

## 음성신호의 Sub-Nyquist 비균일 표본화 및 완전 복구에 관한 연구

## Sub-Nyquist Nonuniform Sampling and Perfect Reconstruction of Speech Signals

이 회 영\*

Heyoung Lee

## ABSTRACT

The sub-Nyquist nonuniform sampling (SNNS) and the perfect reconstruction (PR) formula are proposed for the development of a systematic method to obtain minimal representation of a speech signal. In the proposed method, the instantaneous sampling frequency (ISF) varies, depending on the least upper boundary of spectral support of a speech signal in time-frequency domain (TFD). The definition of the instantaneous bandwidth (IB), which determines the ISF and is used for generating the set of samples that represent continuous-time signals perfectly, is given. Also, the spectral characteristics of the sampled data generated by the sub-Nyquist nonuniform sampling method is analyzed. The proposed method doesn't generate the redundant samples due to the time-varying property of the instantaneous bandwidth of a speech signal.

**Keywords:** Sub-Nyquist Nonuniform Sampling, Minimal Representation, Perfect Reconstruction, Instantaneous Bandwidth, Time-frequency Representation, Interpolation

## 1. 서론

Nyquist 균일 표본화기(Nyquist uniform sampler)로 표본화된 음성 신호에는 잉여 데이터(redundant data)가 포함되어 있다. 신호의 잉여 데이터는 상관 관계를 바탕으로 한 예측에 의한 방법과 엔트로피 부호화를 바탕으로 한 방법을 사용하여 제거한다. 예측에 기반한 방법의 경우 주로 이산 신호의 상관 계수를 이용하여 인접 표본들 사이에 포함되어 있는 잉여 데이터를 제거하며 엔트로피 부호화에 기반한 방법은 통계적 측면에서 심볼들의 발생 빈도가 다른

---

\* 서울산업대학교 제어계측공학과

특성을 이용하여 심볼의 표현에 포함된 잉여 데이터를 제거한다. 두 방법 모두 본질적으로 잉여 표본들(redundant samples)을 제거하지는 못한다. 잉여 표본들의 발생 원인은 두 가지 측면에서 분석할 수 있다. Fourier 주파수 해석 측면에서 본다면 잉여 표본들(redundant samples)은 신호에 의하여 점유되지 않은 대역에 의하여 발생된다[1][2]. 예를 들어 다중 대역 신호(multi band signal)를 Nyquist 균일 표본화를 할 경우 표본화된 신호에는 빈 대역때문에 발생하는 잉여 표본들이 포함되어 있다[1][2]. 시간-주파수 해석 측면에서 살펴볼 경우 음성 신호는 시변 순시 대역폭(time-varying instantaneous bandwidth)을 갖는 다중 성분 신호(multi-component signal)의 특성이 있음을 알 수 있다[18]. 또한 음성 신호는 시간-주파수 평면(time-frequency plane)을 성글게 점유하고 있음을 알 수 있다. 즉 음성 신호의 시간-주파수 표현(time-frequency representation)의 SS(spectral support)가 조밀하지 않음을 알 수 있다. Nyquist 균일 표본화기로 표본화된 음성신호는 순시 대역폭의 시변성과 SS의 비조밀 성(noncompactness)에 의하여 발생하는 잉여 표본들을 가지고 있다.

본 논문에서는 표본화 방법 연구의 입장에서 신호를 세가지 측면에서 관찰하였다. 다중 대역 신호(multiband signal), 다중 성분 신호(multi component signal), 시변 대역 신호(signal with time-varying bandwidth)가 그것이다[10][18][19]. 다중 대역 신호는 Fourier 주파수 영역에서 신호가 점유하고 있는 대역이 두 개 이상 있는 신호를 말한다. 다중 성분 신호는 시간-주파수 평면에서 순시 주파수의 궤적이 두 개 이상 있는 신호이다. 시변 대역 신호는 시간-주파수 영역에서 순시 대역폭이 시간에 따라 변하는 신호이다. 세 가지 성질이 서로 중복 되는 경우도 있다. 예를 들어 단일 성분이면서 시변 순시 대역폭을 갖는 신호가 다중 대역 성질을 갖는 경우도 있다. 또한 다중 대역이면서 다중 성분 성질을 갖는 신호도 있다. Fourier 주파수 영역에서의 관찰 만으로는 위의 세 가지 성질들을 파악하기가 쉽지 않으나 시간-주파수 평면과 Fourier주파수 영역에서 동시에 관찰할 경우 세가지 성질들을 명확히 파악할 수 있다. 본 논문에는 음성 신호의 순시 대역폭이 시간적으로 변화함으로 인해서 발생하는 잉여 표본들을 제거하기 위한 방법을 제안 하였다.

Nyquist 표본화 이론이 개발된 이래로 지난 70 여 년간 sub-Nyquist 표본화 방법 및 완전 복구 방법에 대한 다양한 연구가 수행되었다[4][8][12][15]. 다중 대역 신호(multiband signal)의 표본화 및 완전 복구에 관한 Landau의 연구 결과에 따르면 NUS방법에 의하여 얻어진 표본들의 집합은 잉여 표본들을 가지고 있다[1][2]. Landau는 잉여 표본들을 줄이기 위한 SNNS(sub-Nyquist nonuniform sampling)에 관한 연구를 수행 하였으며 완전 복구가 보장되는 최소 평균 표본화 주파수(average sampling frequency) 값을 구하는 방법을 제안하였다. 다중 대역 신호에 대한 Landau의 연구결과는 매우 제한적이다. 즉 Landau는 그의 방법이 완전 복구를 보장하는 평균 표본화 주파수는 NUS 주파수에 비하여 작다는 것을 보였으나 표본화 방법 즉 표본화 패턴과 그에 대응하는 완전 복구 방법을 제시하지 못했다[5][9][10]. Landau이후의 연구에서는

다중 대역 신호에 대한 표본화 방법과 완전 복구 방법을 제시하였으나 완전 복구 알고리즘은 많은 계산을 필요로 하며 복구과정의 안정성 문제가 대두 된다[4][16][22]. 현재까지 SNNS에 관한 연구는 신호의 시간-주파수 영역 특성보다는 Fourier 주파수 영역 특성을 바탕으로 수행되었다.

SNNS에서 연속-시간 신호의 복구 방법은 반복 방법(iterative method)과 해석적 방법으로 나눌 수 있는데 반복 방법의 경우 복구 과정의 안정성 문제가 대두된다[4][18]. 즉 양자화 잡음, 입력 잡음, 시간 지터(timing jitter), 잘라버림 오차(truncation error) 등으로 인하여 복구 과정이 발산 하거나, 복구 오차가 매우 커질 수도 있다. 또한 매우 많은 계산을 필요로 하는 경우도 있다. 특히 반복 방법의 경우 안정성 문제가 해결과제로 남아 있다. NUS정리에 대응하는 SNNS정리 즉 비균일 표본화 방법 및 완전 복구 공식과 같은 SNNS에 관한 해석적 방법은 현재 개발되어 있지 않다.

잉여 표본들을 발생시키지 않으면서 완전 복구(perfect representation)가 가능한 최적 표본화(optimal sampling) 방법은 신호의 저장, 보간(interpolation), 특징 추출 및 패턴 분류 등의 다양한 분야에서 많은 응용을 갖는다[3][13]. 예를 들어 잉여 표본들을 발생시키지 않는 최적 표본화는 NUS(Nyquist uniform sampling) 방법에 비하여 단위 시간당 발생하는 평균 표본수가 적으므로 신호를 저장하기 위한 메모리와 후 처리(post processing) 측면에서 유리하다. 신호의 최적 표본화기에 의하여 얻은 표본들의 집합은 주어진 신호에 대한 모든 정보를 가지고 있는 최소 표본 집합(minimal set of samples) 의미 한다. 최소 표본 집합에서 심볼들의 표현이 가지고 있는 잉여 데이터를 제거할 경우 주어진 신호에 대한 최소 표현(minimal representation)을 얻을 수 있다. 패턴 분류기에서 특징(feature)을 나타내는 입력 벡터들의 차원의 크기와 잡음 둔감성은 분류기의 성능에 매우 큰 영향을 미친다. 그러므로 잡음에 둔감한 저 차원의 특징 벡터들을 얻는 것은 매우 중요하다. 엔트로피 부호화의 경우 심볼당(즉 표본당) 평균 비트 수가 줄어들므로 나열된 비트들을 일정 단위(예를 들어 byte 단위)로 잘라서 입력 벡터들을 만들 경우 단위 시간당 발생 입력 벡터수가 줄어든다. 단위 시간당 입력 벡터들의 수를 일정하게 할 경우 입력 벡터들의 차원이 줄어든다. 그러나 얻어진 입력 벡터들은 랜덤 한 특성을 가지고 있으므로 잡음에 매우 민감하여 분류기의 입력으로는 적합하지 않다. 그러므로 패턴 분류기에서는 최소 표본 집합의 획득이 중요하다. 최적 표본화기는 NUS 표본화기에 비하여 여러 가지 장점들을 가지고 있다. 첫째, 데이터 압축 측면에서 볼 때 표본화 단계에서 원천적으로 잉여 표본들을 제거하므로 손실 없는 압축 방법을 제공하며 후 처리를 할 경우 높은 압축률을 가능하게 한다. 둘째, 순서 보존(order preserving) 성질을 가지면서 차원이 줄어든 특징 벡터들을 얻을 수 있다. 순서 보존 성질을 가지면서, 즉 잡음에 둔감하면서 원래의 신호를 최소로 표현하는 표본들을 분류기의 입력벡터로서 사용할 경우 입력 벡터들의 차원이 줄어들 뿐 만 아니라 일관성이 있으므로 패턴 분류기의 복잡도 및 계산량을 줄일 수 있어서 분류기의 성능 개선을 가져 올

수 있다.

음성 신호를 시간-주파수 평면에서 관찰 할 음성 신호에 의하여 점유되어 있지 않은 빈 영역을 관찰할 수 있다. 그러나 Fourier 주파수 영역에서 관찰할 경우 빈 대역은 관찰되지 않는다 이것은 음성신호의 각 성분들의 순시 주파수가 시간에 따라 변하기 때문이다. 이런 신호의 경우 Landau 평균 표본화 주파수는 NUS 표본화 주파수와 같다. 시변 순시 대역폭을 갖는 신호들을 순시 스펙트럼의 시간적 특성, 즉 시변 순시 대역폭에 적응적으로 변화하면서 표본화할 경우 평균 표본 수를 줄일 수 있을 것이다. 이와 같이 시간적으로 표본화 주파수를 가변 시키면서 표본화하는 방법이 성공하기 위해서는 순시 대역폭에 대한 정확한 수학적 정의와 이를 바탕으로 한 표본화 방법 및 완전 복구 방법이 필요하다. 현재까지의 연구 결과에 따르면 순시 대역폭에 대한 개념적 정의는 개발되어 있으나 정확한 수학적 정의는 개발되어 있지 않다.

본 논문은 음성 신호의 순시 대역폭이 시간에 따라 변함으로 인해서 발생하는 잉여 표본들을 제거하는 방법을 다루고 있다. 이를 위하여 SNNS 및 완전복구와 관련된 문제를 논의한다. 이를 위하여, 첫째, SNNS과 완전 복구에 대한 표본화 정리를 개발하였다. 둘째, 개발된 SNNS 정리를 바탕으로 비균일 표본화를 할 경우 위 주파수(aliasing frequency)가 생성되지 않으며 복구 과정이 양자화 잡음과 잘라버림 오차에 대하여 안정함을 보였다. 셋째, 최적 표본화 주파수, 즉 최적 표본화 패턴을 결정하기 위해 필요한 순시 대역폭에 대한 수학적 정의를 기술하였다. 또한 SNNS방법에 의하여 얻어진 표본들의 스펙트럼 특성을 분석하였다. 제안된 SNNS 방법은 음성 신호의 최소 표현을 얻기 위한 체계적 방법의 일환으로 개발되었으며 제안된 방법을 사용할 경우 음성 신호의 순시 대역폭의 시변 성질로 인한 잉여 표본들의 발생을 줄일 수 있다

## 2. 비 균일 표본화

먼저 비 균일 표본화 방법을 살펴 보도록 하자. 그림 1에서 신호  $x_s(t)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)s(t) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\int \frac{1}{g(\tau)} d\tau - nT_s\right), \quad n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $g(t)$ 는 양 함수(positive function)이며,  $T_s$ 는 상수 이고  $\delta(t)$ 는 Dirac 단위 임펄스 함수이다. 표본화는 반 위 주파수 필터(anti-aliasing filter)와 밀접한 관련이 있다. 본 논문에서 개발된 표본화 방법에서 사용되는 반 위 주파수 필터는 가변 대역 특성을 가져야 한다[6][20][21]. 기 개발된 가변 대역폭 필터와 일관성을 유지하기 위하여 식 (1)에서 적분 안에  $1/g(t)$ 의 표현

을 사용하였다. 순시 표본화 주파수는  $g(t)$  와  $T_s$  에 의하여 결정된다. 부록에 기술되어 있는 Dirac 단위 임펄스 함수의 성질을 사용하면  $s(t)$  는 다음과 같이 표현된다.

$$s(t) = \bar{s}(t)g(t), \quad (2)$$

여기서,

$$\bar{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m^{-1}(nT_s)), \quad (3)$$

그리고  $m^{-1}(t)$  는 함수  $m(t) = \int 1/g(\tau)d\tau$  의 역함수이다.

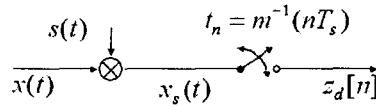


그림 1. 비균일 표본화

신호는 시간  $t_n = m^{-1}(nT_s)$  에서 측정된다. 그러므로 표본화기의 출력  $z_d[n]$  다음과 같다.

$$z_d[n] = x_d[n]g_d[n], \quad (4)$$

여기서,  $x_d[n] = x(t_n)$  그리고  $g_d[n] = g(t_n)$  이다. 만일  $g(t)$  와  $T_s$  를 알고 있을 경우 이산시간 신호  $x(m^{-1}(nT_s))$  는 식 (4)로부터 얻을 수 있다.  $m(0) = 0$  이므로  $t_0$  는 0임을 알 수 있다. 관계  $nT_s = m(t_n)$  로부터, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_n^{n+1} 1/g(\tau)d\tau = T_s. \quad (5)$$

표본화 점들은 식 (5)로부터 얻을 수 있다. 만일  $T_s$  가 알려져 있을 경우 함수  $1/g(t)$  는 표본화 점들의 집합  $\{t_n\}$  을 생성한다. 본 논문에서 제안된 비균일 표본화기의 평균 표본화율  $\bar{f}_a$  는 다음과 같다.

$$\bar{f}_a = \frac{1}{2T_s} \int_r^r 1/g(t)dt \text{ [samples/sec].}$$

## 3. 완전 복구

SNNS 정리를 유도하기 위하여 EFT(extended Fourier transform)와 IEFT(inverses extended Fourier transform)를 정의 하자. 신호  $x(t)$  와 주어진 양 함수  $1/g(t)$  에 대하여, EFT  $\tilde{F}$  와 IEFT  $\tilde{F}^{-1}$  는 다음과 같이 정의된다 [6][20][21].

$$\begin{aligned}\tilde{F}[x(t), g(t)] &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)/g(t)) e^{-i\omega_g \int_0^t \frac{1}{g(\tau)} d\tau} dt \\ &= X(\omega_g),\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{-1}[X(\omega_g), g(t)] &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega_g) e^{i\omega_g \int_0^t \frac{1}{g(\tau)} d\tau} d\omega_g \\ &= x(t).\end{aligned}\quad (7)$$

$g(t)=1$  일 때 EFT는 Fourier 변환이 되므로 변수  $\omega_1$  는 Fourier 주파수 변수이다. 주파수 변수  $\omega_g$  와 함수  $1/g(t)$  의 곱, 즉  $\omega_g/g(t)$  는 시간-주파수 평면에서 순시 주파수의 궤적을 나타낸다.  $\omega_g/g(t)$  의 단위는 [rad/sec]이다.  $X(\omega_g)$  는 시간-주파수 평면에서 궤적  $\omega_g/g(t)$  위에 있는 신호들 즉  $x(t)$  에 성분  $\exp(-i\omega_g \int_0^t 1/g d\tau)$  가 포함되어 있는 정도를 나타낸 것이다.

다음으로 두 신호의 곱  $x_1(t)x_2(t)$  의 EFT 주파수 표현을 유도하도록 하자.  $X_1(\omega_g) = \tilde{F}[x_1(t), g(t)]$ ,  $X_2(\omega_g) = \tilde{F}[x_2(t), g(t)]$  이고  $X_1(\omega_g)$  와  $X_2(\omega_g)$  이 존재할 때,  $x_1(t)x_2(t)$  의 EFT는 다음과 같은 관계식을 사용하여 구할 수 있다.

$$\tilde{F}[x_1(t)x_2(t), g(t)] = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega_g) * X_2(\omega_g). \quad (8)$$

식 (8)에서 \*는 convolution을 나타낸다. 식 (8)은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}\tilde{F}[x_1(t)x_2(t), g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1(t)x_2(t)/g(t)) e^{-i\omega_g \int_0^t \frac{1}{g} d\tau} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(s_g) e^{is_g \int_0^t \frac{1}{g} d\tau} ds_g \right) (x_2(t)/g(t)) e^{-i\omega_g \int_0^t \frac{1}{g} d\tau} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(s_g) \int_{-\infty}^{\infty} (x_2(t)/g(t)) e^{-i(\omega_g - s_g) \int_0^t \frac{1}{g} d\tau} dt ds_g \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(s_g) X_2(\omega_g - s_g) ds_g \\ &= \frac{1}{2\pi} X_1(\omega_g) * X_2(\omega_g).\end{aligned}$$

식 (8)을 사용하면, 변조된 신호  $x_s(t) = x(t)s(t)$ 의 EFT는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} X_s(\omega_g) &= \tilde{F}[x(t)s(t), g(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \tilde{F}[x(t), g(t)] * \tilde{F}[s(t), g(t)] \end{aligned} \quad (9)$$

한편,  $s(t)$ 의 EFT는 다음과 같다. 변수를 치환을 하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{F}[s(t), g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\int \frac{1}{g(\tau)} d\tau - nT_s\right) e^{-i\omega_g \int_0^t \frac{1}{g} dt} dt \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - nT_s) e^{-i\omega_g \alpha} d\alpha \\ &= \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_g - n\bar{\omega}_s), \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $\alpha = m(t)$  이고  $\bar{\omega}_s = 2\pi/T_s$  이다. 그러므로, 식 (9)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_s(\omega_g) &= \tilde{F}[x(t)s(t), g(t)] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_g - n\bar{\omega}_s). \end{aligned} \quad (12)$$

또한 변조된 신호  $x_s(t) = x(t)s(t)$ 의 EFT는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} X_s(\omega_g) &= \tilde{F}[x(t)s(t), g(t)] \\ &= \tilde{F}[x(t)\bar{s}(t)g(t), g(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m^{-1}(nT_s)) e^{-i\omega_g \int_0^t \frac{1}{g} dt} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m^{-1}(nT_s)) e^{-i\omega_g nT_s}. \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)와 식(13)을 사용하여 SNNS 정리를 유도하도록 하자.

*Theorem* (Sub-Nyquist nonuniform sampling and perfect reconstruction): 어떤 주어진 양 함수  $1/g(t)$ 에 대하여,  $X(\omega_g) = \tilde{F}[x(t), g(t)]$ 이  $|\omega_g| \geq \bar{\omega}_s/2$ 인 EFT주파수 영역에서 영이라면 신호  $x(t)$ 는 표본들의 열  $x(m^{-1}(nT_s))$ 로부터 아래의 식 (14)를 사용하여 완전하게 복구할 수 있다.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_s x(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)}, \quad T_s = \pi \quad (14)$$

여기서  $\bar{\omega}_s = 2\pi/T_s$  그리고  $m(t) = \int 1/g(\tau) d\tau$  이다.

*Proof*  $X(\omega_g)$  의 SS가 EFT 주파수 영역에서  $+\bar{\omega}_s/2$  와  $-\bar{\omega}_s/2$  사이에 있다면, 식 (12)로부터,  $X(\omega_g)$  는 다음과 같이 표현된다.

$$X(\omega_g) = T_s P(\omega_g) X_s(\omega_g) \quad (15)$$

여기서

$$P(\omega_g) = \begin{cases} 1, & \text{if } |\omega_g| \leq \bar{\omega}_s/2 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (16)$$

식 (13)과 식 (15)를 사용하면  $x(t)$  다음과 같이 표현 된다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{F}^{-1}[X(\omega_g), g(t)] \\ &= \tilde{F}^{-1}[T_s P(\omega_g) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m^{-1}(nT_s)) e^{-i\omega_g nT_s}, g(t)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_s x(m^{-1}(nT_s)) \tilde{F}^{-1}[P(\omega_g) e^{-i\omega_g nT_s}, g(t)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_s x(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)}. \end{aligned}$$

그러므로, 만일  $X(\omega_g)$  가  $|\omega_g| \geq \bar{\omega}_s/2$  에서 영이라면, 연속-시간 신호  $x(t)$  는 표본들의 열  $x(m^{-1}(nT_s))$ 로부터 보간 함수  $T_s \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)}$  을 사용하여 완전하게 복구할 수 있다.

신호를 복구하기 위해서는 표본들과 함수  $1/g(t)$ 를 동시에 알고 있어야 한다.  $x(t)$ 에 비하여  $1/g(t)$ 의 대역폭은 매우 작으므로  $1/g(t)$ 를 표현하기 위한 데이터량은 표본들에 의한 데이터양보다 매우 작다.  $x(t)$ 의 EFT  $X(\omega_g)$ 는 함수  $1/g(t)$ 에 종속이다.  $T_s = \pi$ 로 고정시키자. 만일  $x(t)$ 가 EFT의 의미에서 대역 제한 신호라면  $X(\omega_g)$ 가 주파수 영역  $|\omega_g| \geq \bar{\omega}_s/2$ 에서 영이 되는 무수히 많은  $1/g(t)$  존재한다. 임의 주어진 신호  $x(t)$ 에 대하여,  $Q$ 가 다음과 같은 집합이 되도록 하자.

$$Q = \{1/g(t) \mid X(\omega_g) \text{ is zero when } |\omega_g| \geq \bar{\omega}_s/2, T_s = \pi, X(\omega_g) = \tilde{F}[x(t), g(t)]\}. \quad (17)$$

이때 모든  $t$ 에 대하여 집합  $Q$ 에 속한 모든  $1/g(t)$ 에 대하여  $1/g(t) \geq 1/\bar{g}(t)$ 을 만족하는 함수  $1/\bar{g}(t)$ , 즉  $-\infty < t < \infty$ 에 대하여  $\forall 1/g(t) \in Q \geq 1/\bar{g}(t)$ 을 만족하는 함수  $1/\bar{g}(t) \in Q$ 는 SNNS의 표본화 패턴이다. 함수  $1/\bar{g}(t)$ 는 신호  $x(t)$ 의 순시 주파수이고 또한 시간-주파수 평면에서 신호



$x(t)$ 의 SS의 상한이다. SS가 시간-주파수 평면에서 조밀하고 순시 주파수가 일정한 기저 신호를 Nyquist 균일 표본화를 할 경우 잉여 표본들이 발생하지 않는다.  $1/\bar{g}(t)$ 를 사용한 SNNS는 순시 주파수의 시변성 때문에 발생하는 잉여 표본들을 제거할 수 있다. 어떤 신호의 SS가 시간-주파수 영역에서 조밀할 경우, 제안된 SNNS 방법은 연속-시간 신호를 완전 복구할 수 있는 최소 표본들을 생성한다.

#### 4. 복구 오차 해석

다음에는 표본들의 양자화 오차, 잘라버림 오차로 인해 발생하는 복구 오차를 분석해보자. 먼저 양자화 오차에 대한 영향을 분석한다.  $\hat{x}(t)$ 가 신호  $x(t)$ 를 복구한 신호라고 하자. 즉,

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= x(t) + e_q(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_s (x(m^{-1}(nT_s)) + e_q(m^{-1}(nT_s))) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)},\end{aligned}\quad (18)$$

여기서  $e_q(m^{-1}(nT_s))$ 는 표본들의 양자화 오차이다. 그리고  $e_q(t)$ 는  $e_q(m^{-1}(nT_s))$ 에 의해 발생하는 복구 오차이다. 이때 다음 수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(t)} |e_q(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(t)} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_s e_q(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)} \right|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_s e_q(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(\alpha - nT_s)/2)}{\pi(\alpha - nT_s)} \right|^2 d\alpha,\end{aligned}$$

여기서  $\alpha = m(t)$ 이다. sinc함수의 직교 성질로부터 다음 식을 얻을 수 있다[1].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g(t)} |e_q(t)|^2 dt = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e_q(m^{-1}(nT_s))|^2. \quad (19)$$

복구 오차  $\int_{-\infty}^{\infty} (1/g(t)) |e_q(t)|^2 dt$ 는 표본들의 양자화 오차의 제곱의 합에 비례한다. 그러므로 제안된 복구 방법은 양자화 오차에 대하여 안정하다. 다음은 잘라버림 오차에 의한 복구 오차를 분석해보자. 보간 함수의 상계는 다음과 같다.

$$\left| T_s \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)} \right| \leq T_s \left| \sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2) \right| \left| \frac{1}{\pi(m(t) - nT_s)} \right|$$

$$\leq T_s \left| \frac{1}{\pi(m(t) - nT_s)} \right| \quad (20)$$

함수  $m(t)$ 는 단조증가 함수이므로 복구에 사용되는 보간 함수는 단조감소 함수임을 알 수 있다. 다음과 같은 잘라 버림 오차  $e_T(t)$ 를 고려하자.

$$e_T(t) = x(t) - x_N(t)$$

여기서  $x_N(t)$ 는 다음과 같다.

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N T_s x(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)} \quad \text{이다.} \quad (21)$$

정리하면,

$$e_T(t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} T_s x(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)} \\ + \sum_{n=-\infty}^{N+1} T_s x(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(t) - nT_s)/2)}{\pi(m(t) - nT_s)}$$

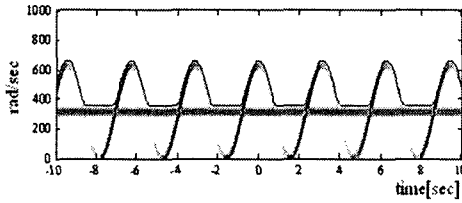
$t=0$  점에서 잘라 버림 오차에 의한 복구 오차의 상계는 다음과 같다.

$$|e_T(0)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} T_s x(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(0) - nT_s)/2)}{\pi(m(0) - nT_s)} + \sum_{n=-\infty}^{N+1} T_s x(m^{-1}(nT_s)) \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(0) - nT_s)/2)}{\pi(m(0) - nT_s)} \right| \\ \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| T_s x(m^{-1}(nT_s)) \right| \left| \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(0) - nT_s)/2)}{\pi(m(0) - nT_s)} \right| + \sum_{n=-\infty}^{N+1} \left| T_s x(m^{-1}(nT_s)) \right| \left| \frac{\sin(\bar{\omega}_s(m(0) - nT_s)/2)}{\pi(m(0) - nT_s)} \right|$$

식 (20)을 사용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$|e_T(0)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| T_s x(m^{-1}(nT_s)) \right| \left| \frac{1}{\pi(m(0) - nT_s)} \right| + \sum_{n=-\infty}^{N+1} \left| T_s x(m^{-1}(nT_s)) \right| \left| \frac{1}{\pi(m(0) - nT_s)} \right|$$

모든  $n$ 에 대하여  $x(m^{-1}(nT_s))$ 는 유한하고  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right|$ 와  $\sum_{n=-\infty}^{N+1} \left| \frac{1}{n} \right|$ 는 수렴하므로,  $t=0$  점에서 잘라 버림 오차에 의한 복구 오차는 유한하다. 그러므로 제안된 복구 방법은 잘라버림 오차에 대하여 강인하다.



(a) 스펙트로그램과 추정된 순시 대역폭(실선)

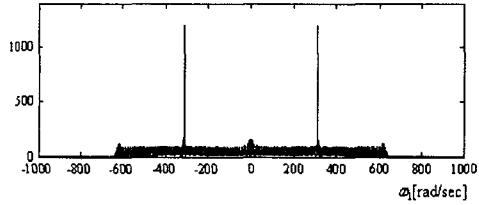
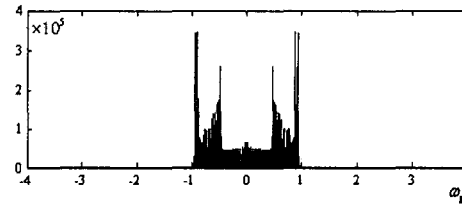
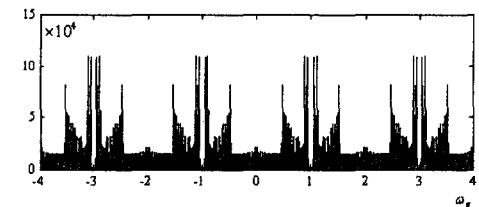
(b)  $x(t)$ 의 Fourier 변환(c)  $x(t)$ 의 EFT(d)  $x_s(t) = x(t)s(t)$ 의 EFT

그림 2. SNNS 표본화기의 스펙트럼 특성 비교

## 5. 실험

두 가지 실험을 수행 하였다. 시변 대역폭을 갖는 AM-FM 신호와 음성 신호에 대한 실험을 행하였다. 먼저 다음과 같은 AM-FM 신호  $x(t)$ 를 고려하자.

$$x(t) = a_1(t) \cos(\phi_1(t)) + a_2(t) \cos(\phi_2(t)), \quad (22)$$

여기서  $a_1(t) = \exp(5 - 2\sin(t)\cos(t))$ ,  $\phi_1(t) = 2\pi(50t + 25\sin(2t))$ , 그리고  $a_2(t) = 200$ ,  $\phi_2(t) = 2\pi(50t)$ 이다.

그림 2a는 신호  $x(t)$ 의 스펙트로그램(spectrogram)과 추정된 순시 대역폭을 보여준다. 순시 대역폭은 스펙트로그램의 컨투어(contour) 해석을 바탕으로 얻어졌다. 그림 2c는  $1/g(t)$ 가 그림 2a의 추정된 순시 대역폭일 때  $x(t)$ 의 EFT를 보여준다.  $X(\omega_g)$ 의 SS(spectral support)는  $\omega_g = \pm\omega_s/2$  사이에 있음을 알 수 있다. 그림 2d는  $x_s(t) = x(t)s(t)$ 의 EFT를 보여 준다. Nyquist 표본화 이론과 그림 2b로부터  $x(t)$ 는 표본화 주파수가  $2 \times 650/2\pi$  [samples/sec]일 때 완전하게 복구될 수 있음을 알 수 있다. 그림 3은 다음과 같이 정의된 복구 오차에 대한 3가지 비교를 보여준다.

$$e(N) = \int_{-T}^T |x(t) - x_N(t)| dt, \quad T = \pi \quad (23)$$

여기서  $x_N(t)$  은 식 (21)에 주어져 있다. 그림 3에서 첫 번째(실선)는 그림 2a에서 추정된 순시 주파수를 사용한 경우이고 두 번째(굵은 점선)는  $1/g(t) = 2\pi(90 + 20\cos(2t))$  를 사용한 경우이며 세 번째(가는 점선)는 Nyquist 표본화의 경우이다. 표 1은 평균 표본화 율의 비교를 보여준다. 이것은 시변 스펙트럼을 갖는 신호의 SNNS와 완전 복구에 대한 두 가지 예를 보여준다. 시간 구간  $[-T, T]$  사이에 있는 신호를 복구하기 위하여 “추정된 순시 주파수(실선)”를 사용할 경우에는 약  $456 \times 2$  개의 표본들이 필요하고  $1/g(t) = 2\pi(90 + 20\cos(2t))$  을 사용할 경우에는 약  $565 \times 2$  개의 표본들이 필요하며 NU의 경우에는 약  $650 \times 2$  개의 표본들이 필요하다. 평균 표본화 율에 대한 비교를 표 1에 나타내었다. 제안된 방법의 표본화 율은 NUS의 약 70%이다.

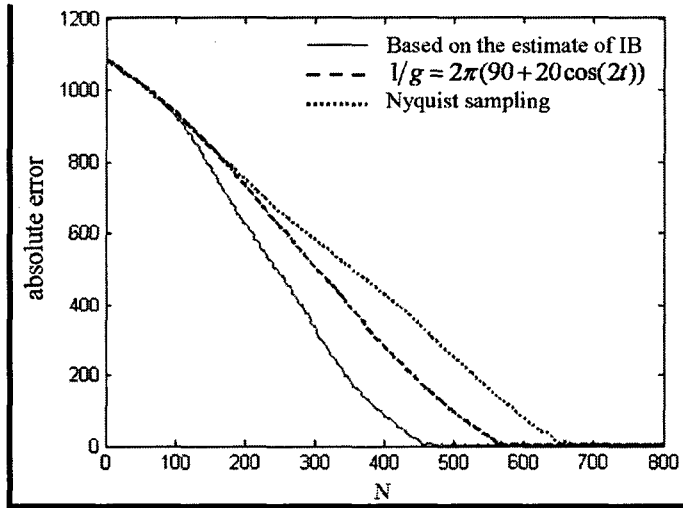
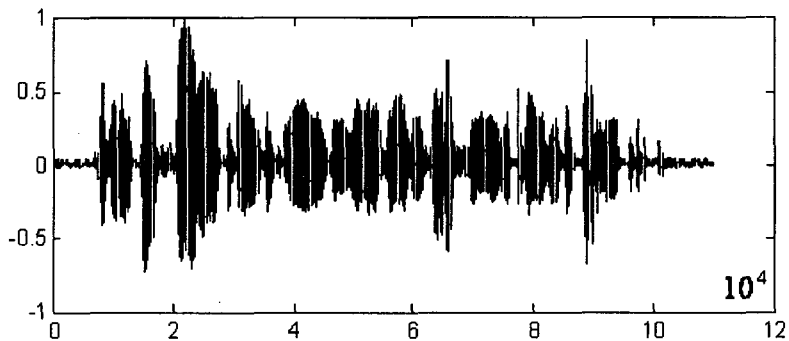


그림 3. 식 (23)에서 정의된 복구 오차의 비교

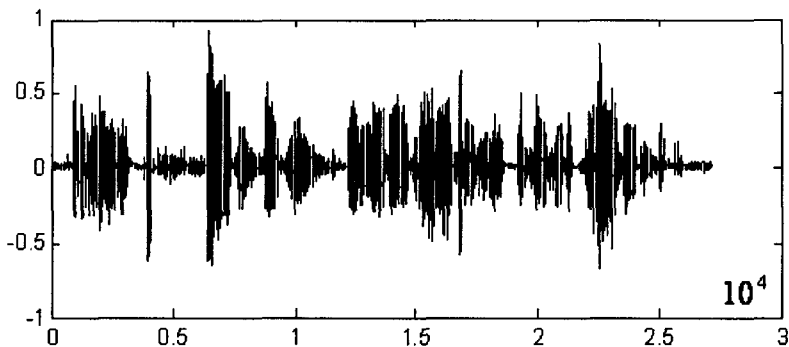
다음은 실제 음성 신호에 대한 비균일 표본화를 고려하자. 그림 4a는 22.050 kHz, 16 비트로 균일 표본화된 이산 음성 신호를 나타낸다. 총 표본의 개수는 110033으로 약 5 초 가량 지속되는 남성의 목소리로 목음 구간이 매우 짧은 특성을 가지고 있다. 그림 4b는 제안된 SNNS를 사용하여 표본화된 이산 음성 신호이다. 표본의 개수는 27133 개이다. 제안된 SNNS 표본화 방법에 의하여 얻은 단위 시간당 표본의 개수는 NUS방법에 의한 것의 약 1/4이다. 실험에서 순시 대역폭의 추정치는 주어진 신호를 1024 개의 표본을 갖는 Hanning 윈도우를 사용하여 얻은 스펙트로그램을 바탕으로 구하였다. Hanning 윈도우의 크기는 시간-주파수 해상도를 고려하여 결정하였다.

표 1. 평균 표본화 율의 비교

Methods		Average sampling rate [samples/sec]
Nyquist uniform sampling		$650/\pi$
SNNS	$1/g(t) = 2\pi(90 + 20\cos(2t))$	$565/\pi$
	Based on the estimated IB	$456/\pi$



(a) Nyquist 균일 표본화

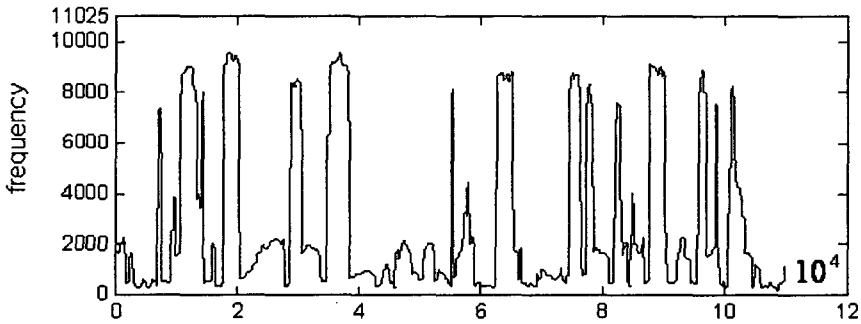


(b) Sub-Nyquist 비균일 표본화

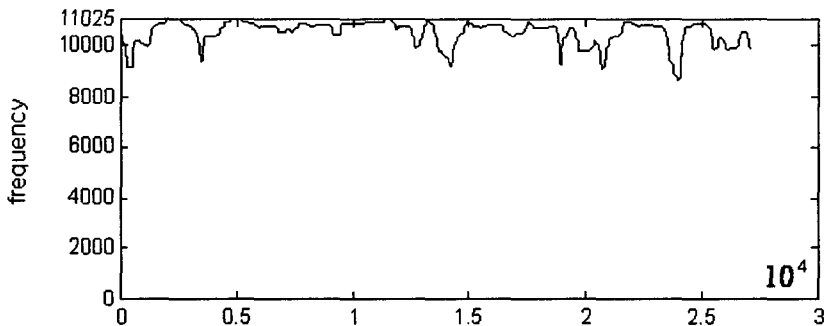
그림 4. 균일 표본화된 신호와 완전 복구 가능한 비균일 표본화된 신호 파형의 비교, “*The discrete Fourier transform of real signal is conjugate symmetric.*”의 음성신호 파형

Hanning 윈도우를 한 표본씩 이동 시키면서 이산 음성신호와 곱하여 얻은 신호의 FFT를 구한 후 에너지의 99%까지 포함하는 주파수를 매 표본마다 정하여 음성 신호의 순시 대역폭의 추정치를 구하였다. 그림 5a는 그림 4a에 주어진 음성신호의 추정된 순시 대역폭을 나타낸다.

추정된 순시 대역폭은 이산 신호이므로 Nyquist 복구 방법을 사용하여 연속-시간 순시 대역폭을 얻었다. 이런 방법으로 구한 연속-시간 순시 대역폭과 식 (5)를 사용하여 비균일 표본화 점들을 구하였다. 그림 4b는 비균일 표본화 점들에서 표본화된 음성 신호를 나타낸다. 식 (14)와 그림 4b의 비균일 표본화된 이산 신호를 사용하여 연속-시간 음성 신호를 복구하였다. 실험결과에 의하면 복구 오차의 SNR은 40 dB 이상이다. 비균일 표본화된 신호와 균일 표본화된 신호를 복구했을 때 두 신호에 대한 SNR은 40 dB 이상이므로 듣기에 의한 음질평가에서 차이를 발견 못하였다. 그림 5b는 비균일 표본화된 음성신호의 순시 대역폭을 나타낸다. 추정된 순시 대역폭이 11025 Hz와 같은 구간을 관찰할 수 있는데 이 구간의 순시 대역폭은 주어진 신호의 정확한 순시 대역폭이다. 그림 5b로부터 순시 대역폭의 시변성으로 인해 발생하는 잉여 표본들이 대부분 제거되었음을 알 수 있다. 만일 비균일 표본화된 신호의 순시 대역폭이 일정할 경우 비균일 표본화된 표본들에는 순시 대역폭의 시변성에 의한 잉여 표본들은 포함되지 않는다. 그림 6은 SNNS에 의하여 얻어진 표본들을 나타낸다. 신호가 빨리 변할 경우 표본화율이 높아짐을 알 수 있다.



(a) 그림 4a의 신호의 순시 대역폭의 추정치



(b) 그림 4b의 신호의 순시 대역폭의 추정치

그림 5. 추정된 순시 대역폭의 비교

## 6. 결론 및 향후 연구

Nyquist 표본화기로 얻은 음성 신호의 표본들은 음성 신호의 순시 대역폭의 시간적 변화와 시간-주파수 평면에서 SS(spectral support)에 의하여 점유되지 않는 영역들에 의해 발생하는 잉여 표본들을 포함하고 있다. 본 연구에서는 음성 신호의 최소 표현(minimal representation)을 얻기 위하여 잉여 표본들의 발생을 줄이는 Sub-Nyquist 비균일 표본화 방법을 제안 하였다. 제안된 방법에서 순시 표본화 주파수(instantaneous sampling frequency)는 시간-주파수 평면에서 음성 신호의 SS의 상계(upper boundary)와 함께 변화한다. 제안된 방법을 사용하면 음성 신호의 순시 대역폭이 변화함으로 인해 발생하는 잉여 표본들을 제거할 수 있다. 시간-주파수 평면에서 음성 신호의 SS가 조밀하고 상계가 순시 대역폭일 경우 제안된 방법은 최적 표본화 방법이며 연속-시간 음성 신호를 완전하게 표현할 수 있는 최소 표본들의 집합(minimal set of samples)을 제공한다. 또한 순시 대역폭에 대한 수학적 정의를 제안하였으며 제안된 표본화 방법이 양자화 오차와 잘라 버림 오차(truncation error)에 대하여 안정함을 보였다. 제안된 방법은 음성신호의 최소 표현을 얻기 위한 체계적 접근 방법의 일환으로 개발되었다. 본 논문에서 제안된 방법을 사용할 경우 Nyquist 표본화에서 음성신호의 순시 주파수가 시간에 따라 변함으로 인해서 발생하는 잉여 표본들을 제거할 수 있다. 그러나 본 논문에서 제안된 방법에 의하여 얻어진 표본들에는 음성 신호의 시간-주파수 표현의 SS가 조밀하지 않음으로 인해서 발생하는 잉여 표본들이 포함되어 있으므로 이것들을 제거하기 위한 연구가 필요하다.

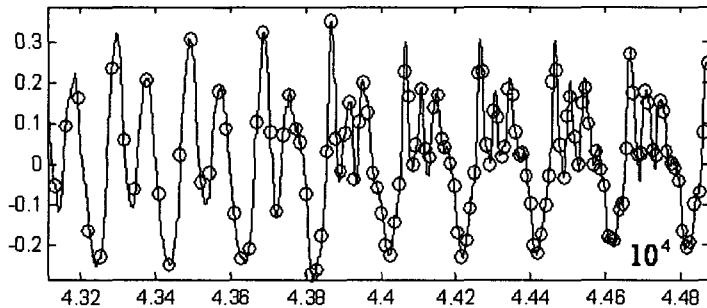


그림 6. SNNS 표본화된 표본들(SNNS 표본을 원으로 나타내었음)

## 참고 문헌

- [1] Landau, H. J. 1967. "Sampling, Data Transmission, and the Nyquist Rate," *Proceedings of the IEEE*, vol. 55, pp. 1701-1706, October.
- [2] Landau, H. J. 1967. "Necessary density conditions for sampling and interpolation of

- certain entire functions," *Acta Math*, vol. 117, pp. 37-52.
- [3] Marvasti, F. 2002. *Nonuniform Sampling - Theory and practice*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York.
- [4] Vaidyanathan, P. P. 2001. "Generalization of the sampling theorem: seven decades after Nyquist," *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, pp. 1094-1109, September.
- [5] Venkataramani, R. and Bresler, Y. 2003. "Sampling theorems for uniform and periodic nonuniform MIMO sampling of multiband signals," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 51, pp. 3152-3163, December.
- [6] Lee, H. Y. and Bien, Z. 2004. "Bandpass variable-bandwidth filter for reconstruction of signals with known boundary in time-frequency domain," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, pp. 160-163, February.
- [7] Alexander, D. 1996. *Poularikas, The transforms and applications handbook*, CRC Press.
- [8] Beutler, F. J. 1996. "Error-free recovery of signals from irregularly spaced samples," *SIAM Rev.*, vol. 8, pp. 328-335, July.
- [9] Venkataramani, R. and Bresler, Y. 2001. "Optimal sub-Nyquist nonuniform sampling and reconstruction for multiband signals," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, pp. 2301-2313, October.
- [10] Venkataramani, R. and Bresler, Y. 2000. "Perfect reconstruction formulas and bounds on aliasing error in sub-Nyquist nonuniform sampling of multiband signals," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 46, pp. 2173-2183, September.
- [11] Eldar, Y. C. and Oppenheim, A. V. 2000. "Filterbank reconstruction of bandlimited signals from nonuniform and generalized samples," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, pp. 2864-2875, October.
- [12] Jorge, P., Ferreira, S. G. 1995. "Nonuniform sampling of nonbandlimited signals," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 2, pp. 89-91, May.
- [13] Xiao, C. 1995. "Reconstruction of bandlimited signal with lost samples at its Nyquist rate-the solution to a nonuniform sampling problem," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, pp. 1008-1009, April.
- [14] Zeevi, Y. Y. and Shlomot, E. 1993. "Nonuniform sampling and antialiasing in image representation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 41, pp. 1223-1236, March.
- [15] Marvasti, F. 1996. "Nonuniform sampling theorems for bandpass signals at or below the Nyquist density," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44, pp. 572-576, March.
- [16] Marvasti, F., Analoui, M. and Gamshadzahi, M. 1991. "Recovery of signals from nonuniform samples using iterative methods," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 39, pp. 872-878, April.
- [17] Hasan, F. M., Echhart, M., Talebi, S. 1999. "Efficient algorithms for burst error recovery using FFT and other transform kernels," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47, pp. 1065-1075, April.
- [18] Cohen, L. 1989. "Time-frequency distributions-a review," *Proc. IEEE*, vol. 77, pp. 941-



981, July.

- [19] Qian, S. and Chen, D. 1996. *Joint time-frequency analysis*, NJ: Prentice-Hall,
- [20] Lee, H. Y. and Bien, Z. 1998. "Reconstruction of signals with known instantaneous frequency using linear time-varying filter," *Electronics Letters*, vol. 34, pp. 2312-2313, November.
- [21] Lee, H. Y. and Bien, Z. 1998. "On the eigenstructure of linear quasi-time-invariant systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 29, pp. 873-887, August.
- [22] Herley, C. and Wong, P. W. 1999. "Minimum rate sampling and reconstruction of signals with arbitrary frequency support," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 45, pp. 1555-1564, July.

접수일자: 2005. 04. 30

게재결정: 2005. 05. 30

▲ 이희영

서울특별시 노원구 공릉2동 172번지 (우: 139-743)

서울산업대학교 제어계측공학과

Tel: +82-2-970-6545, Fax: +82-2-949-2654

E-mail: leehy@snut.ac.kr

## 부 록

(Dirac 임펄스 함수의 성질[7])

만일  $h(t)$  가 시간 축  $t$  위에서 단순 영점을 갖는 함수라면 충격 함수  $\delta(h(t))$  는 다음과 같이 분해 된다.

$$\delta(h(t)) = \sum_{\substack{a, \\ h(a)=0, \\ h'(a) \neq 0}} \frac{\delta(t-a)}{|h'(a)|},$$

여기서  $h'(t)$  는  $d(h(t))/dt$  이다.