大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 15 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XV, No.1, 1-19. Feb 2005

# 구체와 추상을 연결하는 모델의 중재기능 분석

신 은 주* · 이 종 희**

학생들이 수학을 추상적인 교과로 인식하여 학습에 흥미를 잃거나 실세계 문제를 해결하는 능력이 부족하다는 점이 문제시되어 왔다. 이에 본 연구에서는 사례연구 방법으로 학생들이 모델링 활동을 하는 과정에서 개발하는 모델이 구체와 추상을 연결하는 중재 기능을 할 수 있는지를 조사하였다. 연구결과, 학생들이 개발하는 모델은 탈맥락화 된 추상적 실체라기보다는 구체와 추상이 연결된 관계 망인 상황화된 추상의 영역에 위치하고 있었다. 그러므로 이 모델은 구체와 추상을 연결하는 중재기능을 할 수 있고, 학생들의 모델링 경험이 실세계 문제를 해결하는 능력을 향상시킬 수 있다고 볼 수 있다.

## Ⅰ. 서 론

학생들이 수학을 추상적인 교과로 인식하여 학습에 흥미를 잃거나 실세계 문제를 해결하는 능력이 부족하다는 점이 문제시되어 왔다. 여러 연구들(예를 들면, Hierbert & Carpenter, 1992; Jurdak & Shahin, 2001; Lave, 1988; Nunes, Schliemann, & Carrah, 1993; Saxe, 1991)에서는 학생들이 실생활에서 직면하는 문제를 해결하기 위해 학교에서 학습한 수학을 합리적으로 사용하지 못한다는 점을 밝혔다. 그리고 그 원인으로 학교수학은 탈맥락적인 기호 표현에 기초한 추상적인 학습을 강조하여 학생들이 수학을 형식적인 기호조작으로 받아들인다는 점을 지적하였다.

우리나라 학생들을 대상으로 한 연구에서도 이러한 결과가 나타났는데, 학업성취도 국제 비교 평가(PISA 2000)에 나타난 우리나라 학생의 수학적 소양 수준을 분석한 연구(박경미, 최승현, & 노국향, 2002)와 TIMSS 1999 국제성취수준에 따른 우리나라 학생들의 수학 성취도를 분석한 연구(나귀수, 2002)는 실생활과 밀접한 다양한 상황이 수반되는 문항에서 우리나라 학생들의 정답률이 낮음을 밝혔다. 또한 TIMSS 2003 결과를 분석한 박정 등(2004)에 의하면, '수학에서 배운 내용을 일상생활과 연관시킨다'고 응답한 우리나라 학생 비율이 국제 순위에서 최하위였다. 이러한 결과는 학생들이 실생활 문제에 수학을 응용하는 능력이 부족하고 수학을 추상적 교과로 인식한다는 점을 대변해 주고 있다. 본 연구에서는 이러한 결과가 나온 원인을 학교수학에서 학생들이 탈맥락화된 과제를 해결하는데 익숙해 왔기 때문으로 고려하였다. 이러한 문제의식을 가지고 학생들이 구체와 추상을 연결하여 실생활 문제해결 능력을

* 이화여대 대학원, eunjushin@dreamwiz.com
** 이화여대, jonghee@ewha.ac.kr

향상시킬 교수·학습 방법을 고려하게 되었다.

실제에서 추상으로 선형적인 위계가 존재한다고 볼 때, 추상화는 실제적인 세계에서 이탈하여 형식적인 세계로 향하는 탈맥락화 과정이 된다. 이 때, 구체는 맥락에 결합된 것이고 추상은 탈맥락화된 것으로 간주된다. 또한 수학활동과 구체적이고 경험적인 활동이 분리된 것으로 고려되어 수학적 사고는 추상적인 것인 반면, 경험적 사고는 구체적인 것으로 위계가 존재하게 된다. 그러나 추상화란 상황 내에서 구조와 관계를 객관화하는 과정으로서 구체에서 분리되는 과정이 아니다(Noss & Hoyles, 1996). 이러한 시각에서 Noss와 Hoyles는 상황에서의 단절이 아니라 상황과의 연결성을 강조하여 상황의 근방에 추상이 위치하고 있음을 밝혔다. 그리고 상황에서 발생하여 상황의 근방에 위치한 추상을 '상황화된 추상(situated abstraction)'이라고 설명하였다. 그들은 은행의 재정 상황을 단순화 한 모델을 LOGO로 만들어서 LOGO 환경에서 학생들이 상황화된 추상을 경험함으로써 수학적 아이디어와 은행에서 이루어지는 수행을 연결할 수 있음을 밝혔다 (Noss & Hoyles, 1996, p. 122-125). 같은 관점에서 Noss, Hoyles와 Pozzi(2002)는 농도라는 수학적 지식이 간호사의 수행 내에서 질량과 부피 사이의 공변 관계를 표현하는 양으로서 추상화 될 수 있다는 점을 밝혔다. 이 때, 간호사에게 있어서 농도는 추상적인 수학지식이 아니라 일상 수행에서 경험하는 상황화된 추상이 된다고 설명하였다.

선행연구들은 상황화된 추상은 수학과 일상수행 사이의 연결성을 고려하여 도입한 개념으로서, 학생들이 LOGO 환경이나 일상수행에서 상황화된 추상을 경험함으로써 학교수학과 일상수행에서 이루어지는 수학을 연결할 수 있다는 점을 제안하였다. 이 점에 착안하여 본 연구에서는 학생들이 구체와 추상을 연결하여 실생활 문제해결 능력을 향상시킬 교수·학습 방법으로 모델링 활동을 고려하게 되었다. 학생들이 개발하는 모델이 탈맥락화된 추상이 아니라 상황의 근방에 위치한 상황화된 추상이 될 수 있다면, 이 모델은 구체와 추상을 연결하는 중재 기능을 할 수 있을 것이라는 관점을 가지고 연구를 행하였다. 본 논문에서는 모델링에 관한 선행연구(신은주, 이종희, 2004)에서 밝힌 바와 같이 상황을 구조화하면서 자신의 비형식적인 상황모델을 개발한 후에, 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동을 조직하면서 수학모델을 개발하고, 그 후에 수학모델을 상황에 비춰 해석하여 수정하고 정교화하여 일반화 가능한 체계인 모델을 개발하는 과정을 모델링 활동으로 본다. 사례연구에 앞서 연구문제를 분석하는데 이론적 기반이 될 수 있는 문헌연구를 하였다. 상황화된 추상과 실제화된 추상, 구체적 활동과 추상적 활동의 통합에서 구현되는 실제적인 사고, 실세계와 수학의 세계 사이의 상호작용에 관하여 논의하고자 한다.

## II. 구체와 추상의 연결성

### 1. 상황화된 추상과 실제화된 추상

구체에서 추상으로 선형적인 위계가 존재한다고 보는 전통적인 관점에서 추상화는 한 세계에서 다른 세계로 의미를 사영하는 과정으로서, 실제적인 세계를 참조하는 것에서 이탈하여 형식적인 세계로 향하는 탈맥락화 과정이 된다(Noss & Hoyles, 1996). 인지심리학자들은 추상화를 탈맥락화 과정으로 간주하였으므로 추상화 과정에서 한 수준에 있는 대상이 더 높은 수준에 있는 대상으로 위계적으로 발달한다

고 설명하였다. 인지심리학자들은 추상화 과정에 영향을 주는 맥락을 외적인 요인으로 고려하였으므로 비평받아왔다. 수학적 사고는 사회적 맥락에서 그 근원과 분리될 수 없고, 구체와 추상은 분리된 실체가 아니라 추상화 과정에서 연결되기 때문이다(Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001). 추상화를 탈맥락화 된 과정으로 보는 관점에 대하여 제기된 위와 같은 비판은 탈맥락화 된 표현을 의미 없는 구조로 보는 Goldin(2002)의 관점과 같은 맥락에서 논의될 수 있다. Goldin에 의하면, 탈맥락화 된 표현은 맥락에서 벗어나 수학을 추상화하자는 의도에서 만들어진 것으로 의미와 연결되지 않는 형식적인 체계이다. 따라서 탈맥락화 된 표현이란 의미 없는 구조로서, 형식적인 수학표기와 절차나 규칙 또는 맥락이 없는 규칙과 방법을 말한다. 그러나 추상화는 맥락과 의미론적으로 연결을 맺으면서 새로운 체계로 구조적으로 발달하는 과정이다. 맥락에 있는 추상은 형식적이고 추상적인 수학의 반대가 아니고 추상화와 맥락화는 상호 보완적인 표현 과정이 된다(Goldin, 2002).

이 밖에도 여러 연구자들에 의해 추상화를 탈맥락화된 과정으로 보는 관점에 대한 비판이 제기되었다. Greeno(1997)는 환경의 역할을 무시하고 정신활동으로만 추상화를 고려하는 시각을 비판하였고, Hershkowitz, Schwarz와 Dreyfus(2001)는 추상화를 도구와의 상호작용이나 사회적 상호작용을 무시하는 정신활동으로 고려하거나 추상을 참조에서 분리된 것으로 간주하는 관점을 비판하였다. Hoyles, Noss와 Pozzi(1999)에 의하면, 구체와 추상은 동전의 양면으로서, 추상화는 탈맥락화를 의미하는 것이 아니라 구조화되지 않은 지식 망에서 시작하여 연결되고 구조화 된 지식 망으로 발달하는 과정이다. 또한 van Oers(1998)는 탈맥락화는 사고와 학습의 유의미한 과정을 설명하지 못하므로 탈맥락화 보다는 새로운 방법으로 어떤 것을 맥락화 하는 능력인 재맥락화로 전이를 설명해야 한다고 제안하였다.

추상화에 대한 이상의 논의는 Noss와 Hoyles (1996)의 추상화에 대한 견해를 검토해보면 구체화 될 수 있다. Noss와 Hoyles에 의하면, 추상화란 한 의미가 다른 것을 대치하는 것이 아니라 서로 연결되면서 상황 내에서 구조와 관계를 객관화하는 과정이다. 추상화에 대한 이러한 관점을 가지고 '상황화된 추상'이라는 용어를 도입하였다. 상황화된 추상은 상황에서 이탈하는 것이 아니라 상황에서 발생하여 발달하며 활동의 자원이 되는 것이고, 그 자체가 과정일 뿐 아니라 대상으로 고려된다(Noss & Hoyles, 1996). 과정과 대상의 양면성을 가지고 있다고 논의한 점에 미루어 볼 때, 대상으로서는 상황화된 추상, 즉 추상화 과정에서 만들어진 산물을 탈맥락화 된 것이 아니라 그 자체가 상황이 되는 상황화된 추상으로 고려한 것이다. 과정으로서는 상황적 추상화, 즉, 구체에서 추상으로 가기 위하여 상황에서 이탈하는 것이 아니라 상황의 의미를 보존하면서 상황의 근방을 넓히는 과정을 상황적 추상화의 과정으로 고려한 것이다. Noss와 Hoyles는 같은 개념도 개인에 따라 구체적이거나 추상적일 수 있으므로 지식을 구성하는 거시수준과 미시수준을 통합하기 위한 설명적 장치로서 상황화된 추상을 도입하였음을 밝혔다. 또한 상황화된 추상을 사용하여 지식 망이 적용되는 상황의 근방을 넓힘으로써 탈맥락화 된 수학적 지식과 상황화된 수학적 지식은 이분되지 않고 통합될 수 있다고 설명하였다.

상황화된 추상에 대한 이들의 논점은 Pratt과 Noss(2002)의 논의에서도 살펴볼 수 있다. 상황화된 추상은 물리적·정신적으로 독립된

체계 내에서가 아니라 상황과의 연결성을 강조하여 상황에서 발생한 추상이다. 따라서 상황에서의 단절이 아니라 상황의 근방 에 상황화된 추상이 위치하게 된다. 상황의 근방이란 탈맥락화는 학생들의 학습 궤도를 이해하는데 있어서 유용하지 않은 관점이므로 상황에서 단절이 아니라 상황을 넓혀야 한다는 점을 함의한다. 상황화된 추상이 발생되기 위한 조건을 확인하고자 할 때, 상황의 근방이 가진 특징을 인식하는 것이 도움이 된다. Noss와 Hoyles가 설명한 상황화된 추상에서는 개념 사이의 연결, 개념들의 관계, 개념이 추상될 수 있는 대상이 중요시 된다. 결과적으로 상황화된 추상은 학습을 사회 문화적 맥락에서 해석하는 것을 가능하게 할 뿐 아니라 인지발달을 설명할 수 있는 틀을 제공한다(Pratt & Noss, 2002). 상황화된 추상이 함의하는 바를 모델링 활동과 결부시켜 볼 때, 구체와 추상이 연결된 관계망을 형성하면서 개발된 모델은 구체에서 추상으로의 근방을 확장하여 발생한 상황화된 추상의 영역에 위치한다고 보아야 할 것이다. 그러므로 상황화된 추상에 위치한 모델은 구체와 추상을 연결하는 중재기능을 할 수 있을 것이다.

Noss와 Hoyles가 도입한 '상황화된 추상'은 사회 문화적 맥락에서 추상을 고려한 Skovsmose (1994)의 '실제화된 추상(realized abstraction)'과 같은 맥락에서 해석할 수 있다. Skovsmose는 '사고하는 추상(thinking abstraction)'과 '실제화된 추상'을 구분하여 설명하였다. 사고하는 추상은 추론을 촉진하기 위해 사용하는 사고방식으로서 수학적 모델링에 의해서 발생할 수 있다. 예를 들어, 지구모델이나 지구표면의 성질에서 추상하여 우주선의 발사를 위한 가능한 우주선 궤도를 계산할 때, 실제적인 실험 대신 상황을 가설적으로 다루는 사고실험을 하게 된다. 그러므로 사고하는 추상은 정신모델이나 이미지로서 존재하게 된다. 또한 태양의 혹성과 위치에 대한 프톨레미의 해석은 실체를 보는 방법을 창조하는 해석된 수학적 모델로서 사고하는 추상에 속한다. 반면, 실제화된 추상은 사고하는 추상과 다른 본체론적 위치를 가진다. 사고하는 추상이 실체의 이미지인 반면, 실제화된 추상이 사고하는 추상의 이미지가 될 수 있다. 사고하는 추상을 사회 문화적 맥락에서 실체의 부분으로 고려하여 변형함으로써 실제화된 추상이 발생하는 것이다. 수학적 모델링으로부터 실제화된 추상이 나올 수 있다. 예를 들어, 세금을 계산하는 방식은 사고하는 추상에서 나온 사고모델일 뿐만이 아니라 사회 문화적 맥락에서 이 모델을 사용할 때 삶에 영향을 미치게 되는 실제화된 추상모델이 된다. 국민총생산을 계산하는 모델도 사회 문화적 맥락에서 사용될 때는 어떤 변수의 특수한 값에 기초한 수학적 계산을 하는 것과는 다른 본체론적 상태에 있게 된다. 정치 경제적 토론에서 사용되는 독립적인 대상이 되며 실제적인 외형으로서 위치를 가지게 되는 실제화 된 모델이 된다(Skovsmose, 1994, p. 50-52). 결과적으로, 사회 문화적 맥락에서 실제적인 삶과의 연결성을 고려하여 사용되는 과정에서 사고하는 추상이 실제가 된 것이 실제화된 추상이다. 실제화된 추상이나 상황화된 추상은 모두 탈맥락화된 추상이라기보다 사회적 맥락에서 활동함으로써 발생하며 활동의 자원이 되는 것이다. 또한 추상화와 실제화를 상호보완적인 과정으로 고려할 때, 실제화된 추상이나 상황화된 추상을 설명할 수 있다.

이 같은 시각에서 Nunes, Schliemann과 Carraher(1993)의 진술을 검토해 보면, 그들은 세금을 계산하는 방법이나 이자율 계산 방법 등은 사회적 협상을 거치고 사회적 상황의 사회적, 논리적, 경험적 제약을 고려하여 만들어지는

수학모델이라고 정의하였다. 이 모델이 삶에 미치는 영향을 이해할 수 있을 때 수학모델은 사회에 존재하는 규칙의 일부분으로 고려될 수 있다고 설명하였다. 이 관점은 세금을 계산하는 방식이나 국민총생산을 계산하는 모델이 사고하는 추상에서 나온 모델일 뿐만이 아니라 사회에서 사용되면서 우리의 삶에 영향을 미치게 되는 실제화된 추상이라는 Skovesmose의 시각과 일맥상통한다고 볼 수 있다.

모델링 활동에서 개발한 모델이 사고하는 추상에서 개발된 모델임과 동시에 사회에서 사용하면서 실제화된 추상모델이라고 보는 견해는 모델링 활동을 구체와 추상의 양극을 세우지 않고 이해해야 한다고 설명한 Noss와 Hoyles의 주장과 일관된다. 이 같은 견해는 모델링에서 탈맥락화보다는 모델과 모델화된 실제 사이에 상호작용이 있고, 실제에서 상황적 추상화를 거치면서 개발된 모델이 다시 실제화된 모델이 되는 순환적 과정이 이루어진다는 점을 인정하고 있는 것이다. 또한 구체적 활동과 추상적 활동이 서로를 위한 자원이 되면서 상호작용하는 가운데 모델의 구성적 의미가 형성된다는 점을 중요시 한 것이다. 이 때, 모델링 활동에서 이루어지는 추상화는 상승단계가 아닌 의미론적으로 연결성이 맺어지는 과정이 된다. 따라서 상황적 추상화에서 개발된 모델은 상황적 의미를 잃는 것이 아니라 구체적인 상황에서 다시 사용되면서 상황적 의미를 수반한 실제화된 모델이 되는 것이다.

### 2. 구체적 활동과 추상적 활동의 통합에서 구현되는 실제적인 사고

상황 인지론자들의 연구에서 구체적 활동과 추상적 활동의 연결성이 설명되고 있다. Lave (1988)의 견해를 검토해 보면 구체적 활동과 추상적 활동의 상호작용이 이루어지는 과정을 이해할 수 있다. Lave에 따르면, 슈퍼마켓에서 물건을 사는 사람은 활동과정에서 자신의 문제풀이 과정을 구성하고 구조화한다. Lave는 산술 활동이 일어나는 환경과 산술활동과의 관계, 정신적 활동과 물리적 활동의 상호의존성을 밝혔다. 물건을 사는 사람의 산술문제해결은 활동이 이루어지는 환경에서 문제를 제기한 후에 활동을 구조화하면서 계산과 같은 행동을 조직하게 된다. 슈퍼마켓에서 구매자는 문제를 변형하기 위해 직접 어떤 자원을 사용할 수 있고 최적의 구매전략을 위해 스스로 자원을 구조화한다. 최적의 구매를 위한 조절이 부과되지 않는 것은 학교수학과 대조적인 점으로서, 학교수학에서는 이미 제한된 전략과 자원을 사용하여 수학을 학습하게 된다. 또한 학교수학에서 문제를 상황에 독립적인 변수로 고려할 때, 문제해결은 상황과 분리된 정신활동으로 특징 지워진다. 그러나 문제해결은 문제해결자가 환경에서 문제를 만들고 문제를 변형해 나가는 과정으로서 정신적 활동과 물리적 활동이 상호의존한다(Lave, 1988, 1993).

Lave의 견해에서 알 수 있듯이, 인지란 상황에서 구현되는 것이므로 문제해결과정 동안에 정신적 활동과 물리적 활동이 상호의존적으로 작용하게 된다. 이 같은 견해는 '실제적인 사고(practical thought)'를 '활동에서 정신'으로 정의한 Scribner(1986)의 견해와 같은 맥락에서 이해될 수 있다. Scribner에 따르면, 실제적인 사고란 유목적적인 활동에서 구현된 사고로서 활동 목표를 성취하기 위한 기능을 하는 사고이며, 다음과 같은 몇 가지 특징이 있다. 첫째, 유능한 실제적인 사고는 문제를 형식화하는 과정을 수반한다. 형식적인 문제해결에서는 문제가 주어지고 해에 이르는 단계를 선택하여 문제를 해결하게 된다. 대조적으로 실제적인 문제해결

에서는 경험에 기반을 두어 문제를 재 정의하고 재 형식화하는 과정이 필요하다. 실제적인 사고에서 문제의 재 형식화 과정은 Lave가 문제와 해가 변증법적으로 구성된다고 본 것과 일관된다. 둘째, 유능한 실제적인 사고는 해결의 유연성에 의해 특징 지워진다. 실제적인 사고에서 과제의 지적 요구를 만족시키는 것은 알고리즘을 효율적으로 수행하는 과정이 아니라 문제와 환경의 성질에 부합되는 해결방식을 개발하는 과정이다. 셋째, 유능한 실제적인 사고는 사람, 사물, 정보와 같은 과제환경을 문제해결 체계에 통합하게 돕는다. 이 때, 환경과 과제의 연결, 내적 표상과 조작과 외적 실체 사이의 계속적인 상호작용이 일어난다. 또한 정신활동을 위한 도구나 보조물 같은 대상의 제약과 능력을 반성하며 문제 환경을 탐구할 수 있다. 넷째, 유능한 실제적인 사고는 고차원적 해결전략을 위해 노력하는 것을 필요로 한다. 따라서 환경과 조건을 고려하여 가장 경제적이면서 최소한의 노력을 필요로 하는 해결방식을 추구하게 된다. 다섯째, 유능한 실제적인 사고는 환경에 특수한 지식에 의존한다. 문제해결이 구현되는 활동에 기능적으로 중요한 특수한 지식을 사용하게 된다. 형식적인 문제해결과는 달리 실제적인 문제해결은 문제구조나 정신구조에 의해서만 이해될 수 없고, 문제해결자의 목표, 관심, 환경에서 고려되는 대상과 정보를 포함하고 있다.

상황에서 구현된 인지나 실제적인 사고에 대한 이들의 진술을 모델링 활동과 결부시켜 볼 때 다음과 같은 점을 도출할 수 있다. 모델링 활동에서는 과제의 배경이 되는 학생들에게 경험적으로 실제적인 상황인 실세계 맥락에 내재된 여러 가지 변인들을 구조화하고 단순화하기 위하여 학습자가 맥락을 재조직하는 과정이 필요하다. 또한 활동과제의 맥락을 탐구하면서 활동목표와 맥락에 내재된 조건을 고려하고 이에 부합되는 해결방식을 찾게 된다. 그 밖에도 수단으로서 활용하게 되는 도구가 가질 수 있는 제약과 가능성을 발견하면서 도구를 효율적으로 활용하는 것이 필요하다. 또한 자신의 경험이나 활동목표, 사회문화적 맥락을 고려하여 활동을 하는 것이 필요하다. 이는 곧, 모델링 활동에서 상황에서 구현된 인지를 설명할 수 있고, 모델링 활동에서 실제적인 사고를 할 수 있음을 함의하고 있다.

이상의 논의에서 알 수 있듯이, 활동에서 구현되는 실제적인 사고는 수학활동과 실제적인 활동의 이분법을 초월하게 한다. 그 때, 수학활동을 정신적인 활동으로만 보지 않고 실제적인 활동에서 구현되는 사고를 수반하는 활동으로 볼 수 있다. 실제적인 사고를 활동에서 정신으로 정의할 때, 실제적이라는 개념에는 물리적 세계와 정신적 세계가 통합된 의미가 함축되어 있을을 알 수 있다. 그러므로 실제적인 사고는 구체적이고 지각적인 활동에서 구현되는 사고이며 구체적 활동과 추상적 활동이 통합될 때 구성될 수 있는 인지라고 할 수 있다. 따라서 수행활동에서 인지를 고려할 때 실제적인 활동과 수학활동은 이분되지 않으며 위계적 관계가 전제되지도 않는다.

Noss와 Hoyles(1996)에 의하면, 지식은 상호연관된 활동과정에서 구성되는 것이므로 추상화는 상승단계가 아니라 연결되지 못한 수학적인 지식들, 이론이나 경험들이 상호연결되는 과정이다. 그러므로 한 단계에서 위로 상승하는 과정이 아니라 실제적인 것과 이론적인 것 사이에서 변증법적 관계를 세우는 과정이 모델링이다. 모델링은 탈맥락화 과정도 아니고 구체와 추상의 양극을 세우는 과정도 아니다. 오히려, 모델과 모델화된 세계 사이에서 밀접한 상호작용이 이루어지면서 다른 특수성 내에서

일반성을 인식하는 과정이다. 그 때, 구체적 활동과 추상적 활동 사이에서 상호작용이 이루어지면서 수학적 의미가 재형성되는 방법을 이해할 수 있다. 또한 정신세계와 물리적 세계 사이의 상호작용에서 경험이 발달하고 그러한 경험으로부터 수학적 의미가 만들어지게 된다 (Noss & Hoyles, 1996).

상황화된 인지, 실제적 사고, 정신세계와 물리적 세계의 상호작용은 맥락에서 행하는 활동에서 시작하는 모델링 과정은 실세계에서 행하는 구체적 활동과 수학적 세계에서 행하는 추상적 활동이 상호작용 하면서 구체와 추상의 양면을 통합적으로 가지고 있는 모델을 개발하는 활동이라는 점을 시사하고 있다.

### 3. 실세계와 수학의 세계 사이의 상호작용

Hierbert와 Carpenter(1992)에 따르면, 학생들이 일상생활과 학교라는 서로 다른 두 환경에서 각각 제한적이며 특수한 경험을 하면서 수학을 학습하기 때문에 거리수학에서의 수행과 학교수학에서의 수행에서 차이가 발생하게 된다. 학교 안과 학교 밖이라는 두 환경 사이에서 구성되는 수학이 단절되지 않고 관계 망이 형성되어 학생들이 두 환경에서 구성되는 수학의 연결성을 인식하게 도와야 한다. 또한 학생들에게 문제 상황을 추상적이고 형식적인 기호로만 제시하지 말아야 한다. 과제가 기호로만 제시되어 다른 외적인 표현들과 연결성이 이루어지지 않을 때는 서로 다른 두 환경에 내재한 다른 정보를 연결하지 못하거나 관계 망을 형성하지 못하게 된다(Hierbert & Carpenter, 1992). 실제적인 상황에서 수학을 학습할 때 학생들은 상황적 의미를 보존하면서 수학적 아이디어와 절차를 개념화 할 수 있다. 이러한 점은 실제적인 맥락에서 시작하는 모델링 활동에서 실세계와 수학의 세계 사이의 연결된 관계 망이 형성됨으로써 학생들이 두 환경에서 관계적 구조를 발견하는 것을 촉진할 수 있다는 점을 시사하고 있다.

서로 다른 환경에서 구성한 표현들을 연결하는 능력의 중요성은 Nunes, Schliemann과 Carraher(1993)에 의해 지지되었다. 그들은 일상생활에서의 구어적인 해결 방식과 학교에서의 문어적인 해결 방식의 차이점을 다음과 같이 설명하였다. 첫째, 계산 활동을 구조화하는 방식에서 차이가 있다. 둘째, 구어적인 방식에서는 문제의 의미를 계속 염두에 두고 해결하고, 문어적인 방식에서는 문제의 의미를 종종 잊어버린다. 셋째, 문어적인 방식은 알고리즘 이행, 규칙 이해, 구문론적인 지식을 강조하여 기호의 의미를 이해하는 과정이 수반되지 않는다. 반면, 구어적인 방식에서는 양에 대한 이해와 의미론적 이해에 초점을 두어 기호의 의미를 이해할 수 있다. 즉, 학교학습은 구체적인 상황에서 분리된 기호를 표현하는 과정을 중요시하여 추상적이고 일반화 가능한 학습에 초점을 두는 반면, 맥락에서 이루어지는 학습은 상황을 직접적으로 표현하는 학습을 중요시한다. Nunes, Schliemann과 Carraher에 의하면, 수학 문제해결에서 두 가지 유형의 표현-문제 상황의 표현, 수학적 관계의 표현-이 사용되는데, 좋은 문제해결자는 두 가지 표현을 연결하여 문제에서 수학적 관계를 구조화할 수 있다. 학교수학에서 표현된 수학적 관계는 문제 상황과 연결되지 않아 학생들은 계산을 한 후에 답의 의미를 해석하는데 어려움을 가진다. 반면, 구어적인 표현은 문제 상황의 의미에서 수학적 관계로의 발달을 돕는다. 그러므로 상황적 정보와 수학적 관계가 모델에 상호 연결되어 조직되어 있으면 다른 상황에 적용할 수 있는 더 일반적인 수학적 모델을 만드는 것이 가능하다.

이상의 논의점을 모델링 활동과 결부시켜 볼 때, 다음과 같은 시사점을 유도할 수 있다. 모델링 활동에서 학생들은 상황을 이해하고, 상황의 의미를 보존하며 추상화와 일반화 과정을 거치면서 모델을 개발하게 된다. 이 때, 상황에서 관계적 구조를 인식하여 개발된 수학모델에는 상황의 실제성이 내재되어 있을 것이다. 또한 수학모델을 상황에 적용하고 해석하여 여러 번의 모델링 사이클을 순환하면서 일반화 가능한 모델을 개발하게 되므로 수학모델을 실제적인 상황에 적용할 수 있다.

이상의 연구들에서 밝힌 실세계와 학교수학의 연결성의 교육적 중요성은 일상수행을 고려할 때 수학문제해결 능력이 발달할 수 있다는 점을 밝힌 Säljö와 Wyndhamn(1993)의 시각과 같은 맥락에서 이해할 수 있다. 그들은 학교와 같은 활동 체계 내에서 문제해결의 구체적인 조건이 문제해결 방법을 결정한다는 점을 밝혔다. 우편요금 표를 보고 편지를 부치기 위한 옳은 요금을 찾는 활동에서 학생들이 편지무게와 우편요금의 일차관계가 어떤 상황에서는 적절하지 않다는 일상수행에 기반을 둔 규칙을 배경지식으로 할 때, 무게와 요금을 나타내는 표를 해석하여 문제를 해결할 수 있었다. 이 때, 학생들은 엄격한 양적 관계 즉, 어떤 환경에서 알고리즘을 수행할 때는 일차관계가 적절하지 않다는 점을 인식하였다. 즉, 실용적인 고려를 할 필요성을 인식하는 것이다. 연구자들은 실세계에 대한 지식과 일상생활의 관습을 인식하는 것이 수학적 문제해결을 돕는다는 점을 제안하였다. 또한 과제의 의미는 과제를 수행하는 활동이나 활동에 대한 전제가 무엇인지에 대한 학생들의 가정과도 독립적으로 정의할 수 없다는 결론을 유도하였다.

선행연구들에서 제안한 바와 같이, 학생들이 실세계에 대한 이해가 배제된 추상적 활동으로만 수학을 학습할 때, 그들은 수학적 의미를 이해하는 과정에는 실용적이고 구체적인 고려를 할 필요가 없는 것으로 간주하게 된다. 수학의 세계와 실세계의 연결성을 조직할 수 있는 모델링 활동을 할 때, 학생들은 구체적 활동과 추상적 활동의 분리 불가능성을 인식할 수 있을 것이다. 이 때, 수학적 사고와 경험에서의 사고를 연결하면서 활동에서 구체화 된 사고를 기반으로 하여 수학적 개념을 이해할 수 있을 것이다. 또한 수학모델을 일상 수행에서 사용하면서 사회 문화적 맥락에서 실제의 부분으로서 고려할 수 있을 것이다. 결과적으로, 실제적인 활동과정에서 구체화 된 사고, 자신이 개발한 모델의 사회적 · 실제적인 사용에 대한 고려, 모델링 활동 맥락에 대한 실제적인 고려, 실세계와 수학의 세계에서 활동 체계 사이의 관계에 대한 고려가 모델의 발달에 영향을 줄 것으로 파악된다.

## III. 연구방법과 사례연구 분석 및 논의

### 1. 연구방법 및 절차

본 연구자는 세 명의 학생들을 대상으로 하여 모델링 활동 과정에서 인지적 행동과 메타인지적 행동을 심도 있게 관찰하여 연구목적에 부합하는 자료를 수집하고, 이 자료를 근간으로 하여 연구문제를 분석하고자 질적 사례연구 방법을 이용하였다. 자료수집으로 관찰, 관찰기간 동안에 이루어진 과제기반 면담, 연구대상자의 노트를 이용하였다. 본 연구는 2004년 1월 중순에 2차시에 걸쳐 시행한 연구로서, 한 차시는 2-3시간 정도가 소요되었다. 사례연구를 할 목적이었으므로 중학교 2학년 학생 세 명을

표본으로 하였다. 관찰로부터 얻어지는 데이터를 수집하기 위하여 현장 노트, 비디오, 녹음기를 적절하게 사용하였다. 분석 초기 단계의 추측을 전체 자료와 계속적으로 비교하고 대조하는 형태를 취하는 연속적 비교법(constant comparative method)을 사용하여 분석하였다. 모델링 활동에서 본 연구자는 참여관찰을 하면서 관찰자로서 객관성과 중립성을 유지하고자 노력하였다.

## 2. 연구도구

본 연구를 위해서 연구자가 고안한 다음과 같은 활동과제를 학생들에게 제시하였다. 미끄럼틀의 물리적 모델로서 사용할 마분지로 만든 길이 20cm의 딱딱하고 미끄러운 판을 활동을 시작하기 전에 학생들에게 제시하였다.

> 모델링 활동 과제:
> 놀이공원에 미끄럼틀을 설치하는데 미끄럼틀의 수평 부분의 길이를 조정할 필요가 있습니다. 수평 부분의 길이가 너무 길면 미끄러진 후에 수평 부분의 중간에서 멈추게 되고, 너무 짧으면 미끄러진 후 수평부분을 이동하는 동안 느낄 수 있는 쾌감이 줄어들 수 있습니다. 미끄럼틀을 설치할 때, 수평 부분의 길이를 조정하기 위해 어떤 요인을 고려해야 하는지를 설명하고, 이 요인과 미끄러진 후 이동한 수평이동거리와의 관계를 추론하여 관계그래프를 그리시오.

## 3. 사례연구 분석과 논의

### 가. 사례연구 분석

#### 1) 실세계 탐구(구체의 세계 안에서의 활동)

구체의 세계에서 학생들은 경험을 기반으로 하여 미끄럼틀에서 미끄러진 후에 멈출 때까지 이동한 수평이동거리에 영향을 주는 여러 가지 요인을 발견하고, 변화하는 양들 사이의 관계를 추론하는 활동을 한다. 다음은 연구자와 학생들이 이 과정에서 나눈 대화이다.

> 연구자: 미끄럼틀에서 미끄러질 때 이동해서 멈추는 수평거리가 무엇에 따라 변할까?
> 학생A: 음. 무거우면 멀리가요.
> 학생C: 기울기요(손으로 경사진 면을 만들면서)
> 연구자: 그렇지. 경사도를 낮게 하거나 높게 하거나 하면 변화가 생기지. 그럼 이 판(마분지로 만든 딱딱하고 미끄러운 판)을 가지고 무게와 경사도에 따라 물체가 이동한 수평거리를 실험해 보자.

실세계 환경에서 경사도가 있는 미끄럼틀에서 미끄러지는 상황에 대한 이해를 기반으로 하여 학생A는 무게가, 학생C는 경사도가 물체가 멈출 때까지 이동한 수평거리에 영향을 줄 것이라는 예측을 하였다. 따라서 학생들은 물체의 무게, 경사도, 거리를 조작할 변화하는 양으로 결정하였다. 이 때, 학생들에게 있어서 변화하는 양은 활동에서 경험하는 구체적이고 실제적인 대상이 되는 것이다. 그 후에 학생들은 미끄럼틀을 모델화 한 물리적 도구인 판을 기울여보면서 볼펜을 굴려보는 지각적인 활동을 하였다. 학생들은 실제적인 경험에 비춰 현상을 이해하고 있으므로 구체의 세계 안에서 활동하고 있는 것이다.

#### 2) 상황모델 개발 과정(상황화된 추상의 세계에서 하는 활동)

상황화된 추상의 세계에서 학생들은 다양한 변화하는 양들을 측정한 데이터와 변화관계 패턴을 개발하는 활동을 한다. 다음은 측정 활동에서 이루어진 학생들 간의 대화이다.

> 학생A: 요기서 이렇게 떨어지는 거 하자(판을 책상의 한 모퉁이에 놓고 손으로 고정

시킨다)

학생B: 각도는 어떻게?(어느 위치에 각도기를 놓고 각도를 측정할지를 고려한다)

(학생C가 각도기를 가지고 경사면의 각도를 변화시키고, 학생A는 동전을 굴리고, 학생B는 동전이 이동한 거리를 측정한다.)

학생C: 몇 도씩 할까? 학생B: 마음대로 해.

학생A: 15도씩 하자(15도, 30도, 45도 일 때 거리를 기록하고 다시 한번 실험을 해 본다.

학생A: 어 조금씩 다르네.

학생C: 다시 하자.

(두 번째 실험은 첫 번째 실험과 조금 오차가 생기자 한 각도에서 동전을 몇 번 굴려보아 빈도가 가장 높은 측정값을 거리로 결정한다. 여러 번 측정 한 결과의 평균을 구하지 않고 여러 번 측정 한 값 중에서 가장 빈도가 높은 값을 결정한다)

연구자: 경사도의 변화에 따라 이동하는 거리는 어떻게 변화하니?

학생A: (기록한 데이터를 보면서)점점 조금씩 요.

학생C: 조금씩 증가해요.

학생들은 두꺼운 판, 동전과 각도기를 도구로 하여 책상모퉁이에 판을 고정시키고 경사각을 변화시키면서 동전을 굴리면서 수평이동거리를 측정하였다. 서로 토론하면서 각도를 잴 위치와 경사각을 15도 씩 변화시키기로 결정하였다. 거리를 측정할 때 발생한 오차를 해결하기 위해 여러 번 실험을 하여 가장 빈도가 높은 값을 수평이동거리로 결정하였다. 학생들은 측정한 수평이동거리의 변화는 경사도가 커질수록 점점 조금씩 증가한다는 것을 인식하였다. 경사각과 이동거리를 측정한 데이터는 단순한 기록이기보다는 변화 관계를 예측하기 위한 사고도구가 되었다. 측정데이터라는 상황모델은 구체의 세계 안에서 경험하는 변화하는 양임과 동시에 상황화된 추상의 세계 안에서 경험하게 될 두 변수의 관계패턴을 합의하고 있는 것이다. 결국, 상황모델은 상황화된 추상의 세계 안에 내재되어 있는 것이다. 다음은 다른 변화하는 양인 질량과 수평이동거리, 경사판의 높이와 수평이동거리의 변화관계를 발견하기 위해 측정 활동을 하는 동안 이루어진 대화이다.

연구자: 그렇지. 그럼 또 어떤 실험을 할 수 있을까?

학생A: 질량하고 거리요.(이번에는 백 원짜리 동전으로 실험을 하여 거리를 기록한다. 오백 원짜리 동전에서 얻은 데이터와 비교해 보면서 의문을 제기한다)

학생A: 비슷한 것도 있고 차이가 있는 것도 있고요.

학생B: 거리를 잘못했나?

학생A: 다시 하자.

연구자: 어떻게 하면 정확한 실험결과를 얻을 수 있을까?

학생C: (두 개의 동전을 판에 동시에 같은 위치에 올려놓는다)

연구자: 그렇지. 그럼 처음 위치가 같은 것이고 경사각도 두 경우 같은 것이고

(학생들은 실험을 하고 거리를 기록한다. 여러 번 굴려보면서 실험을 반복한다)

연구자: 어떻게 변화하니?

학생C: 거의 똑같아요.

연구자: 그러면 이번에는 각에 따라서 또 무엇이 변화할 수 있을까?

학생C: (판의 각을 변화시켜보면서) 높이요.

연구자: 각도하고 거리의 변화 말고 또 뭐와 뭐의 관계가 나올 수 있을까?

학생A: 높이하고 거리요.

연구자: 어떻게 변할 것 같니?

학생A: 높아지면 거리가 증가해요.

(경사판의 높이를 일정하게 증가시키면서 실험을 하여 거리도 일정하게 증가하는 패턴을 발견한다)

학생들은 무거운 물체가 더 멀리 굴러갈 것이라는 가설을 세운 후에 오백 원짜리 동전보다 좀 더 가벼운 백 원짜리 동전을 가지고 측정활동을 하였다. 그러나 어떤 데이터는 두 동

전의 거리가 차이가 없고 어떤 데이터는 약간의 차이가 있으므로 학생A가 먼저 의문을 제기하고 학생B는 거리를 잘못 측정했을 가능성을 고려하였다. 학생들은 측정활동을 다시 반성하며 오차가 발생한 원인을 찾으려고 시도하였다. 학생들은 다시 측정활동을 하기로 하고 학생C가 두 개의 동전을 같은 위치에 놓고 학생들은 각의 변화에 따른 거리를 측정하였다. 환경을 다시 설정하여 활동을 조직화함으로써 질량의 변화에 따라 거리의 변화가 없다는 상황모델을 개발하였다. 이 때, 무게가 무거울수록 빨리 미끄러질 것이라는 자신이 세운 가설과 일치하지 않음을 알게 되었다. 그 후, 학생C가 경사도를 변화시켜보는 지각적 활동을 하면서 각이 증가하면 경사판의 높이가 높아진다고 설명하였고, 학생A가 경사판의 높이와 동전이 굴러간 거리를 측정할 양으로 결정하였다. 높이가 증가하면 거리도 증가할 것이라는 가설을 세운 후에 측정활동으로 데이터를 얻고 변화패턴을 발견하였다. 학생들은 각의 변화 상황과는 달리 높이를 일정하게 증가시키면 수평이동 거리도 일정하게 증가하는 변화패턴의 차이를 발견하였다.

### 3) 수학모델 개발 과정(상황화된 추상의 세계에서 하는 활동)

다음은 경사도가 15도 이전에 측정한 데이터가 없으므로 15도 전일 때 그래프를 어떻게 그릴지를 고려하면서 토론한 대화이다.

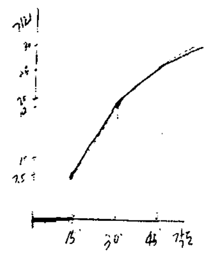
연구자: (학생 A가 그린 그래프를 보면서)경사도가 15도 전일 때는 그래프가 어떻게 될까?
학생A: (망설인다. 자신이 그린 그래프를 보면서 15도 이전일 때를 어떻게 연결할지를 고려하지만 해결을 하지 못한다. 학생B와 C가 그린 그래프를 살핀다)
연구자: (학생B와 C의 그래프를 보면서) 이 두 그래프는 왜 원점을 이렇게 연결했니?
학생B, C: 음.(답이 없다)
연구자: 경사각이 15도 전일 때 경사판에서 미끄러지는 물체를 생각해 봐. 실험을 하지 않고 각이 아주 작을 때부터 15도까지 상황을 고려해 봐. 경사각이 아주 작으면 어떻게 될까?
학생A: 안 미끄러져요.
학생C: 아니. 미끄러질 수도 있어요.
연구자: 차이가 무얼까?
학생B: 미끄러우면 미끄러져요.
학생A: 음. 네. 울퉁불퉁하면 안 미끄러져요
연구자: 그렇지. 경사판의 미끄러운 정도에 따라 차이가 있지. 그러면 B와 C의 그래프는 어떤 상황을 가정으로 한 거니?
학생B, C: 아주 미끄러운 거요.
연구자: 그렇지. 그럼 A는 안 미끄러질 수도 있다고 했으니 그래프를 어떻게 연결할까?
학생A: (각이 0도일 때부터 15도까지 높이를 모두 0으로 표시한다)
연구자: 15도일 때는 거리가 있지?
학생A: 네. (그래프를 다시 수정하려고 시도한다. 15도 이전까지만 거리가 0으로 표시해야 하므로 어떻게 나타낼지 망설인다)
연구자: 15도 일 때 높이를 표시하고, 0이 되는데서 15도만 제외시키면?
학생A: (15도일 때를 0이 되지 않게 표시하였다)
연구자: 그러면 15도 일 때 어떤 현상이 나타나니?
학생A: 미끄러져요.

학생들은 측정한 데이터로부터 [그림 Ⅲ-1], [그림 Ⅲ-2], [그림 Ⅲ-3]과 같이 경사각의 변화에 따른 거리의 변화관계그래프를 그렸다. 경사각이 15도일 때부터 측정을 했으므로 15도일 때부터 점들을 연결한 후에 이 곡선을 참조로 하여 B와 C는 원점과 15도 일 때 높이를 연결하였고 A는 연결하지 않았다. 연구자의 중재로 미끄러지는 상황에 대한 이해를 참조로 하여 그래프를 어떻게 연결할지를 고려하였다. 학생들은 미끄러지는 상황에 대한 사고를 재조직함

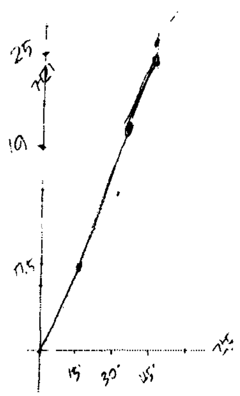
으로써 아주 미끄러운 판은 조금만 기울여도 미끄러지므로 B와 C의 그래프처럼 원점을 연결하는 그래프가 만들어질 수 있다는 것을 이해하였다.

반면, 조금 덜 미끄러운 경사판은 조금 기울이면 물체가 미끄러지지 않다가 15도 쯤 되어 미끄러질 수 있다는 실세계 환경에 대한 이해는 학생A가 수학적 환경인 자신의 그래프에서 각이 15도 이전까지 거리를 0으로 그리게 유도하였다. 경사각이 15도 이 전일 때 그래프를 그리는 데서 직면하는 어려움은 실세계 탐구 과정에서의 상황에 대한 구체적인 사고를 기반으로 하여 해결되었다.

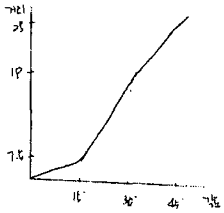
학생들이 그래프를 보고 안 미끄러진다거나 미끄러진다고 설명하는 것은 그래프가 참조하는 상황의 의미를 이해하고 있다는 것을 반영한다. 경사각이 15도보다 작을 때 안 미끄러질 수도 있다는 상황적 지식을 고려할 때 그래프가 개발되었고 그래프의 불연속점의 의미를 구체적이고 실제적으로 이해하였다. 이 그래프는 구체의 세계 안에서 미끄러지는 현상을 내포하고 있으므로 상황화된 추상의 영역에 위치하고 있는 수학모델은 구체와 추상을 연결하는 중재 기능을 한다고 볼 수 있다.



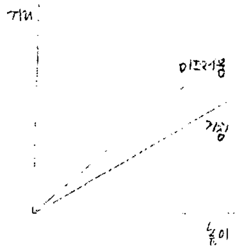
[그림 Ⅲ-1]



[그림Ⅲ-2]



[그림 Ⅲ-3]



[그림Ⅲ-4]

| | |
|---|---|
| [그림Ⅲ-1] | 학생A의 경사각과 수평이동거리의 관계 그래프 |
| [그림Ⅲ-2] | 학생B의 경사각과 수평이동거리의 관계 그래프 |
| [그림Ⅲ-3] | 학생C의 경사각과 수평이동거리의 관계 그래프 |
| [그림Ⅲ-4] | 경사판의 거친 정도에 따른 경사판의 높이와 수평이동거리의 관계그래프(일반화 가능한 모델) |

#### 4) 일반화 가능한 모델 개발 과정(상황화된 추상의 세계에서 하는 활동)

다음은 측정활동을 하지 않고 다른 경사판에서 물체를 굴릴 때 굴러간 수평이동거리의 변화를 예측하고 경사판의 높이와 수평이동 거리의 관계그래프를 그리는 과정이다.

연구자: 이 경사판 말고 다른 판으로 실험을 하면 어떻게 될까?
학생A: 거리가 틀려요.
학생C: 미끄러우면 더 미끄러져요.
연구자: 그렇지. 경사판의 거친 정도에 따라 거리가 달라지지?
연구자: 차이가 뭐니?
학생A: 기울기가 달라요(기울기가 다른 그래프 하나를 첨가하고 미끄러움과 거침이라고 표현하였다)
연구자: 미끄럼틀을 만들 때 수평면 길이에 영향을 주는 요인이 무엇이라고 설명할 수 있니?

학생A: 경사판의 거친 정도요. 미끄러우면 더 길어야 해요.

학생C: 경사각이 크면 더 길어야해요.

연구자: 또?

학생B: 높이가 높으면 길이가 더 길어요.

학생들은 이전 활동에서 경사판의 높이를 변화시키면서 수평이동거리를 측정하였을 때 거리가 일정하게 증가한다는 상황모델에 기반을 두어 높이와 거리의 일차함수그래프인 수학모델을 개발하였다. 그리고 나서 이 수학모델에 기울기가 다른 일차함수 그래프를 하나 더 첨가하여 [그림Ⅲ-4]와 같은 일반화 가능한 모델을 개발하였다. 더 미끄러운 경사판일 때 기울기를 더 크게 그린 것은 기울기는 기표로서 수학적 실체라기보다 두 변화하는 양의 관계를 표현하고 있는 기의된 대상으로서 학생들에게 개념화되었음을 보여주고 있는 것이다. 이 대화는 미끄러움과 거침이라는 경사판의 성질에 따라 굴러간 거리가 달라진다는 상황에 대한 이해에 기반을 두고 기울기의 차이가 주는 실제적인 의미를 이해하였다는 것을 보여주고 있다. 이 일반화 가능한 모델은 학생들이 구체의 세계와 수학의 추상적 세계를 연결하는 역할을 하는 상황화된 추상의 영역에 위치하고 있는 모델이라고 할 수 있다. 이 모델을 가지고 학생들은 미끄러움과 거침이라는 경사판의 성질에 따라 굴러간 수평이동거리가 달라진다는 상황을 해석할 수 있다. 또한 학생들은 미끄럼틀을 만들 때 수평부분의 길이에 영향을 주는 요인으로 경사각, 미끄럼틀의 높이, 미끄럼틀의 거친 정도를 고려할 수 있게 되었다.

### 나. 논의

실세계 탐구 과정에서 학생들은 경사도가 있는 미끄럼틀에서 미끄러지는 상황에 대한 이해를 기반으로 하여 학생들은 물체의 무게, 경사도, 거리를 서로 영향을 미치는 변화하는 양으로 결정하였다. 이 때, 학생들에게 있어서 변화하는 양은 활동에서 경험하는 구체적이고 실제적인 대상이 되는 것이다. 또한 학생들은 미끄럼틀을 모델화 한 물리적 도구인 판을 기울여 보면서 볼펜을 굴려보는 지각적인 활동을 하였다. 이 때, 학생들은 구체의 세계 안에서 활동하면서 구체의 세계 안에서 변화하는 양들의 관계를 경험하게 된다.

상황모델 개발 과정에서 상황화된 추상의 세계에서 학생들은 변화하는 상황에 대한 이해를 사고 대상으로 하여 변화하는 양을 측정하였다. 그 후에 경사각의 변화에 따른 거리 변화, 물체의 질량 변화에 따른 거리 변화를 측정하여 두 변화하는 양 사이의 관계패턴을 발견하였다. 각과 거리를 기록한 데이터는 처음에는 변화하는 상황을 단순하게 기록한 상황모델로서 구체의 세계 안에 내재되어 있는 모델이었다. 그러나 학생들이 이 모델을 가지고 변화하는 양 사이의 관계를 추론할 때, 구체의 근방에서 확장된 상황화된 추상의 세계에서 활동하게 된다. 학생들이 개발한 경사각과 수평이동거리의 변화관계 패턴, 경사판 높이와 수평이동거리의 변화관계 패턴, 물체의 질량과 수평이동거리의 변화관계 패턴인 상황모델은 실세계에서 상황을 구조화하여 개발된 것이다. 그러므로 추상을 향하여 구체의 근방이 확장하여 만들어진 상황화된 추상에 위치하고 있는 모델이라고 볼 수 있다. 따라서 상황모델은 구체와 추상을 연결하는 중재 기능을 할 수 있는 것이다. 수학모델 개발 과정에서 학생들은 경사판의 각, 미끄러진 거리, 물체의 질량이라는 변화하는 양에 대한 이해에 초점을 두고 상황모델을 사고의 대상으로 하여 그래프를 그렸다. 즉, 구체적 상황에서 분리된 기호표현에 기초하여 추상적인 수학개념을 학습한 것이 아니라 구체

적인 맥락 내에서 추상적인 기호를 학습한 것이다. 경사판의 거친 정도라는 물리적 성질에 따라 거리가 변한다는 실제적인 상황에 대한 이해가 사고의 대상으로 하여 경사도가 15도 이전일 때 기울기가 0이거나 아주 작은 직선으로 만드는 자신의 수학모델을 개발하였다. 또한 불연속점이 개념적 도구인 기표로서 다루어지지 않고 구체의 세계에서 미끄러지는 상황에 대한 이해를 사고의 대상으로 함으로써 기의된 대상으로서 다루어졌다. 이 때, 상황과 모델 사이의 이분법이 해결되고 상호 구성적 관계가 발생하게 된다. 또한 경사판의 물리적 성질과 현상에 대한 이해가 기울기 변화라는 수학적 대상의 변화와 통합되어 구성되었다. 즉, 상황과의 연결된 관계 망을 통해 상황화된 추상이 발생한 것이고, 이 때 발생한 상황화 된 추상은 구체와 추상을 연결하는 영역에 위치하고 있는 것이다. 따라서 수학모델은 구체와 추상을 연결하는 중재 기능을 할 수 있는 것이다.

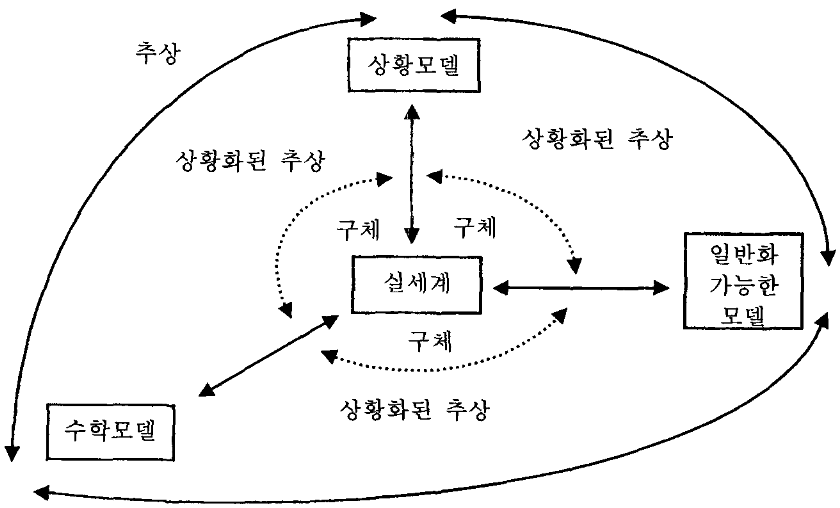
일반화 모델 개발 과정에서 학생들은 측정활동을 하지 않고 다른 경사판에서 높이와 수평이동거리의 변화관계 그래프를 개발하였다. 물리적 도구의 내재적 성질, 상황에 대한 이해를 사고 대상으로 하여 수학모델을 반성하게 되고 이를 토대로 일반화 가능한 모델을 개발한 것이다. 기울기라는 수학적 개념은 구체적 활동에서 유도한 변화하는 양 사이의 관계와 통합되어 인식되었다. 수학적 대상으로서의 그래프를 도구로 하여 그래프가 참조하는 현상을 해석하는 과정에서 기호로서 그래프와 참조 현상은 하나의 융합된 실체로서 학생들에게 개념화된 것이다. 또한 수학모델을 실세계에 비춰 해석하고 수정하고 정교화 하여 개발한 일반화 가능한 모델은 실재화된 추상모델이라고 볼 수 있다. 왜냐하면 일반화 가능한 모델을 사용하여 실세계 현상을 설명하고, 일반화 가능한 모델을 실세계에서 다시 사용하고 공유하게 되므로 형식적인 추상모델이라기보다 모델 자체가 실제가 된 실재화된 추상모델이라고 볼 수 있다. 또한 이 모델은 미끄러지는 상황에서 변화하는 현상을 추상화하여 발생한 상황화된 추상의 영역에 자리 잡고 있다고 볼 수 있다. 따라서 모델링 활동에서 개발되는 일반화 가능한 모델은 구체와 추상을 연결하는 중재 기능을 할 수 있는 것이다.

Noss와 Hoyles(1996)는 LOGO 환경은 학생들이 상황화된 추상을 통해 구체와 추상을 연결하게 할 수 있다는 점을 밝혔다. 본 연구에서는 학생들이 모델링 활동에서 개발하는 모델이 상황화된 추상에 위치함으로써 구체와 추상을 연결하는 중재 기능을 할 수 있고, 학생들의 모델링 경험이 상황에서 추상적 지식을 학습할 기회를 제공할 수 있음을 밝혔다. 이러한 결과를 기반으로 하여 본 연구자는 [그림 Ⅲ-5]와 같이 학생들이 개발하는 상황모델, 수학모델, 일반화가능한 모델이 상황화된 추상의 영역에 위치하여 구체와 추상을 연결하는 중재역할을 할 수 있음을 도식화 하였다. 구체와 상황화된 추상의 경계는 확연하게 분리되지 않고 때로는 구체의 근방으로 상황화된 추상이 확장되어 모델이 더 구체의 세계를 반영하고 있을 수도 있다. 상황화된 추상의 밖에 상황적 의미를 내포하지 않은 추상이 위치하게 된다. 그러나 이 추상은 탈맥락화된 추상이다. 예를 들어, 학생들이 그래프를 실세계의 상황과 연결하여 그래프를 보고 역동적으로 변화하는 다양한 상황을 해석하고, 그래프의 기울기의 의미와 실세계 상황에서 종속관계에 있는 양들의 관계패턴을 연결하여 이해할 수 있을 때, 이 그래프는 상황적 의미를 내포하고 있으므로 학생들에게 탈맥락화된 추상이 아니라 상황화된 추상이 되는 것이다. 그러나 학생들이 이러한 요소를 해석

하지 못하고, $x$와 $y$의 관계그래프, 일차함수 그래프, 이차함수그래프 등으로 그래프 자체만을 정의하려고 하거나 점들을 읽어서 함수식을 구하려고 한다면 이 그래프는 학생들에게 상황화된 추상이 아니라 탈맥락화된 추상이 되는 것이다. 그래프에 내재된 변화하는 상황의 실제적 의미를 이해하지 못하고 그래프 자체를 하나의 추상적이고 형식적 기호인 수학적 표현으로만 이해하기 때문에 탈맥락화된 추상이 되는 것이다. 그러므로 학생들에게 그래프는 추상적 기호로 인식될 수도 있고 상황화된 추상으로 인식될 수도 있는 것이다.

이러한 인식에 영향을 미치는 요인이 어떤 교수·학습 방법으로 이 그래프를 배웠는지 이다. 탈맥락화된 추상으로 그래프를 인식한 학생들에게 그래프에 내재된 현상의 의미는 가시화될 수 없으므로 이 학생들은 그래프가 실세계에서 변화하는 현상을 모델화 한 유용한 도구임을 이해하지 못할 것이다. 따라서 이 학생들은 수학을 실제적인 의미를 수반하지 않는 추상적인 기호를 조작하는 학문으로 인식하게 될 위험성이 있는 것이다. 탈맥락화된 형식적인 추상을 학습할 때 학생들이 실세계와 관련된 실제적인 의미를 이해하지 못하는 점과 수학학습에 대한 바람직하지 못한 인식을 가지게 되는 점을 참작한다면 상황화된 추상을 학습할 수 있는 모델링 활동이 부여하는 교육적 효과는 매우 크다고 볼 수 있다. 학생들이 구체와 추상을 연결하는 중재역할을 할 수 있는 상황화된 추상을 경험할 수 있는 다양한 교수·학습 방법이 연구되어야 할 것이다.

Noss와 Hoyles(1996)는 LOGO 맥락은 학생들이 상황화된 추상을 통해 구체와 추상을 연결하게 할 수 있다는 점을 밝혔다. 본 연구에서는 학생들이 모델링 활동에서 개발하는 모델이 상황화된 추상에 위치함으로써 구체와 추상을 연결하는 중재 역할을 할 수 있고, 학생들의 모델링 경험이 맥락에서 추상적 지식을 학습할 기회를 제공할 수 있음을 밝혔다. 우리나라 수학교실에서도 다양한 수학교육용 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 수학학습이 이루어지고 있다. 따라서 Noss와 Hoyles의 제안처럼 이를 활용하




[그림 Ⅲ-5] 모델의 구체와 추상을 연결하는 중재 역할

여 학생들이 상황화된 추상을 경험할 수 있고 구체와 추상을 연결하게 할 수 있을 것이다. 그러나 수학교육용 컴퓨터 소프트웨어의 활용이 모든 교실에서 적용되지 못하거나 학생들 개인이 직접 가지고 활용하기 보다는 교사의 실연이 중심이 되고 있는 교육여건을 감안할 때 모델링 활동으로 상황화된 추상을 경험하게 하는 방법이 더 효과적이라고 볼 수 있다. 모델링 활동은 어느 교실에서나 행해질 수 있고 모든 학생들이 직접 참여할 수 있다는 점에서 컴퓨터 소프트웨어의 활용이 가지는 제한적인 측면을 보완할 수 있기 때문이다. 물론 모델링 활동과 컴퓨터 소프트웨어의 활용은 각각 나름대로의 장단점을 가지고 있으므로 학습되는 내용 영역에 따라 적합한 방법을 선택하는 교사의 교수학적 배려도 요구된다. 두 가지 방법을 모두 사용한다면 훨씬 좋은 시너지 효과를 발휘할 수 있을 것이다.

## Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 학교수학에서 학생들이 탈맥락화 된 과제를 해결하는데 익숙해 왔기 때문에 실세계 문제해결 능력이 부족하다는 문제의식을 가지게 되었다. 모델링 활동에서 학생들이 개발하는 모델이 탈맥락화 된 추상이 아니라 실세계 상황의 근방인 상황화된 추상의 영역에 위치한다면, 이 모델이 구체와 추상을 연결하는 중재 역할을 함으로써 학생들의 실생활 문제해결 능력을 향상시킬 수 있을 것이라는 관점을 가지고 연구를 하였다. 따라서 사례연구 방법으로 학생들이 모델링 활동을 하는 과정에서 개발하는 모델이 구체와 추상의 연결을 위한 중재기능을 할 수 있는지를 조사하였다.

사례연구에 앞서 연구문제를 분석하는데 이론적 기반이 될 수 있는 문헌연구를 하였다. 상황화된 추상과 실제화된 추상, 구체적 활동과 추상적 활동의 통합에서 구현되는 실제적인 사고, 실세계와 수학의 세계 사이의 상호작용에 관하여 논의하였다. 추상이 구체에서 분리된 탈맥락화 된 것이 아니라 구체와 추상이 연결된 관계 망을 형성하고 있음을 밝힌 선행 연구는 일상 수행에서 상황화된 추상적인 개념은 수학적이고 형식적인 개념임과 동시에 구체적이고 상황적인 개념임을 밝히고 있다. 이 결과는 모델링 활동은 구체에서 추상으로의 분리를 통한 위계적 상승이 아니라 구체와 추상이 연결된 관계 망을 형성하는 과정에서 상황화 된 추상의 영역에 위치하는 모델을 개발하는 활동이라는 점을 시사하고 있다. 모델링 활동에서 개발한 모델이 상황에서 추상화된 모델임과 동시에 사회에서 사용하면서 실제화된 모델이라고 보는 견해는 모델링에서 탈맥락화보다는 모델과 모델화된 실제 사이에 상호작용이 있고, 실제에서 상황적 추상화를 거치면서 개발된 모델이 다시 실제화된 모델이 되는 순환적 과정이 이루어진다는 점을 인정하고 있는 것이다. 실제적인 사고는 구체적이고 지각적인 활동에서 구현되는 사고이며 구체적 활동과 추상적 활동가 통합될 때 구성될 수 있는 인지라고 할 수 있다. 따라서 수행활동에서 인지를 고려할 때 실제적인 활동과 수학활동은 이분되지 않으며 위계적 관계가 전제되지도 않는다. 실세계와 수학의 세계 사이에서 연결성의 필요성을 논의한 연구들은 학생들이 실세계에 대한 이해가 배제된 추상적 활동으로만 수학을 학습할 때, 그들은 수학적 의미를 이해하는 과정에는 실용적이고 구체적인 고려를 할 필요가 없는 것으로 간주한다는 점을 밝혔다.

사례연구를 분석한 결과, 학생들은 경험에 비춰 실제적인 맥락 내에서 경사판의 기울기,

물체의 무게, 굴러간 수평이동 거리를 모델화하기 위해 조작하였다. 이 때, 학생들은 구체의 세계 안에서 활동하고 있는 것이다. 학생들이 개발한 각과 거리를 기록한 데이터는 처음에는 변화하는 상황을 단순하게 기록한 상황모델로서 구체의 세계 안에 내재되어 있는 모델이었다. 그러나 학생들이 이 모델을 가지고 변화하는 양 사이의 관계를 추론하는 활동을 조직함으로써 구체의 세계와 추상의 세계가 연결되었다. 이 때, 두 변화하는 양의 관계패턴인 상황모델은 상황화된 추상의 영역에 위치하고 있다. 그 후, 경사판의 물리적인 성질과 현상에 대한 이해가 기울기 변화라는 수학적 대상의 변화와 통합됨으로써 각과 거리의 관계그래프가 개발되었다. 학생들은 지각된 세계와 모델 사이의 일관성을 유지하기 위해 구체의 세계에서 조작한 대상에 대한 사고를 기반으로 하여 모델에 대해 사고하는 과정을 보여주었다. 상황모델에 내재한 수학 구조를 형식화하여 개발한 수학모델 역시 상황모델에 내재한 구체라는 실제를 포함하고 있는 것이므로 상황화된 추상의 영역에 위치한다고 볼 수 있다. 결국, 상황모델이나 수학모델은 구체에서 분리된 모델이 아니라 구체와 추상이 연결된 관계 망인 상황화 된 추상의 영역에 자리 잡고 있는 모델로서, 구체와 추상의 중재 기능을 할 수 있는 것이다. 그 후, 수학적 대상으로서의 그래프가 참조하는 현상을 해석하는 과정에서 실세계와 기호로서 그래프는 하나의 융합된 실체로서 학생들에게 개념화 되었다. 학생들이 개발한 일반화 가능한 모델은 미끄러지는 상황에서 변화하는 현상을 추상화하여 개발된 모델이므로 상황화된 추상의 영역에 위치한다고 볼 수 있다. 따라서 모델링 활동에서 개발되는 일반화 가능한 모델은 구체와 추상을 연결하는 중재 기능을 할 수 있는 것이다.

본 연구에서 학생들은 한 가지 모델링 활동 과제를 2차시에 걸쳐서 수행하였으며, 한 차시는 약 2-3시간이 소요되었다. 그러므로 수학 교실에서 모델링 활동을 할 때 시간의 제약이 가져오는 문제점이 수반될 수 있다. 모델링 활동 과제를 단원 초기에 제시하고 몇 차시의 수업 동안 이 과제를 연계적으로 수행하면서 과제가 지향하는 수학개념을 학습하기 위해서는 수업을 효율적으로 잘 관리할 수 있는 방법이 고안되어야 한다. 본 연구의 결과를 기반으로 하여 학교수학에서 모델링 활동을 지도하기 위한 방안이나 바람직한 모델링 활동 수업 모형을 개발하는 후속연구가 뒤따라서 본 연구의 결과가 실천적으로 보완되어야 할 것이다.

## 참고문헌


박정 · 한경혜 · 정은영 · 김경희(2004). **TIMSS 2003 결과 분석 및 논의.** 한국교육과정평가원. 연구자료 ORM 2004-26.

나귀수(2002). TIMSS-R 국제성취수준에 따른 우리나라 학생들의 수학 성취도 분석-교육과정, 교과서와의 관련성을 중심으로-. **수학교육학연구, 13**(3), 383-401.

박경미 · 최승현 · 노국향(2002). 학업 성취도 국제 비교 평가(PISA)에 나타난 우리나라 학생의 수학적 소양 수준 분석. **수학교육학연구, 12**(2), 291-311.

신은주 · 이종희 (2004). 모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례연구. **학교수학, 6**(2), 153-179.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Hershkowitz, R., Schwarz, R. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2). 195-222.

Hierbert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-100). New York: MacMillian.

Holyes, C., Noss, R., & Pozzi, S. (1999). Mathematizing in practice. In C. Hoyles, C. & Morgan & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 48-62). London: Falmer Press.

Jurdak, M., & Shahin, I. (2001). Problem-solving activity in the worlkplace and the school: The case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics, 47,* 297-315.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* New York: Cambridge University Press.

Lave, J. (1993). The practice of learning. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds.), *Understanding practice* (pp. 3-32). New York: Cambridge University Press.

Noss, R., & Holyes, C. (1996). *Window on mathematical learning culture and computer.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Noss, R., Holyes, C., & Pozzi, S. (2002). Abstraction in expertise: A study of nurses' conceptions of concentration. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 204-229.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Mathematics in the streets and in schools.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Pratt, D., & Noss, R. (2002). The micro-evolution of mathematical knowledge: The case randomness. *The Journal of the Learning Science, 11*(4), 453-488.

Saxe, G. B. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1993). Solving everyday problem in formal setting: An empirical study of the school as context for thought. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds.), *Understanding practice* (pp. 327-342). New York: Cambridge University Press.

Scribner, S. (1986). Thinking in action: Some characteristics of practical thought. In R. J. Sternberg & R. K. Wagner (Eds.), *Practical intelligence: Nature and origins of ompetence in everyday world* (pp. 13-30). New York: Cambridge University Press.

Skovsmose, O. (1994). *Toward a philosophy of critical mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Oers, B. (1998). From context to contextualizing. *Learning and Instruction, 8* (6), 473-488.

# An Analysis of Mediation Function between Concrete and Abstract of the Model

Shin, Eun Ju (Ewha womans university, Graduate school)
Lee, Chong Hee (Ewha womans university)

There have been raised the question that students have been of no interst in mathematcs and incompetent for solving realworld problem because students have been recognized mathematcs as abstract knowldege. We research whether students' modeles developed in modeling activity can mediate between concrete and abstract. The analysis of our case study revealed that students' modeles aren't decontextualized abstraction but is located in situated abstraction that is a network connecting between concrete and abstract. Thus, these modeles are a tool mediating between concrete and abstract. Also, students' modeling activities can provide students with the opportunity of being competent for solving realworld problem.

* **Key words** : modeling activities(모델링 활동), decontextualized abstraction(탈맥락화된 추상), situated abstraction(상황화된 추상), realized abstraction(실제화된 추상)

논문접수 : 2005. 1. 3
심사완료 : 2005. 1. 30