大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 15 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XV, No.1, 39-56. Feb 2005

상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해

이 경 화* · 신 보 미**

Tall & Vinner(1981)의 연구는 개념 학습에 관한 중요한 패러다임을 제공함으로써, 다양한 내용 영역과 학교급에 대하여 반복적으로 수행되어 왔다. 이 연구에서는 상위 집단 학생들의 함수의 연속에 대한 이해라는 관점에서 Tall & Vinner(1981)의 연구를 반복 수행하였으며, 그 결과를 분석함으로써 우리나라 상위 집단 학생들의 고유한 특성을 도출하고자 하였다. 우리나라의 상위 집단 학생들은 함수의 연속을 용어의 구어적 의미나 시각적인 심상에 의존하여 이해하기보다는 개념정의와 직접 관련지어 파악하는 경향이 있었다. 학생들이 보여준 개념이미지는 5가지 유형으로 분류되었으며, 이를 통하여 이후의 학습에서 상위 집단 학생들이 부딪힐만한 인지적 갈등 상황이 어떤 것인지 간접적으로 파악할 수 있었다.

Ⅰ. 들어가는 말

우정호(1998: 25)에 의하면, 수학적으로 사고한다는 것은 수학적인 개념의 이해를 토대로 수학적인 원리와 법칙의 의미를 파악하여 수학적인 안목을 갖고 사고한다는 의미이다. 수학적인 상황에서 대부분의 개념들은 기존의 수학적 개념 또는 일상적 개념을 토대로 정의된다. 그러므로 학생들이 이미 가지고 있는 수학적 개념 또는 그 개념과 관련하여 가지고 있는 일상적 개념이 어떤 것인지에 관하여 파악하는 것이 필요하다. Tall & Vinner(1981)가 제시한 개념이미지(concept image)와 개념정의(concept definition) 사이의 구분은 이러한 필요에 부합되는 한 가지 분석 방법을 제공한다.

Tall & Vinner(1981)에 의하면 개념은 공식적인 개념정의 자체로서보다는 개념이미지의 형태로 다루어진다. 그러므로 공식적인 개념정의가 학생 개인의 인지구조와 동화 또는 조절을 거쳐 적절한 개념이미지로 형성되지 않으면 얼마간의 시간이 흐른 후에 잊혀지거나 일부분이 왜곡되어 부적절한 개념이미지가 된다. 공식적인 개념정의와 갈등을 일으키는 부적절한 개념이미지는 수학적 내용을 다루는 상황에서 장애의 요인이 될 수 있다. 따라서 학생들의 그릇되거나 불완전한 개념이미지를 올바른 방향으로 변화시키는 일은 학교 교육에서 해야 할 필수적인 과제라고 할 수 있다.

이 연구에서는 연속함수의 개념이미지에 대한 Tall & Vinner(1981)의 연구를 출발점으로 하여 상위 집단 학생들의 함수의 연속에 대한 개념 이해의 특징을 살펴보고자 한다. 상위 집단 학생들은 함수의 연속과 같은 최상위 개념

* 한국교원대학교, khmath@knue.ac.kr
** 광주과학고, bomi0210@hanmail.net

을 무리 없이 학습하는지, 부적절한 개념이미지를 가지고 있는지 알아보고자 한다. 이를 위해 상위 집단 1개 학급을 대상으로 지필 검사를 실시한 후 각 문항별 반응 빈도와 전체적인 경향을 조사하고, 지필 검사 결과를 토대로 5명의 학생을 선택하여 개별 면담을 실시할 것이다. 개별 면담 결과의 분석을 통해 함수의 연속에 대한 상위 집단 학생들의 이해 수준과 특징을 알아볼 것이다. 상위 집단 학생들의 개념이미지에 대한 이 연구 결과를 토대로 중위 또는 하위 집단 학생들의 함수의 연속에 관한 개념이미지도 연구될 필요가 있다.

II. 이론적 배경

1. 개념 학습과 개념이미지

수학 학습의 대부분은 일반적으로 개념의 발전에 의하여 이루어지며 수학적 원리들은 그 원리에 내재되어 있는 개념의 이해를 통하여 최적으로 학습되는 바, 개념을 학습한다는 것은 개념의 속성을 확인하는 것이며, 새로운 상황에서 예들을 일반화하고 예가 되는 것과 되지 않는 것을 구별할 수 있는 것을 의미한다. 그러므로 어떤 개념을 학습한 후에 개개의 학생들은 개념에 의미를 부여하는 나름의 인지 구조를 형성한다(우광식, 1995: 89). Tall & Vinner(1981)의 이론에서 학생들이 개념에 의미를 부여하는 나름의 인지 구조는 개념이미지라는 용어로 표현된다(Tall & Vinner, 1981). 또한 이남숙(1997)에 의하면, 개념은 공적차원, 사적차원, 행동차원의 3가지가 존재하며, 개인의 행동을 실제로 지배하는 것은 개인의 인지 구조 안에 형성되어 있는 사적차원이다.

Brousseau(1997)는 수학자들이 수학적 개념을 발견하고 정돈하는 과정을 '원형수학적 개념(protomathematical concepts)', '의사수학적 개념(paramathematical concepts)', '수학적 개념(mathematical concepts)'의 세 단계로 구분하여 제시하였다(우정호, 2000: 448에서 재인용). 이는 수학자들도 나름의 인지 구조에서 출발하여(또는 사적 차원에 의존하여) 수학적 개념을 형성하고 발전시킨다는 것을 지적하는 것으로 볼 수 있다.

학생들도 수학 학습 과정에서 개념 이해를 위한 나름의 인지 구조를 형성하고, 수학자들도 수학적 개념을 발전시키는 과정에서 사적인 차원에 의존하는 것을 선행 연구로부터 알 수 있다. 그러므로 공식화된 개념정의 또는 수학적 개념과는 구분되는 학생 나름의 인지 구조, 곧 개념이미지의 세부적인 이해와 분석의 필요성이 제기되는데, 이와 관련하여 Hershkowitz & Vinner(1980)의 연구를 참고할 수 있다. 이들은 이스라엘의 5~8학년 학생 518명, 예비초등학교 교사 142명, 현직 초등학교 교사 25명을 대상으로 각과 삼각형의 높이, 다각형의 대각선과 직각삼각형의 개념 등에 대한 개념이미지를 조사하였다. 연구 결과 다수의 교사들 역시 대부분의 학생들과 마찬가지로 불완전한 개념이미지를 가지고 있거나 옳지 않은 요소를 포함한 잘못된 개념이미지를 가지고 있었다. 국내에서도 박수정(2002)이 예비교사들과 현직교사들의 극한에 대한 개념이미지를 조사한 바, 교사들이 수열의 극한과 무한급수에 대해 직관적 정의나 형식적 정의를 비교적 바르게 기술할 수 있음에도 불구하고 극한을 한계 값, 도달불능 값, 마지막 항, 근사값으로 이해하는 등 극한에 대한 개념 정의와 갈등을 일으킬 수 있는 부적절한 개념이미지를 가지고 있었다. 또한 조현정(1997)은 고등학교 2학년을 대상으로 극한 단원을 학습하기 전과 학습이 끝난 직후,

그리고 3개월이 지난 후의 3차례에 걸친 설문 조사를 통해, 85%이상의 학생이 극한에 대해, '도달 불가능한 것' 또는 '근사값' 이라는 개념 이미지를 가지고 있으며 초보적인 극한 문제에 대해서는 공식과 같이 학습 과정에서 얻은 기술을 이용하여 극한값을 구할 수는 있으면서도, 문제의 의미를 정확히 이해하여 설명할 수 있는 학생은 소수에 불과하다는 것을 연구 결과로 제시하였다. 학생, 예비 교사, 현직 교사의 특정 개념에 대한 개념이미지 연구는 이들의 서로 다른 이해 수준을 드러내는 동시에 교수-학습상의 유의점을 보다 구체적으로 도출하게 한다는 점에서 수학교육적 가치를 지닌다.

2. 함수의 연속 개념과 개념이미지

Tall & Vinner(1981)는 조사 연구를 통하여 함수의 연속에 대한 학생들의 이해 수준과 개념이미지를 분석하였다. 그들은 함수의 연속에 대한 개념이미지가 연속의 구어적(colloquial) 의미의 영향 때문에 '틈이 없는', '한 조각인' 그래프를 갖는 함수와 관련된다고 설명하였다. 또한 이러한 개념이미지는 연속성을 다루는 교육과정의 전개 방식에 의해 더욱 강화되어 문제 해결의 장애 요인이 된다고 주장하였다.

> 연속의 개념은 좀처럼 공식적인 정의로 취급되지 않는다. 반면에 그 개념이미지는 비공식적인 관용어를 통해 구성된다. 예를 들어 SMP교과서(School Mathematics Project Advanced Level text)[1]에서 극한과 연속의 개념이미지는 2년에 걸쳐 주의 깊게 형성되지만 공식적인 개념정의는 그 과정의 마지막에 가서야 겨우 제시된다. 이런 방식은 개념정의를 개념이미지로부터 자연스럽게 유도하고자 하는 의도에서 출발한 것이지만, 실제에 있어서는 나중에 연속을 해석적으로 연구하는 학생들에게 인지적 갈등을 일으킬 수 있는 잠재적인 갈등 요인이 되고 있다 (Tall & Vinner, 1981: 155).

이와 관련하여 Tall & Vinner(1981)는 수학을 선택한 41명의 대학 1년생에게 연속에 대한 개념이미지를 조사하기 위한 설문 조사를 실시하였다. 이들은 이 설문의 결과로부터 학생들의 연속함수에 대한 개념이미지가 대부분은 '틈이 없는', '한 조각인' 그래프를 갖는 함수, 몇몇은 '하나의 식'으로 주어진 함수, 일부는 '기울기가 부드럽게 변하는' 함수와 관련된다고 설명하였다. 또한 연속성에 대한 이러한 심상이 개념 학습의 초기 단계에서는 도움이 될 수 있지만 이후의 공식적인 개념정의를 다루는 상황에서는 인지적 장애의 요인이 된다고 하였다. 높은 수준의 수학적 개념일수록 시각화하기가 어려운데, 연속성의 개념이 교과서에서 좀처럼 공식적인 정의로 다루어지지 않기 때문에 이에 대한 개념이미지가 일상생활의 경험에서 생긴 자생적 개념에만 의존하고 있다고 비판하였다 (Tall & Vinner, 1981: 167-169).

함수의 연속에 대한 이해는 극한에 대한 이해와 밀접한 관계를 맺는다. 박선화(1998: 149-153)는, 함수의 극한 개념이 본질적으로 어떤 점에서의 함수값의 존재 여부에 관계없이 그 점 근방에서의 함수의 상태를 규정하는 개념으로 함수의 연속성과 구분되는 개념임에도 불구하고 다수의 학생들이 "불연속함수이므로 극한값이 없다"와 같은 부적절한 개념이미지를 가지고 있어 함수의 극한 개념과 연속 개념의 차이를 구분하지 못한다고 지적하였다. 한종희(1997: 42-50)는 연속함수의 정의에 대한 학생들의 이해 정도를 알아보기 위한 설문 조사를 통하여, 대부분의 학생들이 함수의 연속에 대

1) 이 교과서는 중등학교에 해당하는 key stage 4(14세~16세)에서 활용된다.

한 정의를 바르게 알지 못한다고 설명하였다. 그에 의하면 학생들은 연속함수에 대하여 '함수값과 극한값이 같은 함수', '그래프가 하나의 모양으로 나타나는 함수'라는 개념이미지를 가지고 있으며, 한 점에서의 함수의 연속을 정의하는 세 가지 조건을 각각 별개의 것으로 간주하는 경향이 있다.

3. 오개념과 개념이미지

개념 학습과 관련하여 자주 거론되는 '오개념'을 개념이미지와 구분할 필요가 있다.

Ausubel 등(1986)은 학습에 들어가기 이전부터 경험에 기초하여 학생들이 가지게 되는 개념을 선개념(preconception)이라 하고, 선개념이 수학적 개념과 다를 때 이를 오개념(misconception)이라고 정의하였다. 또한 Head(1986)는 오개념의 발생 요인을 학습자의 인지 과정적 특성에 따른 내적 요인과 물리적, 사회 · 문화적, 학교 환경으로 구성되는 외적 요인으로 분류하였다(최승현, 1999: 61에서 재인용). 개념이미지는 개념정의와 구분될 뿐 반드시 부적절하다고만 볼 수 없는 반면, 오개념은 주로 학습 이전에 이미 소유하고 있는 다소간 부적절한 것이라는 점에서 차이가 있다. 다시 말하여, 개념이미지에는 적절한 것도 존재할 수 있으나, 오개념은 거부되거나 교체되어야 할 뿐 바람직한 것은 존재하지 않는다고 할 수 있다.

한편, Tall & Vinner(1981: 153)는 적절하지 않은 개념이미지가 형성되는 이유를 이른바, '잠재적 갈등 요인(potential conflict factor)'을 이용하여 설명하였다. 수학적으로 재능 있는 학생들조차도 잠재적인 갈등 요인을 갖고 있기 때문에, 이에 대한 연구가 필요하다. Davis & Vinner(1986)는 잠재적 갈등 요인의 주요 근원을 극한 개념과 관련하여 다음과 같이 5가지로 제시하였다. 첫째, 언어의 영향을 받는다는 점이다. 수학적 개념을 수학 외부의 용어를 사용하여 정의하는 경우가 있는데, 이 때 수학 외부의 용어에 내재된 의미가 학생들의 개념이미지를 왜곡시킬 수 있다. 예를 들어 '극한', 'n이 무한대로 간다'와 같은 표현은 적절하지 않은 개념이미지 형성에 영향을 미친다. 둘째, 수학 외부의 용어를 최소화하면서 전수학적 지식으로 수학적 개념을 표현할 때에도 여전히 부적절한 개념이미지는 형성될 수 있다. 셋째, 학교수학에서는 점진적인 과정을 통하여 개념을 다루기 때문에 복합적인 수학적 개념을 한번에 완성된 형태로 획득할 수 없다. 개념의 어떤 측면은 다른 측면보다 먼저 적절한 개념이미지와 관련지을 수 있으나 다른 측면에 대해서는 그렇게 하지 못할 수 있다. 넷째, 학교수학에서는 종종 특수한 예를 이용하여 개념을 설명하기 때문에, 이 때 사용한 예 때문에 부적절한 개념이미지가 생성될 수도 있다. 다섯째, 경험에 대한 잘못된 해석 때문에 부적절한 개념이미지를 형성할 수 있다(박선화, 1993: 189-190에서 재인용). 이러한 잠재적 갈등 요인은 부적절한 개념이미지의 형성으로 이어지고 결국 오개념으로 고착될 가능성도 있다. 그러므로 개념이미지에 관한 연구는 오개념 형성 과정에 대한 세부적인 이해를 가능하게 함으로써, 개념과 오개념 사이의 간격을 극복하는 방안을 도출하는 데 도움이 될 것으로 생각한다.

4. 학교수학에서의 함수의 연속

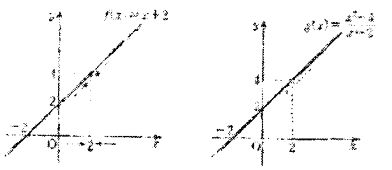
Tall & Vinner(1981)의 연구는 학생들의 개념이미지가 그 개념을 다루는 교육과정과 교과서의 전개 방식에 일정 부분 의존함을 보여준다. 그러므로 우리나라 학생들의 함수의 연속에 대한 이해에도 우리나라의 교육과정과 교과서가

어느 정도 영향을 미칠 것으로 예상할 수 있다. 현행 교육과정에서 함수의 연속은 수학Ⅱ의 '함수의 극한과 연속성'의 단원에서 다루어진다. 제7차 고등학교 교육과정해설서에서는 다음과 같은 설명이 제시되어 있다.

> 현재 고등학교에서의 정의는 코시에 의한 것으로서 다음과 같다.
> $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 가 연속 $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
> 여기서 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 가 성립하기 위해서는 다음이 성립해야만 한다.
> ㉠ $f(a)$ 가 존재한다. ㉡ $\lim_{x \to a} f(x)$ 가 존재한다.
> ㉢ $\lim_{x \to a} f(x)$ 와 $f(a)$ 가 일치한다.
> 실제로 $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 가 연속이라는 것은 위의 ㉢, 즉 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 이고, 이는 ㉠과 ㉡을 내포하지만, 학생들에게 지도할 때는 위 세 단계로 나누어 이해시키는 것이 바람직하다(교육부, 2001: 112-113).

위의 세 단계는 함수의 연속에 대한 개념정의가 어떻게 구성되어 있는가를 나타내는 반면, "연속이란 개념은 본래 곡선에 대하여 존재했던 것이고, 곡선이 끊기지 않고 이어져 있다는 직관적인 개념에서 발생한 것이다"라는 설명(교육부, 2001: 112)은 교사와 학생의 개념이미지에 영향을 미칠 만한 것으로 보인다.

수학Ⅱ의 모든 교과서에서는 '함수의 연속성'이 다음과 같은 전형적인 예로부터 도입된다.



[그림 Ⅱ-1] 함수의 연속과 관련된 예

[그림 Ⅱ-1]에서 $f(x)=x+2$ 의 그래프는 $x=2$ 에서 '연결되어' 있고, $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ 의 그래프는 $x=2$ 에서 '끊어져' 있다는 설명이 제시된다(임석훈 외, 2003: 64). "함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면, 이 함수의 그래프는 $x=a$ 에서 끊어지지 않는다"라고 설명되기도 한다(이강섭 외, 2002: 56).

이러한 교과서의 설명은 학생들이 함수의 연속에 대한 개념이미지를 형성하는 데 영향을 미칠 것이다. 연속함수는 한 점에서 함수의 연속으로부터 다음과 같은 두 가지 방식으로 정의된다.

> 정의 1. 함수 $f(x)$ 가 개구간 $(a,\ b)$ 에 속하는 모든 x 의 값에서 연속일 때, $f(x)$ 는 이 개구간 $(a,\ b)$ 에서 연속 또는 연속함수라고 한다(최용준 외, 2002: 59).

> 정의 2. 함수 $f(x)$ 가 그 정의역에 속하는 모든 실수에 대하여 연속일 때, $f(x)$ 를 연속함수라 한다(우정호 외, 2003: 57).

본 연구에서 참조한 대부분[2)]의 교과서에서는 정의 1을 택하고 있으며, 일부 교과서만 정의 2를 택하고 있다. 정의 2는 다음과 같은 대학 수준에서의 정의와 동형이다.

> 함수 f: $S_1 \to S_2$ 는 모든 $x_0 \in S_1$ 에서 연속일 때, 연속함수라고 한다(Donald W. Kahn, 1980: 27).

정의 1과 정의 2를 택한 교과서 모두 다음 문제4와 같이 연속인 구간을 거꾸로 구해보도록 하는 문제와, 문제5와 같이 시각적인 표상과 관련지어보는 문제를 제시한다. 연속함수에 대한 개념이미지는 정의 외에 이러한 문제들을

2) 본 연구에서 참고한 7종의 교과서 중 6종이 정의 1을 택하고 있다.

해결하면서도 형성될 수 있을 것으로 보인다.

문제4. 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.

(1) $y=x^2+1$

(2) $y=\log-2(4-x^2)$

(3) $y=\sqrt{x+1}$

(4) $y=\sqrt{9-x^2}$

문제5. 다음 함수의 그래프를 그리고, 연속 또는 불연속을 조사하여라.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$

(이강섭 외, 2002: 58)

III. 검사지 개발과 적용

이 연구에서는 상위 집단 학생들의 함수의 연속에 대한 이해를 조사하는 것에 목표를 두며, 특히 Tall & Vinner(1981)의 연구를 반복 설계하여 적용하였을 때 우리나라 학생들이 보이는 고유한 특성을 파악하는 것을 이차적인 목표로 한다. 이를 위해 먼저 예비 검사를 실시하여 설문 문항을 수정하였으며, 본 검사를 통하여 학생들의 반응을 살펴보았다. 지필 검사 반응만으로는 학생들의 이해 수준, 특히 개념 이미지를 파악하기 어렵기 때문에, 본 검사에서 잠재적 갈등 요인을 드러낸 5명의 학생을 선택하여 개별 면담을 실시하였다. 개별 면담의 목적은 다음과 같다. 첫째, 정답률이 특히 낮은 문항에 대하여 학생들의 실제 이해 수준을 세밀하게 파악한다. 둘째, 함수의 연속에 대한 현재의 교육과정 또는 교과서의 전개 방식이 학생들에게 미친 세부적인 영향을 간접적으로 평가한다.

1. 예비 검사

예비 검사는 Tall & Vinner(1981)의 연구에 포함된 문항의 질문 내용에 대한 우리나라 학생들의 대체적인 반응을 살펴보고 부적절한 문항을 제외하거나 수정하려는 목적으로 실시하였다. 예비 검사에 사용된 문항은 다음과 같다:

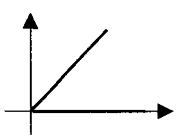
1. 다음 함수들 중 $x=0$ 에서 연속인 함수는 어느 것인가? 가능하면 이유를 설명하여라.

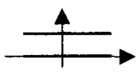
$f_1(x)=x+2$

$f_2(x)=\dfrac{x^2}{x}$

$f_3(x)=\sqrt{x}$

$f_4(x)=\begin{cases} x & (x\text{가 유리수}) \\ 0 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$ [3]



3) 1년 전 정규 수업 시간에 연구 대상 학생들에게 함수의 연속을 지도하던 중 모든 점에서 불연속인 함수는 존재하는가하는 질문을 받은 적이 있다.
연구자는 디리클레 함수(Dirichlet function) $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\text{가 유리수}) \\ 0 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$ 를 예로 들어 이 함수의 그래프를 구태여 시각적으로 표현하자면  과 같이 나타낼 수는 있지만 이 함수가 실제로는 모든 실수에서 불연속함수이기 때문에 함수의 연속(혹은 다른 수학적인 개념들)과 관련하여 시각적인 표상의 한계를 지적한 바 있다. 이 문항은 고등학교 교육과정의 수준을 넘어선다고 볼 수 있으나 이 연구의 대상이 상위 집단 학생들이었기 때문에, 함수의 연속에 대한 형식적 정의와 시각적인 표상 사이의 관계에 대한 학생들의 이해 수준을 알아보기 위하여 포함시켰다.

2. 다음 함수들 중 연속함수인 것은 어느 것인가? 가능하면 이유를 설명하여라.

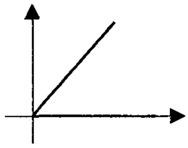
$f_1(x)=x^2+2$

$f_2(x)=\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

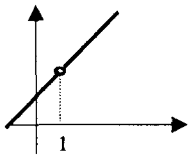
$f_3(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$

$f_4(x)=\begin{cases} 1 & (x\text{가 유리수}) \\ -1 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$

$f_5(x)=\begin{cases} x & (x\text{가 유리수}) \\ 0 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$



$f_6(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$



예비 검사 결과 학생들은 각 문항의 질문 내용을 이해하는 데 어려움을 보이지 않았으며 각 문항에 대하여 비교적 높은 정답률을 보여주었다. 2번 문제의 경우, 유사한 하위 문항이 너무 많아 학생들이 지루해 하였으며, 특히 f_3과 f_4는 정답률도 높고 나머지 다른 함수와 중복되는 경향이 있어서 본 검사에는 포함시키지 않았다. 한편 상대적으로 정답률이 낮은 1번 문제의 f_3과 f_4, 2번 문제의 f_2과 f_6에 대한 학생들의 사고 과정은 본 검사와 개별 면담을 통하여 보다 자세히 살펴볼 것이다.

2. 본 검사

본 검사는 정규 교육과정에서 함수의 연속을 배운지 1년이 지난 시기에, 상위 집단 학생들로 구성된 1개 학급 20명을 대상으로 실시하였다. 검사 시간은 약 20여분 정도였으며, 지필로 서술형 답안을 작성하도록 하였다. 본 검사 문항은 다음과 같다:

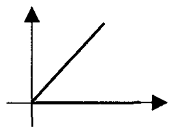
1. 다음 함수들 중 $x=0$에서 연속인 함수는 어느 것인가? 가능하면 이유를 설명하여라.

$f_1(x)=x+2$

$f_2(x)=\frac{x^2}{x}$

$f_3(x)=\sqrt{x}$

$f_4(x)=\begin{cases} x & (x\text{가 유리수}) \\ 0 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$



<표 Ⅲ-1> 1번에 대한 응답(음영 부분이 정답)

n=16	f_1	f_2	f_3	f_4
$x=0$ 에서 연속	16	2	8	6
$x=0$ 에서 불연속	0	14	6	8
무응답	0	0	2	2

<표 Ⅲ-2> 2번에 대한 응답(음영 부분이 정답)

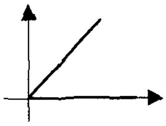
n=16	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
연속함수	16	5	0	2	3	2
불연속 함수	0	11	16	13	11	13
무응답	0	0	0	1	2	1

2. 다음 함수들 중 연속함수인 것은 어느 것인가? 가능하면 이유를 설명하여라.

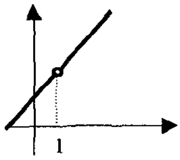
$f_1(x)=x^2+2$

$f_2(x)=\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$

$f_3(x)=\begin{cases} x & (x\text{가 유리수}) \\ 0 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$



$f_4(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$



1번 문제는 '한 점에서의 함수의 연속성을 바르게 판정하는가?'를 파악하기 위한 것이며, 2번 문제는 '연속함수의 의미를 바르게 이해하고 있는가?'를 알아보기 위한 것이었다. 앞서 교과서 검토를 통하여 확인한 바, '한 점에서의 함수의 연속성'은 공식적인 개념정의가 분명하게 제시되고, 각 교과서마다 비교적 동일한 방식으로 다루어지는 반면, '연속함수'의 경우에는 개념정의 자체가 다소간 분명하지 않게 제시되고, 교과서에 따라 이를 정의하는 방식도 두 가지 유형으로 나누어진다. 1번 문제에 대한 응답을 통하여 '한 점에서의 함수의 연속성'을 둘러싼 학생들의 개념이미지를, 2번 문제에 대한 응답을 통하여 '연속함수'에 관련된 개념이미지를 파악하고자 한다.

Ⅳ. 조사 결과와 면담 결과 분석

1. 정답률 및 판정 이유 분석

우선 각 문항에 대한 학생들의 응답 결과와 판정 이유를 구분하여 표로 제시하면 <표Ⅳ-1>, <표Ⅳ-2>와 같다. 1번 문제에 대한 응답 경향을 볼 때, 학생들은 한 점에서의 함수의 연속성을 비교적 어려움 없이 판정하는 것으로 보인다. 상대적으로 정답률이 낮은 하위 문항에 대해서는 면담을 통하여 부적절한 개념이미지가 형성되어 있는지 살펴볼 것이다. 2번 문제에 대한 전체적인 응답 경향을 볼 때, 학생들은 연속함수에 대해 충분한 이해 수준에 도달해 있지 못한 것으로 보인다. 1번 문제에 비하여 정답률이 낮은 하위 문항이 많았고, 판정 이유 역시 다양하였다. 면담을 통해 2번 문제에 대한 학생들의 생각을 보다 자세히 살펴볼 것이다. 한편, 연속성을 판정하기 위하여 그래프를 그린 학생들이 1번 문제의 경우 55%(20명 중 11명), 2번 문제의 경우 70%(20명 중 14명)이었다. 그래프는 개념정의보다는 개념이미지에 보다 관련되는 수학적 표상이므로, '한 점에서의 함수의 연속성'보다 '연속함수'에 대하여 개념이미지를 이용한 이해가 더 많다는 추측을 할 수 있다. 연구 대상 학생들 중 매우 우수한 학생들은 그래프를 그리지 않고 문제를 해결하였다는 점에서 이 추측은 보다 설득력을 얻는 것으로 보인다. 이 추측에 대해서는 후속 연구가 필요하며, 본 연구의 범위를 벗어난다.

1번 문제 중 상대적으로 낮은 정답률을 보인 f_3의 경우, "$x=0$에서 좌극한이 존재하지 않기 때문에", "$\lim_{x\to 0} f_3(x)$이 존재하기 때문에" 등 극한 개념을 이용한 설명이 많았다. 극한에 대한 이해와 함수의 연속에 대한 이해가 어떻게 관련되는가에 대한 보다 자세한 연구가 필요한 바, 이에 대해서는 면담을 통하여 알아보기로 하였다. 2번 문제에 대한 정답률은 1번 문제에 비하여 낮았다. 특히 f_2, f_4의 경우, 극한 개

념, 함수값의 존재성 등 연속함수에 대한 개념 정의와 관련지어 이해하려는 시도가 있었음에도 불구하고 오답을 낸 학생들이 많았다. 면담을 통하여 학생들이 연속함수의 개념정의에 대하여 어떻게 이해하고 적용하는지, 또 그 개념정의와 인지적 갈등을 일으키는 어떤 유형의 개념이미지를 소유하고 있는지 살펴보기로 하였다.

<표Ⅳ-1>과 <표Ⅳ-2>의 정답률과 판정 이유를 검토할 때, Tall & Vinner(1981)의 연구 결과와 다소 차이가 있음을 알 수 있다. 학생들은 '그래프가 한 조각이 아니기 때문에', '그래프가 끊겨 있기 때문에' 등의 판정 이유를 제시하지 않았으며, 역시 '한 개의 식이 아니기 때문에' 불연속이라고 판정하는 경우도 거의 없었다. 상당수 학생들이 개념정의를 바르게 이

<표 Ⅳ-1> 1번에 대한 응답(음영 부분이 정답)

n=20		f_1	f_2	f_3	f_4
무응답			1		1
연속		20	3	11	15
판정 이유	형식적 정의 이용	17	2	11	13
	그래프 이용	3	1		
	무응답				2
불연속			16	9	4
판정 이유	형식적 정의 이용		16(함수값 없음)	9(좌극한 없음)	2 [4]
	기타				1(①)
	무응답				1

<표 Ⅳ-2> 2번에 대한 응답(음영 부분이 정답)

n=20		f_1	f_2	f_3	f_4
무응답		1	1	1	
연속		19	7	4	1
판정 이유	형식적 정의 이용	9			
	그래프 이용	6			
	미분이용	2	1		
	기타	1(②), 1(④)	5(③)	2(②)	1(⑤)
	무응답		1	2	
불연속			12	15	19
판정 이유	형식적 정의 이용		5(함수값 없음) 4(극한값 없음)	9	16(함수값 없음)
	그래프 이용		2		[5]
	기타		1(②)	2(①), 1(⑥)	
	무응답			3	3

4) ①유리수 0에 가장 근접한 값은 0.000000…인 무리수이기 때문에

5) ① 유리수나 무리수로 표현된 함수는 빠지는 부분이 있게 되므로 ② 모든 실수에서 정의된다. 또는 어떤 실수에서 정의되지 않는다. ③ $x \neq 0$ 이므로 ④ 함수가 끊기는 부분이 없으므로 ⑤ $y=x+1$ 과 같은 함수이므로 ⑥ 정의역이 불연속인 집합이므로

해하고 적용하였으며, 그래프 또는 식의 형태에 직접적으로 의존하는 모습을 거의 보여주지 않았다. 다만 개념정의에 사용된 이전의 수학적 지식, 이를테면, 극한 개념 등을 고려하는 상황에서 개념이미지에 해당할 만한 몇 가지 특징을 보여주었다. 이는 우리나라 학생들이 배우고 있는 현재의 교육과정, 교과서의 접근이 영국의 교과서에서 택하고 있는 접근에 비하여 개념정의와 개념이미지사이의 불일치를 덜 초래한다는 해석을 가능하게 한다. 면담을 통하여 학생들이 개념정의를 적용하는 과정에서 보여주는 다양한 사고 유형이나 특징을 좀 더 자세히 파악할 수 있었다.

2. 면담 결과 분석

앞서 제시한 면담의 두 가지 목적, 곧 정답률이 특히 낮은 문항에 대하여 학생들의 이해 수준을 세밀하게 파악하고, 함수의 연속에 대한 현재의 교육과정 또는 교과서가 학생들에게 미친 세부적인 영향을 간접적으로 평가하는 것에 초점을 두되, 학생들의 언어 표현 속에서 개념이미지와 관련된 다양한 측면을 살펴보는 것에도 주목한다. 실제 면담은 이러한 면담의 목적을 달성하기에 부합된다고 여겨지는 학생 5명, 학생 A, B, C, D, E를 선택하여 실시하였다. 면담 시간은 약 30분에서 1시간 정도였으며 모든 면담 과정을 비디오로 녹화하였다. 학생 A는 문제 해결력이 뛰어나고 학업 성취도가 매우 높으며 자신의 의견이나 생각을 표현하거나 설명하는 능력도 우수하다. 학생 B는 문제 해결 과정에서 독창적인 아이디어나 해결 방법을 제시하는 편은 아니지만 학습 내용을 잘 이해하고 이를 적용하는 능력이 비교적 우수하다. 학생 D는 5명 중 학업 성취도가 가장 낮고 다소 소극적이지만 수학을 대하는 태도가 성실하고 진지하다. 학생 C와 학생 E는 문제 해결 과정에서 아이디어와 해결 방법을 탐색하는 능력이 우수하며 발표를 즐기고, 설명 능력도 우수하다.

이하에서는 면담에 참여한 학생들의 함수의 연속에 대한 개념이미지 유형을 5가지로 분류한 후, 각 유형별로 면담 결과를 제시하고 각각에 대하여 간략하게 논의할 것이다.

사소한 계산 실수나 잠시 동안의 착각과 달리, 개념이미지는 인지적 갈등 요인이 되어 학습 과정 전반에 적지 않은 영향을 미칠 수 있다. 그러므로 단지 일회성의 조사 결과로, 특히

<표 Ⅳ-3> 함수의 연속 관련 개념이미지 유형

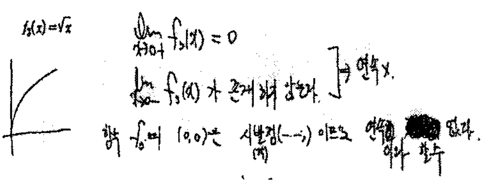
내 용		학 생
유형 1	한 점에서의 연속은 구간의 내점에서만 생각한다.	학생 A, 학생 B
유형 2	진동하는 함수는 불연속이다.	학생 C
유형 3	쭉 연결된 그래프로 표현되면 연속이다.	학생 D, 학생 A
유형 4	모든 실수에서 연속이어야 연속함수이다.	학생 A, 학생 B 학생 E, 학생 C
유형 5	분수함수는 불연속함수이다.	학생 B, 학생 D

각 문제들의 정답률만으로 학생의 이해 정도를 설명하기보다는 실제 수업을 진행하는 교사의 지속적인 관찰이나 심층적인 면담 과정을 토대로 학생들의 사고 과정을 살펴보는 것이 바람직할 것이다. 이 연구에서의 면담 역시 유사한 의도에서 실시한 것으로, 면담자는 학생들이 어떤 근거에 의하여 연속 또는 불연속을 판정하였는지, 글로는 표현하지 못했던 판정 이유가 있는지 자세히 살펴보는 것에 주목하였다. 이러한 관점에서 면담자는 학생들의 반성적 사고를 촉진하고 생각을 명확하게 드러내도록 돕는 역할을 한 것으로 볼 수 있다.

가. 한 점에서의 연속은 구간의 내점에서만 생각한다(유형 1).

함수 $y=\sqrt{x}$ 의 $x=0$ 에서의 연속성의 판정은 그 정답률이 55%로 학생들이 상대적으로 어려워하는 내용으로 파악되었다. 면담을 통하여, 상위 집단 학생들임에도 불구하고 거의 절반에 해당하는 학생들이 오답을 낸 이유가 무엇인지, 개념정의 중에서 특히 어떤 부분을 이해하지 못하는지, 부적절한 개념이미지로 간주할 만한 것은 무엇인지를 살펴보고자 한다.

<u>발췌문 1: 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 $x=0$ 에서의 연속성 판정에 관한 면담 1</u>



[그림 Ⅳ-1] 유형 1. 학생 A

학생 A : x가 이 쪽에서부터 올 때요(손을 → 모양으로 움직이면서).. <u>x가 음수인 부분에서는 함수값을 정의할 수 없잖아요.</u> 그런데 $x=0$인 점에서부터 비로소 그래프가 시작된다고 생각해 가 지고..

연구자 : 어떤 점에서 연속, 이 문제의 경우 $x=0$ 에서 연속인 것을 조사하려면 뭘 생각해야 하지?

학생 A : 왼쪽에서부터 와도 연속이고 오른쪽에서 와도 연속이어야 하는데 얘는 여기가 시작점이어서 좌극한값이 존재하지 않으니까..

<발췌문 1>에서 학생 A는 한 점에서 함수의 연속성에 대한 개념정의 중 함수값의 존재성, 극한값의 존재성을 고려하여 이를 판정하고 있다. 이는 한 점에서의 연속성에 대한 개념정의를 분명하게 기억하고 있음을 드러내는 것이나, 동시에 끝점을 포함하는 구간, 이를 테면 $[a, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 연속성을 판정하는 상황에 이 개념정의를 어떻게 변형하여 적용할 것인가를 이해하지 못한다는 것을 알 수 있다.

끝점을 포함하는 구간 $[a, \infty)$ 에서는 개념정의의 일부가 ' $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ (최용준 외, 2002, p.59)'으로 변형된다는 것을 대부분의 교과서에서 다루고 있음에도 불구하고 학생 A에게는 이 점이 내면화되지 않은 것으로 보인다. 학생들은 그래프를 그려보거나 '연속'의 일상적 의미를 고려하여 한 점에서의 함수의 연속을 판정하는 것이 아니라 그 개념정의를 충실하게 적용하려고 노력하며, 이러한 과정에서 다소간 유연성이 부족한 모습도 보이는 것을 알 수 있다. 상위 집단 학생들이 이와 같이 개념정의 자체는 알고 있으면서도 적절한 개념이미지를 형성하기보다는 개념정의 자체에만 의존하여 문제를 해결하려고 하는 모습은 Tall & Vinner(1981)에 등장하는 상당수 대학생들이 부적절한 개념이미지에 과도하게 의존하는 모습

과는 현저하게 대조되는 부분이다. 학생 A와 같은 사고의 유형은 다음 <발췌문 2>의 학생 B에게도 동일하게 드러난다.

<u>발췌문 2: 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 $x=0$ 에서의 연속성 판정에 관한 면담 2</u>

$f_3(x)=\sqrt{x}$

$f_3(0)=\sqrt{0}=0$

$\lim_{x\to 0-} f(x) \neq 0$ ∴ 불연속

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$

[그림 Ⅳ-2] 유형 1. 학생 B

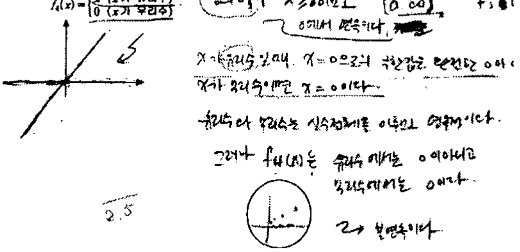
연구자 : f_3 이 $x=0$ 에서 불연속인 이유는?

학생 B : 0 보다 큰 범위에서는 정의가 되고 <u>음수일 때는 정의가 되지 않아서.. 좌극한이 존재하지 않으니까</u>..

나. 진동하는 함수는 불연속이다(유형 2).

박선화(1998: 122)에 의하면, "교대수열은 극한값이 없다."는 부적절한 개념이미지가 학생들에게 존재한다. 이는 수열의 항의 부호가 교대로 바뀐다는 사실에만 주목하고 각 항의 값의 변화에는 주목하지 못하기 때문에 생기는 것으로, 학생들은 그래프를 그릴 때에도 그 값을 정확한 위치에 표시하지 않고 지그재그로 점점 벌어지는 형태로 잘못 그린다. 이와 유사한 개념이미지가 다음 발췌문에서 확인된다.

<u>발췌문 3: 진동의 개념이미지와 관련된 면담</u>



[그림 Ⅳ-3] 유형 2. 학생 C

학생 C : 유리수일 때는 이 직선(／)을, 무리수일 때는 이 직선(＿＿)을 택하잖아요.. 수직선은 유리수와 무리수로 이루어졌는데 유리수였다가 무리수가 되면 ([그림 Ⅳ-3]의 ◯부분과 같이 그리면서) 여기에(／) 있다가 여기에(＿＿) 있게 되니까 0 에 한없이 가까워진다고 하더라도 0 옆에는 유리수와 무리수가 있으니까 <u>한없이 왔다 갔다, 왔다 갔다 해서</u>.. 여기에서(그래프에서) 보기에는 연속적인 것처럼 보이지만 <u>계속 왔다 갔다 하기 때문에 연속이 아니예요</u>..

연구자 : 0 옆에서도?

학생 C : <u>0 옆에서도 계속 왔다 갔다 해요</u>..

<발췌문 3>에서 학생 C는 $x=0$ 근방에서 함수값이 왔다 갔다 하기 때문에 극한값이 존재하지 않아서 f_4 가 불연속이라고 판정하였다.

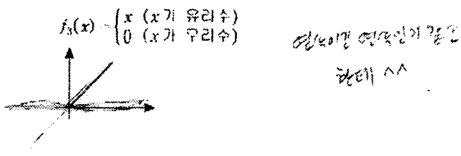
학생 C역시 다른 학생들처럼 개념정의를 충실하게 따르면서 연속성을 판정하였으며, 그래프를 이용하여 보다 분명하게 문제 상황을 표현하기도 하였다. 그러나 학생 C는 함수값이 왔다 갔다 한다는 사실에만 주목하고 그 값의 변화 정도에는 주목하지 못하였다. 이는 진동에 대한 부적절한 개념이미지로 볼 수 있으며, 결국 극한값의 존재성, 연속성 등 이후의 관련 개념의 이해를 가로막는 요인이 된다.

여기서 "왔다 갔다 한다"라는 개념이미지는 수학적인 의미의 진동과 관련되어, "왔다 갔다 하면 그 값의 변화 정도와는 무관하게 어쨌든 발산하는 것"이라는 오개념의 근원이 되고 있다.

이는 결국 함수의 연속성을 판정하는 데에도 영향을 미치는 것으로 보인다.

다. 쭉 연결된 그래프로 표현되면 연속이다(유형 3).

발췌문 4: 쭉 연결된 그래프를 갖는 함수에 관한 면담 1



[그림 Ⅳ-4] 유형 3. 학생 D

연구자 : 그러면 f_3이 연속함수인 이유는?

학생 D : 그래프가 이렇게(╱) 되니까(연결되어 있으니까)..

연구자 : 자네가 생각하는 연속함수는 어떤 함수인가?

학생 D : 제가 생각하는 연속함수는.. 음.. 그러니까.. 쭉 연결되어서.. 뚫린 데도 없고..

연구자 : 연속함수를 찾으라는 문제가 있으면 뭘 찾아야 하나?

학생 D : 불연속점이 없는 함수..

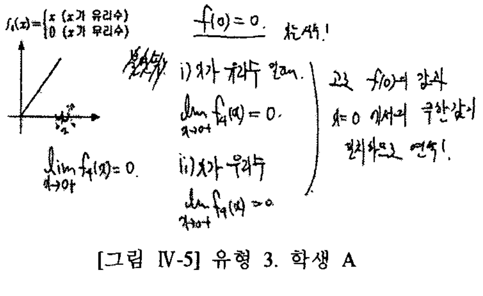
연구자 : 불연속점?

학생 D : 뚫린 점이 없는 함수..

<발췌문 4>에서 학생 D는 '연속함수는 쭉 연결되어 뚫린 점이 없는 그래프를 갖는 함수'라고 설명하고 있다. 이러한 표현은 "그래프가 연결되어 있거나 끊어져 있다"(임석훈 외, 2003: 64), 또는 "함수가 연속이면 함수의 그래프는 끊어지지 않는다"(이강섭 외, 2002: 56)와 같은 교과서의 설명과 매우 유사하다. 이는 교과서의 설명에 근거하여 학생들이 '연결되어 있는, 끊어지지 않는 그래프'를 연속함수의 개념이미지로 발전시켰다는 추측을 하게 한다. 비록 우리나라의 학생들이 연속함수의 개념정의를 충실하게 적용하려고 하지만 그래프와 관련지을 때에는 개념이미지에 상당 부분 의존하며, 그 배경에는 교과서의 설명이 상당 부분 관련되어 있음을 추측할 수 있다. 다만 이 연구에서 직접적으로 유형 3의 개념이미지를 활용하여 연속함수를 설명한 학생은 학생 D뿐인 것으로 보아, 우리나라 학생들, 특히 상위권 학생들은 교과서에서 제공하는 개념이미지 관련 정보보다는 개념정의 관련 정보에 주목하여 학습을 하는 것으로 볼 수 있다.

한편, 학생들은 Tall & Vinner(1981: 152)가 "한 개념에 대하여 항상 일관된 개념이미지만 나타나는 것은 아니며 상황에 따라 각기 다른 개념 이미지가 떠오를 수도 있고 이들 사이에는 서로 갈등이 있을 수 있다"라고 한 것처럼 상황에 따라 다소간 차이가 있는 개념이미지를 드러내었다. 예를 들어, 학생 A는 실수에서 연속인 함수(유형 4)를 연속함수로 설명하였다. 그러나 다음 <발췌문 5>에서는 유형 3에 해당하는 개념이미지를 보여주기도 하였다.

발췌문 5: 쭉 연결된 그래프를 갖는 함수에 관한 면담 2



[그림 Ⅳ-5] 유형 3. 학생 A

연구자 : f_4를 처음에는 불연속이라고 썼는데..

학생 A : 처음에는, 유리수, 무리수(손을 위아래로 움직이며), 유리수, 무리수.. 이렇게 띄엄 띄엄 있을 것 같았는데요.. 다시 생각을 고쳐 보니까요.. 미세하게 계속 세밀하게 점이 있을 테니까 극한의 개념으로 모두 연결되어(손을╱ 모양으로 움직인다) 있지 않을까 해서..

라. '모든 실수에서' 연속이어야 연속함수이다(유형 4).

앞서의 교과서 분석에서 확인한 바, 우리나라 교과서는 연속함수에 관하여 두 가지 유형의 개념정의를 제시하고 있다. 하나의 교과서에서만 '정의역에 속하는 모든 실수에 대하여 연속일 때' 이를 연속함수로 정의하고 있으며, 나머지 교과서들은 "개구간 (a, b) 에 속하는 모든 x 의 값에서 연속일 때" 이를 그 구간에서 연속함수로 설명하고 있다. 이러한 개념정의를 학생들이 어떻게 받아들이는가를 면담에서 확인할 수 있었다.

발췌문 6: 연속함수에 관한 면담 1

연구자 : 그러면 함수 f_4 는 연속함수인가?

학생A : 모든 x 에서 연속이니까 연속함수예요..

연구자 : 모든?

학생A : 모든 실수 x..

<발췌문 6>에서 학생 A는 정의역 또는 구간이 아니라 '모든 실수 집합'에서 연속함수를 생각하고 있다. 한 점에서 연속인 경우에 충실하게 개념정의를 적용하던 학생들이 연속함수에 이르러서는 이와 같이 개념정의와 다른 의미나 표현을 생성하고 있다는 점이 매우 흥미롭다. 이 현상의 원인에 대하여 세 가지 가능성을 생각할 수 있다.

첫째, 학생들이 개념정의에 포함된 조건을 일부 누락하여 이해하였기에 나타난 현상일 수 있다. 개념정의에는 분명하게 '정의역에 속하는' 또는 '개구간 (a, b) 에 속하는' 모든 실수를 언급하고 있으나 이 부분의 중요성을 간과할 수 있는 것이다. 둘째, 이전에 함수를 학습하면서, 정의역이 제시되지 않으면 실수 집합을 정의역으로 생각하였던 것을 과도하게 확장하여 적용한 것으로 볼 수 있다. 셋째, 실수 집합이 연속성을 만족하기 때문에 연속함수도 정의역이 실수 집합이어야 한다고 생각할 수 있다. <발췌문 7>, <발췌문 8>, <발췌문 9>는 이 가능성 중 두 번째 경우가 가장 유력하다는 추측을 가능하게 한다. 보다 많은 학생들을 대상으로 연구하면 일반적인 결론을 얻을 수 있을 것이다.

발췌문 7: 연속함수에 관한 면담 2

연구자 : 어떤 함수를 연속함수라고 하는가?

학생 B : 어떤 값을 잡더라도 그 점에서 함수값이 존재하고 극한값이 존재해서 그것이 일치하는 함수..

연구자 : '어떤 값을 잡더라도'에서 어떤 값이라는 것은 뭘 말하나?

학생 B : 어떤 x.. 별 조건이 없으면 실수 x..

발췌문 8: 연속함수에 관한 면담 3

연구자 : 어떤 함수가 연속함수인가?

학생 E : 구간에서 연속인 함수

연구자 : 구간에서 연속이라는 것은 무슨 뜻인가?

학생 E : 구간의 모든 점에서 연속인 것..

연구자 : f_1 이 연속함수인데, 구간은?

학생 E : 아무 말 없으니까 모든 실수..

연구자 : 연속인 함수를 구간에서 연속인 함수라고 했는데.. 구간이 표시되어 있지 않은 경우에는?

학생 E : 실수 전체..

연구자 : 그러면 연속함수는 실수 전체에서 연속인 함수?

학생 E : 실수 전체에서 연속인 함수..

발췌문 9: 연속함수에 관한 면담 4

연구자 : 연속함수라는 것은 어떤 함수인가? 아까 한 점에서의 연속은 함수값이 존재하고 좌우 극한이 존재하며 그들이 일치할 때라고 했는데..

학생 C: 모든 점에서 그렇게 될 때..

연구자 : 모든 점이라고 하면?

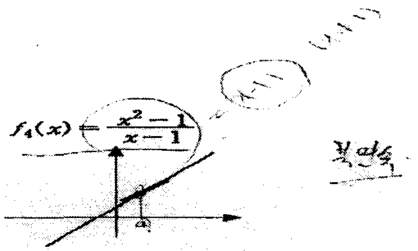
학생 C : 보통 함수라고 하면 실수에서, 수직선에서 정의되므로 실수에서라고 해야 할 것 같아요..

마. 분수함수는 불연속함수이다(유형 5).

현재 학교수학에서 분수방정식을 다룰 때,

주목하는 측면 중 하나는 '무연근'의 존재성이다. 이는 분수함수의 정의역을 구하는 과정에서도 중요하게 고려되어야 할 부분이다. 그러나 학생들은 분수함수의 연속성을 판정할 때 이를 고려하지 못하는 경향이 있었다. 2번 문제에 대한 정답률 분석표(<표Ⅳ-2>)에서도 알 수 있듯이, 95%의 학생들은 분수함수(f_4)가 불연속함수라고 판정하였다. 다음 <발췌문 10>에서 왜 학생들이 이러한 판단을 내렸는지 알 수 있다.

발췌문 10: 분수함수의 연속성 관련 면담 1

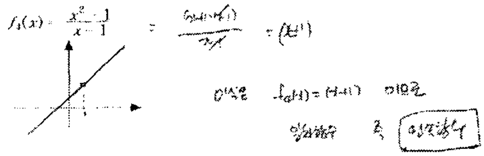


[그림 Ⅳ-6] 유형 5. 학생 B

학생 B : 아무 조건도 없으므로.. 실수 전체에서 생각해서 $x=1$ 에서 불연속이고, 따라서 불연속함수...

학생들은 $x=1$에서 함수값이 없기 때문에 불연속이고, 결국 불연속점이 존재하기 때문에 불연속함수라고 판정하고 있다. 이와 같은 방식으로 생각하면 분수함수는 언제나 불연속함수라고 판정하게 된다. 그러나 공식적인 개념정의에 따라 위 함수는 정의역에 속하는 모든 실수에서 연속이기 때문에 연속함수이다. 수학적인 판단과 매우 상반되는 결론을 얻게 되는 것이다. 학생 D는 이 문제를 맞춘 유일한 학생이었다. 그러나 <발췌문 11>에서 알 수 있듯이 이 학생은 분수함수의 정의역에 대한 바른 추론에 근거한 것이 아니라, 분수함수의 분모와 분자를 부주의하게 약분하는 잘못된 과정에 의하여 정답을 얻은 것으로 볼 수 있다.

발췌문 11: 분수함수의 연속성 관련 면담 2



[그림 Ⅳ-7] 유형 5. 학생 D

학생 D : f_4 는 약분해서 $x+1$ 으로 나타낼 수 있으니까 뚫린 점이 없다고 생각해서..

연구자 : 이 그래프는 f_4 의 그래프가 아닌가?

학생 D : $x=1$ 에서 함수값이 2 인데 왜 뚫렸는지 모르겠어요.

Ⅴ. 맺는 말

이 연구에서는 상위 집단 학생들의 함수의 연속에 대한 이해를 살펴보기 위하여 Tall & Vinner(1981)의 연구를 반복 설계하였으며, 지필검사와 면담을 실시하였다. 연구 결과, 상위 집단 학생들의 함수의 연속에 대한 이해는 Tall & Vinner(1981)의 연구 결과와는 상당한 차이가 있었다. 상위 집단 학생들은 함수의 연속을 용어의 구어적 의미나 시각적인 심상에 의존하여 이해하기보다는 개념정의와 직접 관련지어 파악하는 경향이 있었다. 학생들이 보여준 개념이미지는 대부분 개념정의를 충실하게 적용하는 과정에서 나타났으며, 개념정의의 일부 구성 요소 또는 이전에 학습한 개념의 개념이미지와 관련되는 것을 알 수 있었다. 한편 이 연구에서는 상위 집단 학생들의 함수의 연속에 대한 개념이미지를 5가지 유형으로 분류하였다.

첫 번째 개념이미지는 한 점에서의 연속을 구간의 내점에서만 생각한다는 것이다. 이는 극한값의 존재성이라는 개념정의의 일부 요소에 대한 부적절한 개념이미지로부터 비롯된 것으로 보인다. 결국 이 때문에 구간의 끝점에서는 항상 연속이 아니라는 부적절한 판단을 하게 된다.

두 번째 개념이미지는 진동하는 함수는 언제나 불연속이라는 것이었다. 이것 역시 극한에 관한 부적절한 개념이미지에 기인하는 것으로 볼 수 있다.

세 번째 개념이미지는 Tall & Vinner(1981)의 연구에서 제시된 것으로, 함수의 연속성을 그래프의 연결성으로 대치하는 것을 가리킨다.

네 번째 개념이미지는 모든 실수에서 연속이어야 연속함수라고 보는 것이다.

다섯 번째 개념이미지는 분수함수이면 언제나 불연속함수라고 보는 것이다.

이러한 5가지 개념이미지는 이후의 학습에서 상위 집단 학생들이 부딪힐만한 인지적 갈등 상황이 어떤 것인지 추측하는 데 도움을 줌으로써, 상위 집단 학생들을 대상으로 수업할 때 어떤 점에 유의하는 것이 필요한가에 관한 시사점을 제공한다. 함수의 연속은 이후의 학습 과정에서 매우 중요한 역할을 하는 개념이기 때문에 이러한 부적절한 개념이미지를 적절한 것으로 바꾸어나가고 스스로의 인지적 갈등 요인을 극복할 수 있도록 기회를 제공하는 것이 필요함을 알 수 있다. 상위 집단에 속하지 않은 학생들은 보다 다양한 개념이미지를 가지고 있을 것으로 생각된다. 상위 집단 학생들 역시 다양한 다른 영역에서 여러 가지 특성의 개념이미지를 소유하고 있을 것이다. 그러므로 여러 수준의 학생들을 대상으로 유사 연구가 지속적으로 수행되어 구체적이고 맥락적인 수학 개념 학습 연구 자료가 누적되기를 기대한다.

참고문헌

교육부(1998). **7차 수학과 교육과정**. 서울 : 대한 교과서.

교육부(2001). **고등학교 교육과정 해설(수학)**. 서울 : 대한 교과서.

곽동영 외. (2001). **미적분학**. 서울 : 경문사.

박배훈 외. (2002). **고등학교 수학II 교사용 지도서**. 서울 : (주)법문사.

박선화(1993). 개념학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰. **대한수학교육학회 논문집, 3**(1), 185-194.

________(1998). **수학적 극한 개념에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

박수정(2002). **예비교사와 현직교사의 극한 개념에 관한 교과 내용적 지식과 교수학적 지식**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

우광식(1995). 문제해결을 통한 개념과 절차 지도, **청람수학교육, 5**, 87-102.

우정호(1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울 : 서울대학교출판부.

우정호 외. (2002). **고등학교 수학II 교사용 지도서**. 서울 : (주)대한교과서.

이강섭 외. (2002). **고등학교 수학II 교사용 지도서**. 서울 : (주)지학사.

이남숙(1997). **개념정의와 개념이미지간의 격차 발생 원인에 관한 고찰**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

임석훈 외. (2003). **고등학교 수학II 교사용 지도서**. 서울 : (주)천재교육.

임재훈 외. (2001). **고등학교 수학II 교사용 지도서**. 서울 : (주)두산.

조태근 외. (2002). **고등학교 수학II 교사용 지도서**. 서울 : (주)금성출판사.

조현정(1997). **극한에 관련된 학생들의 수학적 신념에 관한 연구**. 이화여자대학교 대학원

석사학위논문.

최승현(1999). 수학적 오개념 발생에 관한 일고찰-극한 개념을 중심으로-. **교육과정평가연구,** 2(1), 59-73.

최용준 외. (2003). **고등학교 수학II 교사용 지도서**. 서울 : (주)천재교육.

한종희(1997). **고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

Ausubel, D. P. et al. (1986). *Educational psychology* : A cognitive view. Holt, Rinehart & Winston.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit : Some seemingly unavoidable misconception stage. *Journal of mathematical behavior, 5*(3).

Donald, W. K. (1980). *Topology*. Houghton Mifflin Company.

Head, J. (1986). Research into alternative frameworks : Promise & problems. *Research in Science and Technology Education, 4*, 203-211.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1980). Concept image and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of 4th PME.*

Steinbring. H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom, In R. Kapadia. & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education.*,(pp. 135-167). Kluer Academic Publishers.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference on limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

High Achieving Students' Understanding of Continuity of Function

Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)
Shin, Bo Mi (GwangJu Science High School)

This paper provides an analysis of a survey on high achieving students' understanding of continuity of function. The purposes of the survey in this paper were to identify high achieving students' concept images of continuity of function in the way of Tall & Vinner(1981). The students' individual written answers were collected and task-based, semi-structured individual interviews with 5 students were videotaped. Students were asked to explain their understanding or reasoning about continuity of function. Five types of the concept images were identified in the analysis. Obvious discrepancy of results between this study and Tall & Vinner(1981)'s were pointed out. It is very likely that the differences in results drawn in both studies are results of the different orientations of the textbooks in terms of their degree of emphasis on the concept definition of continuity of function.

* **Key words** : continuity of function(함수의 연속), high achieving students' understanding (상위 집단 학생들의 이해), concept images(개념이미지), concept definition (개념정의)

논문접수 : 2004. 12. 28
심사완료 : 2005. 1. 30