
직사각형의 전력-접지층에 대한 전압전류 특성해석을 위한 빠른 계산방법

서영석*

Fast computation method for the voltage-current analysis on the rectangular power-ground plane

YoungSuk Suh*

요약

기존의 금속·유전체·금속 기판형태의 전력·접지층 사이의 전압표현식은 2차원 무한급수 형태로 표시된다. 계산시간 단축을 위해 Fourier 급수합 공식을 이용하여 2차원 무한급수를 1차원 무한급수로 변형 시켰다. 이 식들을 $9' \times 4'$ 크기를 가지는 전력·접지층에 대한 전압 계산에 적용 했다. 유도된 1차원 급수 계산식은 기존의 2차원 급수식에 비해 빠른 수렴성과 정확한 결과를 보였다. 이 결과는 반복적인 계산이 많이 필요한 전력·접지층 해석에 유용하게 적용될 수 있을 것이다.

ABSTRACT

The existing analytical expression for the voltage between the power and ground plane consist of metal-dielectric-metal board is expressed in the two dimensional infinite series. To reduce the computation time, the two dimensional infinite series is converted to the one dimensional infinite series using the summation formula of Fourier series. We applied these equations to the analysis of voltage between the $9' \times 4'$ size power-ground plane. The derived one dimensional infinite series shows the more rapid convergency and the more accurate result than the two dimensional infinite series. This equation can be applied to the power-ground plane analysis which needs a lot of the repeating computation

키워드

Power-Ground Plane, PCB, Power Integrity, Ground Bounce

I. 서 론

지금까지 상업적으로 많이 활용되는 디지털 전자회로 보드에서 TTL(Transistor-Transistor Logic)이나 ECL(Emitter Coupled Logic) 논리 게이트를 위한 $+5V/-5.2V$ 공급전압이 주종을 이루어 왔다. 트랜ジ스터의 부피 감소, 속도증가와 소모전력 저감을 위한 필요성 때문에 트랜ジ스터의 케이트 길이는 점차 작아지고 있으며 현재 $0.1\mu m$ 정도의 소자가 활용

되고 있다. 따라서 소자의 항복전압도 낮아지고 이를 극복하기 위해 소자의 공급전압도 5V이내로 점차 낮아지고 있다. 낮은 구동전압으로 인해 노이즈 마진 역시 작아지고 있고, 높은 동작 주파수로 인해 보다 높은 주파수 영역까지 전력을 일정하게 잘 공급할 필요성이 커지고 있다 [1].

높은 주파수로 동작하는 소자에 대해 전력을 충분히 공급하고 공진을 막으키지 않도록 하기 위해 전력·접지면(Power · Ground Plane)을 적절히 설

* 영남대학교 전자정보공학부

접수일자 : 2004. 10. 4

계하는 것은 점점 더 중요해지고 있다[1]. 전력·접지면을 해석하는 방법에는 FEM(Finite Elements Method)와 같은 전자장 수치해석을 이용하는 방법[2], 공진모델을 이용하는 방법[3], 전체 보드를 작은 영역으로 분할하고 각 부분에 대해 등가회로 적용시켜 전체 회로를 구한다음 SPICE모델로 해석하는 방법[4][5], 해석적인 임피던스 식을 이용하는 방법이 있다[1]. 전자장수치해석을 이용하는 경우 보드 내의 모든 지점의 전장 및 전압값을 한꺼번에 계산해서 구할 수 있다는 장점이 있지만 계산 시간이 많이 걸린다. 공진모델은 계산 시간이 짧지만 직사각형이 아니거나 다중기판인 경우 적용하기가 힘들다는 단점이 있다. 회로 모델은 널리 사용되는 SPICE에서 해석이 가능하다는 장점으로 인해 가장 많이 사용되고 있다. 해석적인 임피던스를 사용하는 방법은 특정 두 지점사이의 임피던스를 쉽게 계산할 수 있어서 보드에 스위칭 노이즈를 줄이기 위한 분리 캐പ시턴스 (Decoupling Capacitance)가 존재하는 경우에도 빠른 임피던스 계산이 가능하므로 많이 사용되고 있다.

기존의 해석적인 임피던스 계산식은 마이크로스트립 안테나 해석을 위한 모드 방정식의 해로부터 유도된 식이며 코사인 함수의 2차원 무한급수 형태로 되어 있다 [1]. 본 논문에서는 전력·접지면의 임피던스 계산을 위해 그림 1과 같은 형태의 전력·접지면에 대해 고유함수의 합으로 표시되는 그린함수를 유도하고 이를 이용해서 임의 지점에서의 전압·전류 관계와 임피던스를 계산할 수 있는 해석적인 방정식을 구했다. 또한 계산시간을 줄이기 위해, 유도된 임피던스 계산식의 이중급수를 단일급수로 변형시켜서 계산시간을 대폭 줄였으며 기존의 2차원 무한급수 형태의 임피던스 계산식과 계산시간을 비교했다.

II. 본 론

우선 그림 1과 같은 금속-유전체-금속 기판의 전압·전류 특성을 계산하기 기판 내부에 존재할 수 있는 전자기파에 대한 방정식을 세우고 이로 부터 기판의 임의지점에서의 전압에 관한 2차미분방정식을 세운다. 이로 부터 전압에 대한 그린함수를 구하고 그 해를 이용해서 임의 두 지점사이의 전압·전류 관계식을 구하며 기존의 모드 방정식으로부터 구해진 해와 동일함을 입증한다. 다음으로 구해진 전압-전류관계식을 보다 간략히 하여 계산시간을 단축하는 과정을 보일 것이다.

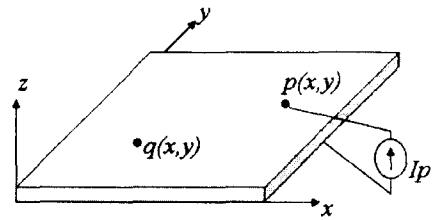


그림 1. 점 전류원 I_p 를 가지는 금속-유전체-금속 기판
Fig1. Metal-dielectric-metal plate structure with a point current source I_p

그림 1은 PCB 기판의 전형적인 전력·접지면을 나타낸 것이다. 그림에서 기판의 두께는 h 이며 가로방향으로 길이가 a 이고 세로방향의 길이가 b 인 직사각형의 기판이다. 기판의 비유전율을 ϵ , 이라고 가정한다. 그림과 같은 평판구조에서 전자기파는 기판사이의 유전체 물질로 채워진 공간에서 전파하게 된다. 이때 전파가 진행하는 공간은 선형, 균일, 등방성이라고 가정하고, 전파는 시간 조화함수이고, z 방향의 기판 두께가 전자기파의 파장에 비해 충분히 짧다고 가정하면 $\partial E/\partial z=0$, $\partial H/\partial z=0$, $H_z=E_x=E_y=0$ 로 둘 수 있고 Maxwell방정식의 시간조화함수를 정리하면 다음과 같은 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_z(x, y) + \omega^2 \mu \epsilon E_z(x, y) = -j \omega \mu J_z(x, y) \quad (1)$$

위의 식에서 J_z 는 임의지점 (x, y) 에서 z 방향으로의 전류밀도를 의미한다. 임의 (x, y) 지점에서의 전력충과 접지층 사이의 전압 $V(x, y)$ 를 구하기 위해, 위의 식(1)을 z 방향으로 적분하면 기판 사이의 전압 $V(x, y)$ 이 구해진다. z 방향으로 전장의 변화는 없으므로 적분은 단순히 유전체 두께 (h)의 곱으로 대치될 수 있다. 위의 식(1)의 양변에 h 를 곱하고 $E_z(x, y)h$ 를 전압 $V(x, y)$ 로 대치하면 식(1)은 다음과 같은 미분방정식으로 변환 된다.

$$LV - \lambda V = f \quad (2)$$

여기서 연산자 L 은 $L = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 이고, 파라메터 $\lambda = -\omega^2 \mu \epsilon$ 이며, 함수 $f = -j \omega \mu h J_z(x, y)$ 이다. 위의 미분방정식의 해를 구하기 위해 경계조건을 확인할 필요가 있다. 그림 1의 구조를 보면 유전체 기판

의 모든 끝 부분은 개방되어 있다. 따라서 끝부분에서 절단면 바깥 방향으로 전류는 흐르지 못하므로, 절단면 바깥방향으로의 전압변화는 없다(즉, $\partial V/\partial n=0$, ∂n 기판 바깥으로의 미소길이). 이와 같은 경계조건을 가지는 미분 방정식(2)의 해를 Green 함수 방법으로 구하려고 한다. 미분 방정식은 Self-Adjoint 연산자이며 Self-Adjoint 경계조건을 가지고 있다. 따라서 Green함수를 구하기 위한 Adjoint연산자와 경계조건은 위의 미분 연산자(2)를 그대로 쓸 수 있다.

식(2)와 같이 표시되는 Self-Adjoint 미분연산자의 그린함수(g)는 연산자 L 의 모든 고유함수 φ_{mn} 의 합으로 표시될 수 있다[6].

$$g(x, y | \alpha, \beta) = \sum_n \sum_m \frac{\varphi_{mn}(x, y) \varphi_{mn}(\alpha, \beta)}{\lambda_{mn} - \lambda} \quad (3)$$

여기서 φ_{mn} 은 연산자 L 의 정규화된 고유함수(normalized eigenfunction)이며, λ_{mn} 은 이에 대응되는 고유값이다.

$$\varphi_{mn}(x, y) = \frac{1}{A_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4)$$

$$\lambda_{mn} = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (5)$$

고유함수는 2차원이며 m 과 n 은 0부터 무한대까지 변화하는 정수이다. 여기서 A_{mn} 은 각 고유함수의 크기이며, m 과 n 둘 중 어느 것도 0이 아닐 경우 $\sqrt{ab}/2$, 둘 중 하나가 0이면 $\sqrt{ab}/\sqrt{2}$, 둘다 0이면 \sqrt{ab} 이다.

식(3)을 이용해서 임의 지점 (x, y) 에 전류분포 $f(x, y)$ 가 주어질 때 기판위의 다른 지점 (α, β) 의 전압 $V(\alpha, \beta)$ 은 그린함수 g 와 전류분포함수 f 를 내적 함으로써 다음과 같이 구해 질 수 있다.

$$V(\alpha, \beta) = \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a g(x, y, \alpha, \beta) f(x, y) dx dy \quad (6)$$

위의 식(6)은 기판위의 임의 지점 p 에 전류를 가할 때 q 지점에서의 전압을 구하는데 이용될 수 있으며 임의 두 지점 사이의 임피던스를 구하는데 이용될 수 있다. 점 (x_p, y_p) 에 공간적으로 임펄스 형태를 가지고 있고 크

기가 I_p 인 전류밀도함수 $J_z = I_p \delta(x - x_p, y - y_p) [A/m^2]$ 를 주고, 기판위의 (x_q, y_q) 지점의 전압을 구해서 그 비를 구하면 된다. 전류밀도 함수를 식(6)에 를 대입하고

적분하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있으며 기존의 모드방적식의 해와 동일하다[1].

$$V(x_q, y_q) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A_{mn}^2} \frac{(-j\omega\mu h I_p)}{\lambda_{mn} - \lambda} \cos\left(\frac{m\pi x_q}{a}\right) \times \cos\left(\frac{n\pi y_q}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_p}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_p}{b}\right) \quad (7)$$

위의 식 (7)로부터 구할 수 있는 전압과 전류비 $I(x_q, y_q)/I_p$ 는 p 와 q 사이의 임피던스 Z_p 가 된다.

이 식은 2차원 무한 급수형태를 가지고 있다. 실제 계산에서는 유한한 항을 사용하며, 합산하는 항의 증가에 따라 오차는 점점 줄어든다. m 과 n 의 최대치는 허용 가능한 오차의 크기에 의해 결정될 수 있다. 따라서 허용오차를 만족시키면서 빠른 설계가 가능하기 위해 계산시간 단축은 대단히 중요한 요소이다.

본 논문에서는 Fourier급수를 이용하여 위의 2차 무한급수를 1차 무한급수로 축소해서 계산시간을 대폭 줄이고자 한다. 위의 식에서 n 에 관한 항을 우선 계산하기 위해 다시 쓰면

$$V(x_q, y_q) = \frac{j\omega\mu h I_p}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m \cos\left(\frac{m\pi x_p}{a}\right) \times \cos\left(\frac{m\pi x_q}{a}\right) \times S_n \quad (8)$$

여기서 S_n 은 n 에 관한 무한급수이며 다음과 같이 표시된다.

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \times \cos\left(\frac{n\pi y_p}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_q}{b}\right) \quad (9)$$

여기서 σ_m 과 σ_n 은 m (혹은 n)이 0이면 1이고, 0이 아닌 경우 2의 값을 각각 가진다. 식에 포함된 두개의 cos항을 전개하고 Fourier급수를 이용한 합계산 공식을 이용하면 무한급수의 합을 구할 수 있으며 다음과 같이 표시할 수 있다[7].

$$S_n = -b \frac{\cos(\gamma_m(y_q - b)) \cos(\gamma_m y_p)}{\gamma_m \sin(\gamma_m b)} \quad (10)$$

여기서 $\gamma_m = \pm \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - (m\pi/a)^2}$ 이며, -부호는 γ_m 계산값의 허수부가 “-”인 경우에 부가하며, y_p 은 y_p 와 y_q 중에서 큰 수를 의미하고, y_c 는 둘 중에서 작은 수를 의미한다.

위의 (10)식을 (8)식에 대입하면 다음과 같은 전압 전류에 관한 새로운 식을 얻을 수 있다.

$$V(x_q, y_q) = \frac{-j\omega\mu h I_p}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m \cos\left(\frac{m\pi x_p}{a}\right) \times \cos\left(\frac{m\pi x_q}{a}\right) \frac{\cos(\gamma_m(y_p - b)) \cos(\gamma_m y_c)}{\gamma_m \sin(\gamma_m b)} \quad (11)$$

위의 (11)식은 그림1과 같이 도체-유전체-도체로 이루어진 전력·접지층의 임의 지점(p)에 I_p [A]의 전류를 주입할 때 q 지점에서 발생하는 전압을 계산하거나 보드상의 임의 두 지점사이의 임피던스를 계산하는데 이용할 수 있다.

위에서 유도된 새로운 식을 이용해서 전력·접지층사이의 전압 해석에 적용했다. 계산시간의 관점에서 기존의 식과 비교하였고, 특정 주파수에서 전력·접지층 면에서 발생하는 전압을 구하는데 응용해 보았다.

계산에 사용된 기판은 가로 세로의 크기가 9 inch x 4 inch이고 두께가 2mil이고 비유전율 4.0인 FR4기판이다. 이 기판의 $(x, y)=(0.9', 0.4')$ 되는 지점에 1A크기의 전류를 여기 시킬 때 같은 지점에서 발생하는 전압을 100MHz~1GHz 까지의 주파수에서 계산함으로써 제안된 식의 장점을 설명하고자 한다.

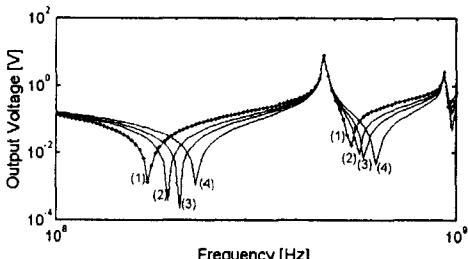


그림2. 기판전압 특성; 선1,2,3,4는 식(11)의 최대 m 값이 각각 500, 50, 15, 2일 때이며 점선은 식(7)의 최대 m 과 n 값이 600일 때.

Fig. 2 The voltage characteristics of board; line1,2,3,4 represent the eq.(11) with the maximum value of $m=500, 50, 15, 2$, respectively and dotted line represent the eq.(7) with maximum $m=n=600$.

그림 2는 기판의 크기가 9' x 4'인 경우, 기판의 원쪽 아래측의 한 지점인 $(x, y)=(0.9', 0.4')$ 에서의 전압을 계산함에 있어서, 기존의 식(7)로 계산한 결과와 새로이 유도된 간략한식 (11)으로 계산한 결과를 나타낸 것이다

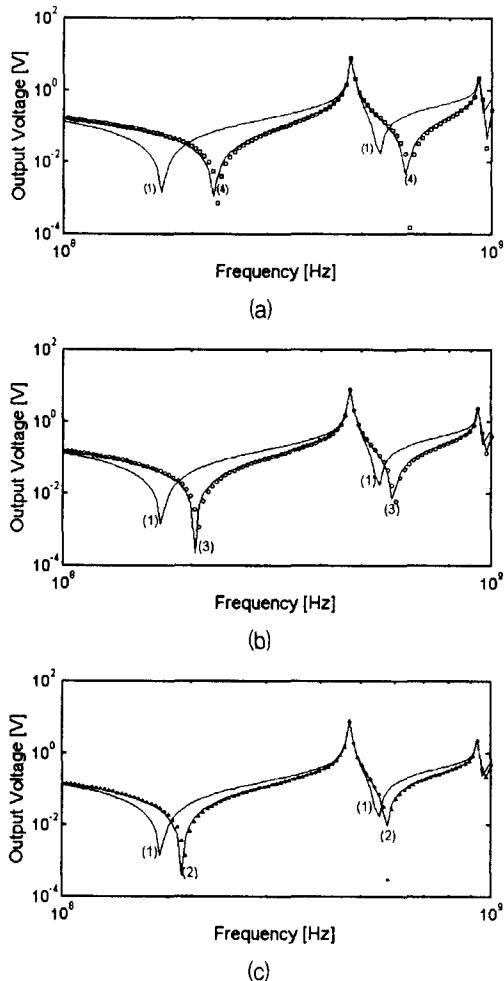


그림3. 기판전압 특성; 선1, 2, 3, 및 4는 식(11)의 최대 m 값이 각각 500, 50, 15, 및 2일 때이며, 점선2, 3, 및 4는 식(7)의 최대 $n(m=n)$ 값이 각각 50, 15, 및 2 일 때.

Fig.3 The voltage characteristics of board; line1, 2, 3, and 4 represent the eq.(11) with the maximum value of $m=500, 50, 15, and 2$, respectively and dotted line 2, 3, and 4 represent the eq.(7) with maximum $m=n=2, 15$, and 50, respectively

기존의 식(7)과 유도된 간략 식(11)의 수렴성을 확인하기 위해, 합산하는 항(m, n)의 최대 개수를 2,

15, 50, 500, 및 600항까지로 변화시키면서 계산해보았다. 그림 2의 선(4),(3),(2),(1)은 식(11)의 항의 개수를 각각 2개, 15개, 50개, 500개를 이용한 경우이며, 그림 2의 점선은 m 및 n 의 최대값을 600을 둘 때 식 (7)의 결과를 나타낸 것이다. 계산 항을 증가 시킬수록 점점 정확한 해에 근접함을 알 수 있으며 최대 항의 개수가 $m=n=500$ 이상이 되면 결과는 거의 동일한 값에 수렴함을 알 수 있다.

그림 3은 기존의 2차원 무한급수와 유도된 1차원 무한급수식의 오차를 비교한 것이다. 그림 3의 (a),(b) 및 (c)의 선(1)은 항의 개수가 무한대에 가까워 질 때 수렴하는 값을 나타낸 것으로 그림 2의 선1과 같다. 그림 3의 선(4)은 최대 m 값을 2로 둘 때 1차원 급수식(11)의 결과이며, 점선(4)은 최대 항의 개수를 4개로($m=n=2$) 할 때 2차원 급수식(7)의 결과이다. 2차원 급수식의 항이 4개(2^2)로 더 많지만 오히려 정확도는 1차원 급수식에 비해 약간 떨어짐을 알 수 있다.

그림 3의 선(3)과 선(2)는 유도된 1차원 급수식의 항을 각각 15개 항($m=15$)과 50개 항($m=50$)까지 합할 때의 결과이며 점선(3)과 점선(2)는 기존의 2차원 급수식의 항을 각각 225개 항($m=n=15$)과 2500개 항($m=n=50$)까지 합한 결과이다.

그림 3의 log-log그래프에서 극한값 선(1)과 다른 곡선사이의 오차를 비교해 보았다. 기존의 2차원 무한 급수형태의 계산식(7)은 $m=n=2$ 일 때 즉, 항의 개수를 4개(2^2), 225개(15^2)($m=n=15$ 일 때), 2500개(50^2)($m=n=50$ 일 때)로 증가시킬 때, 오차는 39%, 28%, 및 21%로 각각 줄어들었다. 반면 식 (11)의 1차원 급수는 항의 개수를 2개($m=2$), 5개($m=15$), 50개($m=50$)까지만 이용해도 오차를 36%, 27%, 19%로 줄일 수 있었다. 훨씬 작은 개수의 항을 사용함에도 불구하고 m 이 같으면 비슷한 오차수준을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

유도된 1차원 계산식의 계산시간 단축효과를 파악하기 위해 계산오차와 계산 시간사이의 관계를 조사했다. 많은 항을 합할수록 계산시간은 많이 소요되며 계산 결과는 보다 정확해 진다. 두 식에 대해 오차의 수렴속도가 계산시간과 어떤 관계에 있는지를 조사 했다. 프로그램은 matlab을 이용해서 작성했으며 주파수는 10MHz~1GHz사이에 log 간격으로 200개의 지점에서 계산했다. 식(11)과 식(7)에 대해 m 과 n 의 최대치를 점점 증가시키면서 소요되는 계산시간과 오차 값을 저장하였다. 조사된 계산시간과 오차의 관계를 그림 4에 나타내었다.

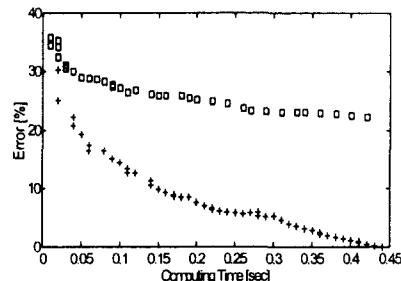


그림4 이차원 급수항식(점□)과 1차원 급수항식(점+)을 이용한 경우 오차의 시간적 특성

Fig.4 Error profiles of two dimensional series expression (point □) and one dimensional series expression (point +) on the calculation time

그림4에서 □로 표시된 데이터는 식 (7)의 2차원 급수 항을 사용했을 경우이며, +로 이루어진 데이터는 식 (11)의 1차원 급수 항을 이용한 결과이다. 그림에서 보듯이 본 논문에서 유도된 1차원 급수 항을 이용한 경우, 계산량을 증가시킬 때 이중 급수를 이용한 경우보다 훨씬 빠르게 오차가 줄어들었다. 식 (11)을 이용하면 대략 0.5초 이내에 계산 오차가 1% 이내로 줄어들었다. 하지만 기존의 식인 식 (7)를 사용하면 0.5초의 계산을 통해서 오차를 20% 정도 까지 밖에 줄이지 못함을 알 수 있다. 새로이 유도된 식(11)이 기존의 식에 비해 같은 오차유발에 대해 훨씬 작은 계산시간을 가지고 있음을 알 수 있으며 빠른 설계를 위해 반복적인 계산이 필요할 경우 매우 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

V. 결 론

금속-유전체-금속 기판의 전압-전류 특성을 계산하기 기판 내부에 존재할 수 있는 전자기파에 대한 미분 방정식으로부터 기판의 임의 지점에서의 전압에 대한 그린함수를 구했다. 이를 이용해서 기판상의 임의 두 지점사이의 전압-전류 관계에 대한 해석적 해를 구했으며 기존의 모드 방정식으로부터 구해진 해와 동일함을 입증했다. 구해진 전압-전류관계식은 2차원 무한 급수형태를 가지고 있다. 계산시간을 단축하기 위해 퓨리에 급수공식을 사용하여 2차원 무한급수를 1차원 무한급수로 변형시킬 수 있었다. 1차원 무한급수 형태로 된 새로운식을 이용하여 크기가 $9' \times 4'$ 인 전력·접지층에 대해 전압특성을 분석하였다. 새로이 유도된 식은 기존의 식과 비교해서 빠른 수렴성과 정확도를 가지

고 있음을 확인 했다. 유도된 전압-전류관계식은 전력·접지층 해석에 유용하게 사용될 수 있을 것이다

참고문헌

- [1] Istvan Novak, "Reducing Simultaneous Switching Noise and EMI on Ground /Power Planes by Dissipative Edge Termination", IEEE Trans. on Advanced Packaging, Vol. 22, No. 3, pp. 274~283, August, 1999.
- [2] D. G. Swanson, W. J. R. Hoefer, "Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation", Artech House, 2003
- [3] G-T. Lei, R. W. Techentin, B. K. Gilbert, "High-Frequency Characterization of Power/Ground-Plane Structure", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, Vol. 47, No. 5, pp. 562~569, May, 1999.
- [4] H. H. Wu, W. Meyer, K. Lee, A. Barber, "Accurate Power Supply and Ground Plane Pair Models", IEEE Trans. on Advanced Packaging, Vol. 22, No. 3, pp. 259~266, August, 1999.
- [5] Joongho Kim, M. Swaminathan, and Younghsuk Suh, "Modeling of Power Distribution Networks for Mixed Signal Applications," 2001 IEEE EMC Symposium Digest, August 13~17, 2001, Palais des Congres de Montreal, Montreal, Canada.
- [6] R. K. Bose and M. C. Joshi, "Method of Mathematical Physics", McGraw-Hill Publishing Company, 1984, p115.
- [7] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press, 1994, pp. 47~48.

저자 소개



서영석(YoungSuk Suh)

1995년 3월 : 포항공과대학교 전자 전기공학과 졸업, 공학박사

1995년 9월 ~ 현재 : 영남대학교 전자정보공학부 부교수

*관심분야 : 마이크로파 회로해석 및 설계, Signal and Power Integrity