} + A_{10,10} x_{10} \frac{g(x_9 - x_3)}{x_5} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (24)에서 함수  $F(x) = V(x)$  이면 식 (25)에서  $G(x) = V(x)$  가 되므로, 식 (23)으로부터 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$I = V(x) - \int_0^t V(x) dt = 0 \quad (26)$$

따라서, 식 (26)으로부터 리아푸노브함수  $V(x)$ 를 얻고자, 식 (24), (25)에서 계수  $A_{i,i}$  를 다음과 같이 둔다.

$$\begin{aligned} A_{3,3} &= A_{5,5} = A_{7,7} = 0 \\ A_{8,8} &= A_{9,9} = A_{10,10} = 0 \\ A_{2,2} &= a > 0, \quad A_{4,4} = b > 0, \quad A_{6,6} = c > 0 \end{aligned} \quad (27)$$

식 (24), (25), (27)로부터 리아푸노브함수와 그 변화율을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} (ax_2^2 + bx_4^2 + cx_6^2) \\ V(x) &= ax_2 \left( \frac{r_x K_x}{\tau_x} u_1 - \frac{x_2}{\tau_x} \right) \\ &+ bx_4 \left( \frac{r_y K_y}{\tau_y} u_2 - \frac{x_4}{\tau_y} \right) \\ &+ cx_6 \left( \frac{r_z K_z}{\tau_z} u_3 - \frac{x_6}{\tau_z} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

크레인시스템의 비선형 상태방정식에서 유도된 리아푸노브함수는 식 (28)에서 보는 바와 같이 이 함수  $V(x)$ 는 제어변수와 상관없이 상태변수들의 영향을 받고,  $V(x) > 0$ 인 조건을 만족하지만, 함수 변화율  $\dot{V}(x)$ 는 상태변수뿐만 아니라 제어변수들의 영향을 받는다.

따라서, 식 (28)에서 리아푸노브함수의 변화율

$\dot{V}(x)$ 이 식 (29)을 만족하도록 제어변수  $u_i (i=1, 2, 3)$  를 선택하면 크레인의 동적 시스템은 안정한 시스템이 될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= ax_2 \left( \frac{r_x K_x}{\tau_x} u_1 - \frac{x_2}{\tau_x} \right) \\ &+ bx_4 \left( \frac{r_y K_y}{\tau_y} u_2 - \frac{x_4}{\tau_y} \right) \\ &+ cx_6 \left( \frac{r_z K_z}{\tau_z} u_3 - \frac{x_6}{\tau_z} \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)에서 우변식의 첫째항, 둘째항, 셋째항은 각각 트롤리 모터, 거더 모터, 호이스트 모터와 관련된 항으로 서로 영향을 미치는 변수가 없는 독립된 항들을 나타내므로, 식 (29)의 부등식을 만족시키는 필요조건식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_2 \left( \frac{r_x K_x}{\tau_x} u_1 - \frac{x_2}{\tau_x} \right) = x_2 \dot{x}_2 \leq 0 \quad (30)$$

$$x_4 \left( \frac{r_y K_y}{\tau_y} u_2 - \frac{x_4}{\tau_y} \right) = x_4 \dot{x}_4 \leq 0 \quad (31)$$

$$x_6 \left( \frac{r_z K_z}{\tau_z} u_3 - \frac{x_6}{\tau_z} \right) = x_6 \dot{x}_6 \leq 0 \quad (32)$$

$x_2 > 0$  이면 트롤리 구동모터의 구속방정식은 다음과 같다.

$$u_1 \leq \frac{x_2}{r_x K_x} \quad (33)$$

$x_4 > 0$  이면 거더 구동모터의 구속방정식은 다음과 같다.

$$u_2 \leq \frac{x_4}{r_y K_y} \quad (34)$$

$x_6 > 0$  이면 호이스트 구동모터의 구속방정식은 다음과 같다.

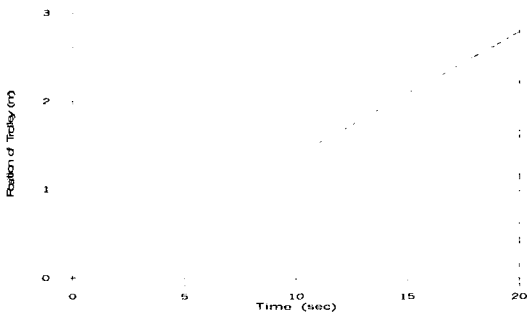
$$u_3 \leq \frac{x_6}{r_z K_z} \quad (35)$$

#### 4. 컴퓨터 시뮬레이션

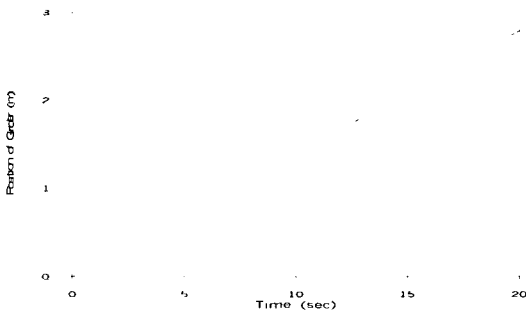
본 연구에서의 컴퓨터 시뮬레이션 방법은 식 (16)으로 유도된 크레인의 비선형 상태방정식에 트롤리 구동모터의 구속방정식 식 (33), 거더 구동모터의 구속방정식 식 (34), 호이스트 구동모터의 구속방정식 식 (35)를 이용하여 분지쿤타 해석방법으로 크레인의 비선형 상태방정식의 해를 구하였다. 그에 따른 크레인의 안정성을 판별한 결과를 Fig. 3, 4에 보여준다.

Fig. 3은 크레인 구동모터들의 구속방정식을 적용하지 않을 때의 결과를 보여준다. Fig. 3 (a), (b), (c)는 각각 트롤리 위치, 거더 위치 및 줄의 길이를 나타내며 트롤리와 거더가 원활하게 이송하고, 줄의 길이가 증가하는 것을 보여준다.

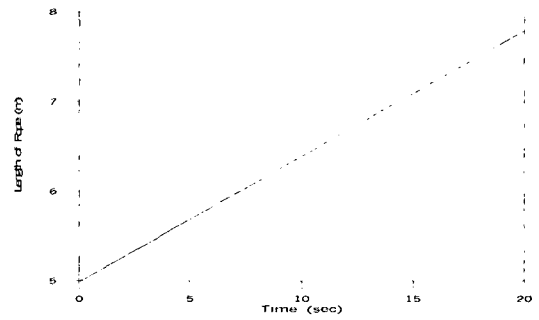
Fig. 3 (d)는 운송화물의 흔들림을 나타내며 진폭이 작아지는 것은 줄 길이가 증가하기 때문에 발생하는 현상으로 줄 길이가 화물 흔들림의 진폭에 영향을 주는 것을 알 수 있다.



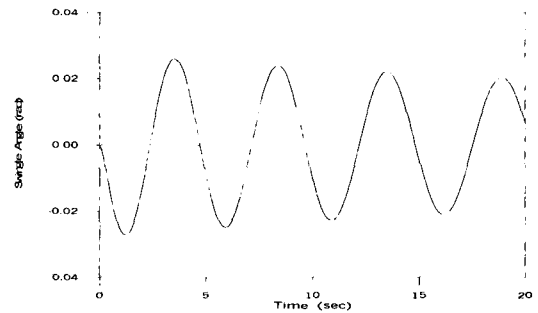
(a) Position of trolley



(b) Position of girder



(c) Length of rope

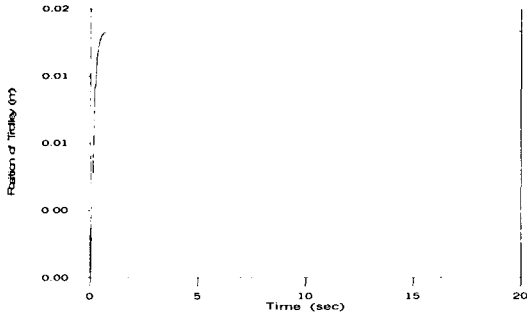


(d) Swing angle of object

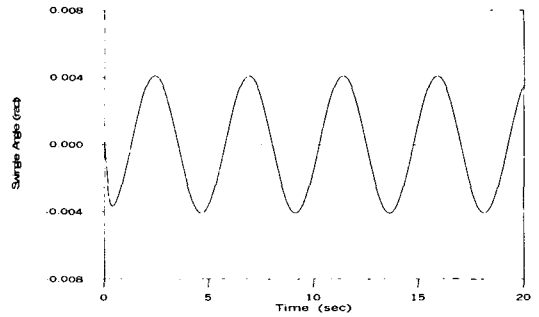
Fig. 3 Response of overhead crane in the unconstraint input

Fig. 4는 크레인 구동모터들의 구속방정식을 적용할 때의 결과를 보여준다. Fig. 4 (a), (b), (c)는 각각 트롤리 위치, 거더 위치 및 줄의 길이를 나타내며 트롤리, 거더 및 줄 길이가 일정한 값에 수렴하는 것을 보여준다.

Fig. 4 (d)는 운송화물의 흔들림을 나타내며 최대 진폭 크기 변화에 영향을 주는 줄 길이가 구속방정식의 적용으로 일정한 값으로 수렴하여, 운송화물의 흔들림에 영향을 미치지 않아서 최대 진폭이 일정한 것을 알 수 있다.

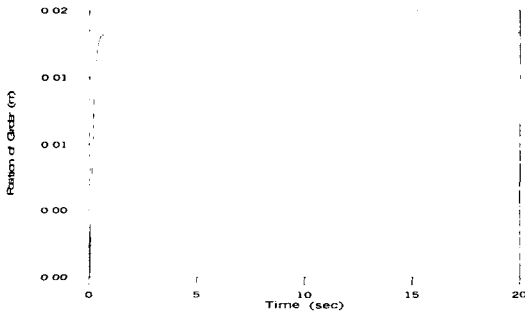


(a) Position of trolley

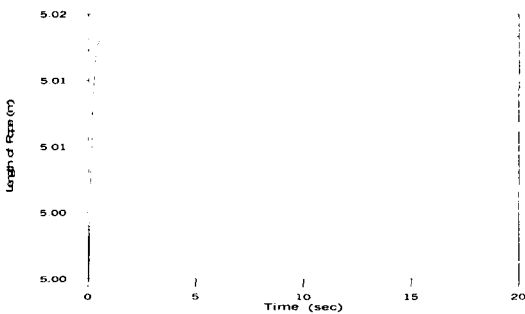


(d) Swing angle of object

Fig. 4 Response of overhead crane in the constraint input



(b) Position of girder



(c) Length of rope

Fig. 3과 4에서 보여준 결과로부터 구동모터들의 구속방정식을 적용할 때 트롤리, 거더 및 줄 길이가 일정한 값에 수렴하고, 운송화물의 흔들림은 구속되지 않은 구동모터의 영향보다 상대적으로 작고, 운송화물의 흔들림이 진동하는 것을 볼 수 있으므로 크레인시스템은 리아푸노브 관점에서 안정하다는 것을 알 수 있다.

### 5. 결론

크레인의 비선형 운동방정식으로부터 유도된 비선형 상대방정식에 적분법을 적용하여 유도된 리아푸노브함수로부터 트롤리모터, 거더모터 및 호이스트모터의 구속방정식을 유도하였다. 이러한 구속방정식을 적용하여 크레인이 화물을 운송할 때, 트롤리, 거더, 및 줄 길이가 수렴하고, 운송화물의 진자각이 작으면서 진동하므로 크레인 구동모터의 구속방정식은 크레인시스템의 안정성을 보장하며, 구속방정식으로부터 구동모터의 속도와 가속도가 반대부호를 가지도록 입력을 만들어야 한다는 것을 알 수 있었다.

### 참고문헌

1. Park, Byung-Suk, Yoon, Ji-Sup and Kang, E-Sok, "Model-Following Time Delay Controller with Modified Error Feedback Controller," Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 17, No. 12, pp. 176-184, 2000.
2. Kim, Young-Bok, "A Study on the Sway Control of a Crane Based on Gain-Scheduling Approach," Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 18, No. 7, pp. 53-64, 2001.
3. Lee, Ho-Hoon, Jeon, Jong-Hag and Choi, Seung-Gap, "A Nonlinear Model - Based Anti-Swing Control for Overhead Cranes with High Hoisting Speeds," Transactions of the KSME A, Vol. 25, No. 9, pp.1461-1467, 2001.
4. Park, Un-Hwan, Lee, Jae-Won, Noh, Sang-Hyun, Yoon, Ji-Sup and Park, Byung-Suk, "Control of the Residual Vibration of Crane Using Equivalent Input Shaper," Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 19, No. 1, pp. 135-142, 2002.
5. Park, Kyoung-Taik, "Intelligent Technology of Port Logistics System," Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 19, No. 2, pp. 41-48, 2002.
6. Brogan, W. L., "Modern Control Theory," Prentice-Hall, 1991.
7. Chin, P. S. M., "A General Method To Derive Lyapunov Functions for Non-linear Systems," International Journal of Control, Vol. 44, No. 2, pp.381-393, 1986.