

상류이송기법에서의 새로운 생성항 처리 기법

New Treatment of Source Terms in Upwind Schemes

김 원* / 한 건 연** / 우 효 섭*** / 최 규 현****

Kim, Won / Han, Kun Yeun / Woo, Hyoseop / Choi, Kyuhyun

Abstract

Upwind schemes are very well adapted to the discontinuous flow and have become popular for applications involving dam break flow, transcritical flow, etc. However, upwind schemes have been applied mainly to the idealized problems not to the natural channels with irregular geometry so far because of the error due to source terms. In this paper, the new type of upwind discretization of source terms, which uses the normalized Jacobian to discretize the source terms, is proposed. As results of tests to flows with source terms by the upwind models, the method proposed in this paper is proved as efficient and accurate. This generalized method for differencing source terms is simple and might be applicable to diverse type of flux upwind discretization scheme in finite difference method.

Keywords : upwind scheme, source term, discontinuous flow, hydraulic jump

요 지

상류이송기법은 불연속 흐름을 해석할 수 있기 때문에 댐붕괴류, 천이류 등의 해석에 많이 이용되고 있다. 그러나 상류이송기법은 생성항 처리과정에서 발생하는 오차로 인해 불균일한 단면을 가진 자연하천에는 거의 적용되지 못하고 단순화된 하도에만 주로 적용되어 왔다. 본 논문에서는 생성항의 차분화를 위해서 정규화된 Jacobian을 사용하는 상류이송형 생성항 처리기법을 개발하였다. 적용 결과 본 연구에서 제안된 생성항 처리기법이 정확하면서 효율적인 것으로 나타났다. 본 연구에서 제안한 방법은 단순한 형태를 지니고 있으며 다른 상류이송기법에도 다양하게 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

핵심용어 : 상류이송, 생성항, 불연속 흐름, 도수

1. 서 론

흐름해석을 위한 수치해석기법은 공간차분형태에 따라 크게 중앙차분법과 상류이송 기법으로 분류될 수 있다. 중앙차분기법은 각 계산지점의 특성만을 반영하

여 계산하는 기법으로 차분과정이 비교적 간단하고 추가적인 계산과정이 필요하지 않기 때문에 하천흐름 해석을 위해 지금까지 많이 사용되어 왔다. 중앙차분기법의 단점중 하나는 불연속 흐름을 해석할 수 없다는 것인데 도수, 댐붕괴류 등 불연속이 나타나는 흐름의

* 한국건설기술연구원 수자원연구부 수석연구원
Research Fellow, Water Resources Research Div., KICT, 2311, Daehwa-dong, Ilsan-gu, Goyang-si, Gyunggi-do, Korea,
(e-mail: wonkim@kict.re.kr)

** 경북대학교 토목공학과 교수
Professor, Dept. of Civil Eng., Kyungpook National University, 1370, Sankyuk-dong, Buk-gu, Daegu, Korea

*** 한국건설기술연구원 수자원연구부 연구위원
Senior Research Fellow, Water Resources Research Div., KICT, 2311, Daehwa-dong, Ilsan-gu, Goyang-si, Gyunggi-do, Korea

**** 경북대학교 토목공학과 박사
Ph.D., Dept. of Civil Eng., Kyungpook National University, 1370, Sankyuk-dong, Buk-gu, Daegu, Korea

경우 비물리적인 진동이 발생하여 해에 수렴할 수 없게 된다. 이와 같은 단점을 해결할 수 있는 방법이 상류이송기법인데 각 지점의 특성선 특성에 따라 공간차분을 변화시켜 주기 때문에 상류-사류-상류 등으로 변화하는 흐름을 계산할 수 있는 장점을 가지고 있다. 이로 인해 댐붕괴류, 보 월류흐름 등 불연속 흐름의 계산을 위해서 상류이송기법이 많이 이용되고 있다. 이와 같은 장점에도 불구하고 상류이송기법은 지금까지 주로 균일하도 또는 정형화된 단면의 하도에만 적용되어 왔는데 그 이유는 하상경사, 마찰경사, 단면변화 등을 나타내는 생성항의 처리에 한계를 가지고 있기 때문이다. 생성항이 없는 이상적인 경우에는 상류이송기법이 불연속흐름을 잘 계산할 수 있으나 작은 생성항이라도 포함되는 경우 이로 인해 오차가 발생하거나 수렴하지 못하는 한계를 가지고 있는 것이다. 상류이송기법의 이와 같은 한계로 인해 실제 하천 흐름에 적용된 경우는 거의 없으며 비교적 간단한 균일하도에서 가상의 불연속 흐름의 계산만을 위해 사용되었다.

Roe(1986)는 생성항이 흐름항과 동일한 형태로 차분되어야 함을 밝힌 바 있으며, Glaister(1988)는 이 개념을 이용하여 새로운 방법을 제안하였으나 평평한 하도만을 대상으로 하였다. LeVeque와 Yee(1990)는 생성항과 흐름항을 분리된 단계로 계산하는 방법을 사용한 바 있다. Bermudez와 Vazquez(1994)는 흐름항과 유사하게 생성항을 상류이송기법으로 해석하는 좀 더 일반화된 기법을 제시하였고 생성항의 상류이송차분이 중앙차분에 비해 훨씬 더 안정적이라는 것을 증명한 바 있다. Vazquez-Cendon(1999)은 이와 같은 개념을 정상류를 포함하는 좀 더 광범위한 범위의 흐름에 적용한 바 있고, Garcia-Navarro와 Vazquez-Cendon(2000)은 생성항을 처리하기 위해 Roe 기법의 두가지 형태를 제시한 바 있다. 이와 같은 방법의 가장 큰 단점은 차분식과 계산과정의 복잡함이다. Toro(1997)는 지배방정식을 여러 상미분 방정식으로 분리하여 계산하는 방법을 사용하였는데, 이 방법은 정상류나 준정상류에서 정확도가 떨어지는 단점이 있다. LeVeque(1998)는 하상경사항 처리방법을 제안한 바 있는데 정상류 상태는 정확하게 해석하는 반면, 충격파가 포함되어 있는 정상 천이류에는 적용할 수 없는 한계를 보인다. Hubbard와 Garcia-Navarro(2000)는 유한체적법에서 생성항과 흐름항의 균형을 이룰 수 있는 기법을 제시한 바 있으나 부정류 해석에 한계를 나타내었으며 수치진동을 방지하기 위해 낮은 Courant 수만을 대상으로 하였다. Zhou 등(2001)은 수면경사를 변수로 이용하는 SGM(surface gradient method)를 개발하였는데 기법의 단순함과 정상류 부정

류 모두에 적용할 수 있는 장점을 가지고 있다. 그러나 유량의 계산에서는 불연속점 부근에서 여전히 불안정성을 나타내고 있다.

국내에서는 최근 불연속 흐름의 수치해석에 관한 연구들이 늘어나고 있다. 김원과 한진연(2000a, 2000b)은 고정확도 기법인 ENO(Essentially Non-Oscillatory) 기법을 이용하여 불연속 흐름을 해석한 바 있으며 Choi와 Paik(2001)은 여러 가지 고정확도 기법의 정확도를 비교 분석한 바 있다. 김원 등(2001)은 음해적 ENO 기법을 이용하여 댐붕괴류를 해석한 바 있다. 이종욱 등(2001)과 이종욱과 조용식(2001)은 불연속 흐름의 모의를 위해 TVD(Total Variation Diminishing) 기법을 사용한 바 있다. 또한 강민구와 박승우(2003)은 ENO 기법에 의한 2차원 유한체적기법으로 댐붕괴파를 해석한 바 있으며, 전정숙 등(2003)은 TVD 기법을 이용하여 천이류를 해석한 바 있다. 이정규와 김태관(2003)은 1차원 댐붕괴 흐름 모의시 발생하는 수치진동의 감쇠를 위해 TVD-McCormack 기법을 사용한 바 있다. 그러나 아직까지 불연속 흐름의 수치해석을 위해 필요한 상류이송기법의 생성항 처리기법에 관한 연구는 전혀 없는 실정이다.

본 연구에서는 상류이송기법의 생성항 처리를 위해 정규 Jacobian을 사용하는 새로운 기법을 제시하였고 해석 해를 가진 여러 가지 흐름에 적용하여 기법을 검증하였다.

2. 지배방정식 및 차분기법

2.1. 지배방정식

일차원 하천흐름의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + S = 0 \quad (1)$$

여기서,

$$U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gI_2 - gA(S_o - S_f) \end{pmatrix} \quad (2)$$

식 (1)과 (2)에서 A = 유수단면적, Q(x, t) = 유량, g = 중력가속도, 그리고 I₁ 은 다음 식으로 나타나는 유수단면적의 정수압력이다.

$$I_1 = \int_0^{h(x,t)} \{h(x,t) - \eta\} \beta(x, \eta) d\eta \quad (3)$$

여기서, h 는 수심이고 β 는 수심 η 일 때의 수면폭으로 다음과 같이 정의된다.

$$\beta(x, \eta) = \frac{\partial A(x, t)}{\partial \eta} \quad (4)$$

I_2 항은 하상단면의 확대와 축소로 인해 발생하는 힘을 나타내는 항으로서 다음과 같이 정의된다.

$$I_2 = \int_0^{h(x,t)} \{h(x,t) - \eta\} \frac{\partial \beta(x, \eta)}{\partial x} d\eta \quad (5)$$

S_o 항은 하상경사, S_f 항은 마찰경사를 나타낸다.

2.2 상류이송기법

상류이송기법중 음해 ENO 기법은 Yang 등(1993)에 의해 개발되었으며 김원과 한건연(2000a)이 음해법의 형태로 전환하여 다양한 하천흐름에 검증한 바 있다. 음해 ENO 기법의 최종 차분형태는 다음 식과 같이 나타난다.

$$\left[I + \Delta t \alpha \left(\frac{\partial J^{+n}}{\partial x} + \frac{\partial J^{-n}}{\partial x} + G^n \right) \right] \Delta U^{n+1} = -\Delta t \left\{ (\hat{J}^+ + \hat{J}^-) \frac{\partial F}{\partial x} + S \right\}^n \quad (6)$$

여기서,

$$J^\pm = T \text{diag}(\lambda_i^\pm) T^{-1} \quad (7)$$

$$\lambda_i^\pm = \frac{1}{2} (\lambda_i \pm |\lambda_i|) \quad (8)$$

$$\lambda_1 = u + c; \text{ and } \lambda_2 = u - c \quad (9)$$

$$\hat{J}^\pm = T \text{diag}(\hat{\lambda}_i^\pm) T^{-1} \quad (10)$$

$$\hat{\lambda}_i^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \text{sgn} \lambda_i) \quad (11)$$

여기서, I 는 단위행렬(2×2), Δt 는 시간간격, α 는 가중치, J 는 Jacobian, \hat{J} 는 정규 Jacobian, T 는 유사전환행렬, λ 는 고유값, u 는 유속, c 는 파속, $\hat{\lambda}$ 는 정규화된 고유값, sgn 는 sign 함수를 나타낸다. G 는 생성항의 Jacobian($G = \partial S / \partial U$)으로 비균일 하도에서는 다음과 같이 나타낼 수 있다 (Delis 등, 2000).

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(S_o + \frac{7}{3}S_f + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{A}{B^2}) & -\frac{2gA}{Q} S_f \end{pmatrix} \quad (12)$$

여기서, B 는 수면폭이다.

2.3 생성항의 차분기법

2.3.1 지점차분기법(pointwise scheme)

지점차분기법에서는 생성항은 다음과 같이 나타난다 (Garcia Navarro and Vazquez Cendon, 1997).

$$S_{oi} \cong \frac{1}{2} (S_{oi+1/2} + S_{oi-1/2}) \quad (13)$$

여기서, $S_{oi+1/2}$ 는 다음 식으로 정의된다.

$$S_{oi+1/2} = -\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x} \quad (14)$$

여기서, z 는 하상표고이다.

$$I_{2i} \cong \frac{1}{2} (I_{2i+1/2} + I_{2i-1/2}) \quad (15)$$

여기서, $I_{2i+1/2}$ 는 직사각형 하도의 경우에 다음 식으로 정의된다.

$$I_{2i+1/2} = \frac{1}{2} h_i^2 \frac{B_{i+1} - B_i}{\Delta x} \quad (16)$$

여기서, h 는 수심이다. 마찰항은 다음 식으로 나타낼 수 있다 (Meselhe, 1994)

$$gAS_{fi} = \frac{g}{2} \left(\frac{A_{i+1} + A_i}{2} \right) \left(\frac{Q_{i+1}|Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2} + \frac{Q_i|Q_i|}{K_i^2} \right) \quad (17)$$

여기서, $K = (1/n)AR^{2/3}$ 는 통수능이다. 이와 같은 지점차분기법은 지금까지 상류이송기법 뿐만아니라 중앙차분기법에서도 생성항의 처리를 위해서 일반적으로 사용되고 있는 방법이다.

2.3.2 상류이송기법(upwind scheme)

Yang(1990, 1991)은 흐름항의 처리를 위해 특성선에 기초한 상류이송기법을 개발하였고 자유수면흐름에 적용한 바 있다. 본 연구에서는 흐름항의 차분을 위해서 이 방법을 사용하였는데 이 기법에서 흐름항은 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (\hat{J}^+ + \hat{J}^-) \frac{\partial F}{\partial x} \quad (18)$$

여기서, \hat{J}^\pm 는 분할정규 Jacobian 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{J}^\pm = T \text{diag}(\hat{\lambda}_i^\pm) T^{-1}, \quad \hat{\lambda}_i^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \text{sgn} \lambda_i), \quad \hat{J}^+ + \hat{J}^- = I \quad (19)$$

$$\hat{J}^\pm = \begin{bmatrix} -\frac{u}{c} \left(\frac{\hat{\lambda}_1^\pm - \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) + \left(\frac{\hat{\lambda}_1^\pm + \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) & \frac{1}{c} \left(\frac{\hat{\lambda}_1^\pm - \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) \\ \frac{(c^2 - u^2)(\hat{\lambda}_1^\pm - \hat{\lambda}_2^\pm)}{c} & \frac{u}{c} \left(\frac{\hat{\lambda}_1^\pm - \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) + \left(\frac{\hat{\lambda}_1^\pm + \hat{\lambda}_2^\pm}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (20)$$

이 기법의 장점은 크게 세가지로 나뉘볼 수 있다. 하나는 비보존성의 문제가 나타나지 않는다는 것이다. 일반적인 흐름 Jacobian은 $\tilde{J}_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} U = \Delta_{i+1/2}$ 의 형태로 나타나게 되는데 이와 같은 형태의 Jacobian은 생성항이 있는 경우 비보존성의 문제가 발생하게 된다. 이 기법의 또 다른 큰 장점은 단순함이다. 다른 기법과 비교하여 비교적 간단한 형태를 지니고 있으며 실제 계산과정에서도 복잡한 과정을 거치지 않는다. 마지막으로 가장 큰 장점이라고 할 수 있는 것은 흐름항 자체를 변화시키지 않으면서도 흐름의 특성선 특성을 반영할 수 있도록 해 준다는 것이다.

본 연구에서는 이와 같은 장점을 가지고 있는 정규 Jacobian을 흐름항 뿐만 아니라 생성항에도 적용하였다. 정규 Jacobian을 생성항에 적용하여 생성항이 상류이송의 형태로 나타나게 하는 이유는 다음과 같다. 먼저, 상류이송기법에서 나타나는 생성항 문제를 처리하기 위해서는 생성항이 상류이송의 형태로 변환되는 것이 필요하며, 그동안 이것을 위해 여러 연구자들이 생성항에 적용가능한 상류이송기법을 연구해 온 바 있다 (Bermudez와 Vazquez, 1994 ; Vazquez-Cendon, 1999 ; Garcia-Navarro와 Vazquez-Cendon, 2000). 다음으로 정규 Jacobian을 생성항에 적용할 수 있는 것은 정규 Jacobian이 생성항의 형태를 변화시키지 않기 때문이다. Jacobian이 생성항의 형태를 변화시키는 경우 추가적인 고려가 필요하며 더불어 비보존성의 문제 등이 나타날 수 있기 때문이다. 마지막으로 흐름항에 적용한 것과 동일한 정규 Jacobian을 생성항에 적용함으로써 생성항은 흐름항과 동일한 방법으로 차분되어야 한다는 Roe(1986)의 기본 조건을 완벽하게 만족시킬 수 있기 때문이다. 그동안 생성항에 상류이송기법을 도입하는

방법에 대해서 기본적인 이론과 몇가지 방법이 소개된 바 있으나 이와 같은 Roe의 기본조건을 완벽하게 만족시키지 못하였으며 그로 인해 제한된 흐름조건에 대해서만 적용이 된 바 있고, 더구나 실제 하천에 적용된 경우는 없는 상황이다. 본 연구에서는 정규 Jacobian을 이용하여 생성항을 다음과 같이 나타내었다.

$$S = (\hat{J}^+ + \hat{J}^-) S \\ = \hat{J}^+ S^+ + \hat{J}^- S^- \quad (21)$$

$$= \hat{J}_{i-1/2}^+ S_{i-1/2}^+ + \hat{J}_{i+1/2}^- S_{i+1/2}^- \quad (22)$$

$$S_{i-1/2}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(I_2)_{i-1/2} - gA_{i-1/2}(S_{oi-1/2} - S_{fi-1/2}) \end{pmatrix} \quad (23)$$

식 (23)의 변수들은 직사각형 하도의 경우 다음과 같이 나타난다.

$$g(I_2)_{i-1/2} = \frac{1}{2} g h_i h_{i-1} \frac{(B_i - B_{i-1})}{\Delta x_{i-1}} \quad (24)$$

$$gA_{i-1/2}(S_{oi-1/2} - S_{fi-1/2}) = \frac{g}{2} (A_i + A_{i-1}) \left(\frac{(z_i - z_{i-1})}{\Delta x_{i-1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{|Q_i| Q_i}{K_i^2} + \frac{|Q_{i-1}| Q_{i-1}}{K_{i-1}^2} \right) \right) \quad (25)$$

본 연구에서는 위와 같은 생성항의 상류이송처리 기법을 음해 ENO 기법에 적용하여 생성항 처리기법을 검증하였다. 생성항에 상류이송기법을 도입하면 음해 ENO 기법인 식 (6)의 오른쪽 항은 다음과 같이 나타난다.

$$-\Delta t \left\{ (\hat{J}^+ + \hat{J}^-) \frac{\partial F}{\partial x} + S \right\}^n = -\Delta t \left\{ (\hat{J}^+ + \hat{J}^-) \frac{\partial F}{\partial x} + (\hat{J}^+ + \hat{J}^-) S \right\}^n \quad (26)$$

3. 적용 및 검증

3.1 하상 변화 하도의 정상류

하상이 변화하는 하도의 정상류를 모의하기 위해 다음과 같이 하상이 변화하는 25m 가상하도를 대상으로 하였는데, 이 가상하도는 해석해가 존재하며 댐붕괴파 모의 모형의 검증을 위해 많이 사용되는 하도이다 (Goutal와 Maurel, 1997).

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x-10)^2 & \text{if } 8 < x < 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (27)$$

이와 같은 하도에서 발생하는 흐름을 모의하기 위해 거리간격 $\Delta x = 0.25\text{m}$ 로 설정하였으며 100개의 계산지점으로 구성되었다. 하상마찰은 없는 것으로 가정하였다.

(1) 도수가 발생하지 않는 천이류의 경우

상류경계조건으로 유량 $1.53\text{m}^3/\text{sec}$, 하류경계조건으로 수위 0.406m 를 설정하였는데 도수는 발생하지 않지만 흐름이 상류에서 사류로 변화하는 천이류의 경우이다. 초기조건으로 전구간에서 유량 $1.53\text{m}^3/\text{sec}$, 수심 1.0m 를 설정하였다. 그림 1은 ENO 기법에 의해서 계산

된 수위와 해석해를 각각 나타내고 있는데, 각 기법에서 지점차분기법과 상류이송기법의 결과를 비교하고 있다. 그림에서 알수 있는 바와 같이 수위의 경우에는 지점차분기법과 상류이송기법이 큰 차이를 보이지 않고 있다. 다만 상류이송기법은 해석해와 거의 일치하는 반면, 지점차분기법은 하상이 상승하는 부분에서 해석해와 약간의 차이를 보이고 있다. 그림 2는 해석해와 계산된 유량을 나타낸 것이다. 유량의 경우 지점차분기법과 상류이송기법간에는 큰 차이를 보이고 있다. 지점차분기법의 경우 해석해와 달리 하상이 상승하는 부분에서 유량이 급격하게 줄어들었다가 다시 상승하는 경향을 보이고 있으나, 상류이송기법의 경우에는 해석해와 정확히 일치하고 있다.

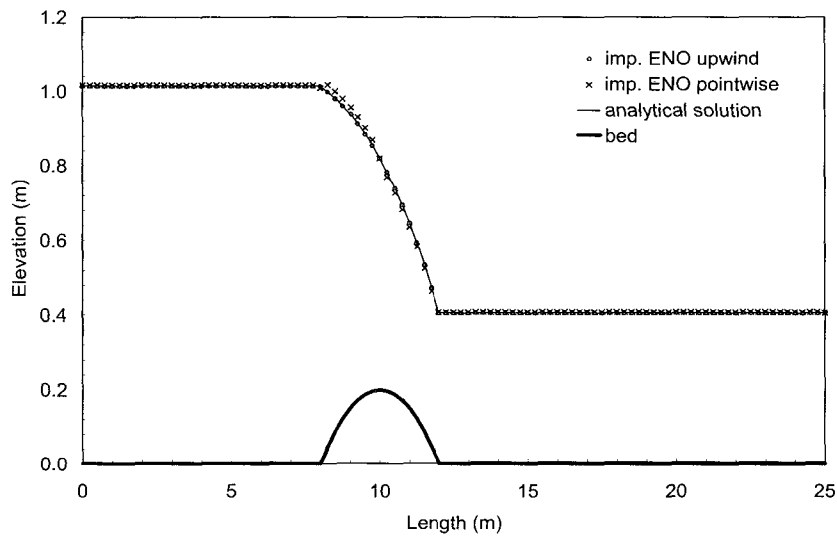


그림 1. 도수가 발생하지 않는 경우 지점차분기법과 상류이송기법의 수위

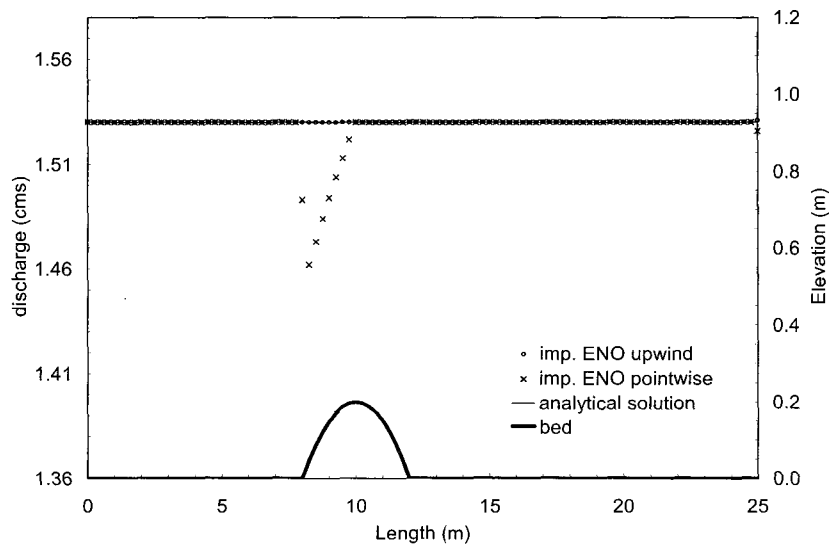


그림 2. 도수가 발생하지 않는 경우 지점차분기법과 상류이송기법의 유량

(2) 도수가 발생하는 천이류의 경우

이 경우 상류경계조건으로 유량 0.18m³/sec, 하류경계 조건으로 수위 0.33m가 설정되었는데 하상이 저하되는 부분에서 도수가 발생하는 경우이다. 초기조건으로 전 구간에서 유량 0.18m³/sec, 수심 0.5m를 설정하였다. 그림 3은 수위를 나타내고 있는데 지점차분기법의 경우 도수가 발생하지 않는 경우보다 더 큰 오차를 보이고 있으나 상류이송기법의 경우 해석해와 잘 일치하고 있다. 그림 4는 유량을 나타낸 것으로 지점차분기법의 경우 하상이 상승하는 부분에서는 유량이 감소하고 하상이 감소하는 부분에서는 유량이 증가하는 경향을 보이고 있다. 상류이송기법의 경우 도수가 발생하는 한 점에서 유량이 해석해와 일치하지 않는 것을 제외하고는 전 구간에서 해석해와 잘 일치하고 있다.

(3) 상류의 경우

이 경우 상류경계조건은 유량 4.42m³/sec, 하류경계 조건은 수위 2.0m가 설정되었으며 전구간에서 상류만 나타나는 경우이다. 초기조건으로 전구간에서 유량 4.42m³/sec, 수심 2.0m를 설정하였다. 그림 5는 수위를 나타내고 있는데 이 경우에도 지점차분기법은 여전히 약간의 오차를 보이고 있으나 상류이송기법의 경우에는 해석해와 일치하고 있다. 그림 6은 유량을 나타낸 것인데 상류이송기법의 경우 해석해와 전구간에서 일치하는 반면, 지점차분기법의 경우에는 하상상승부에서 급격하게 하강하였다가 하상 하강부에서 급격하게 증가하는 불안정한 결과를 보이고 있다.

이와 같이 하상이 변화하는 경우 흐름조건에 관계없이 지점차분기법의 경우 수렴에는 문제가 없으나 수위

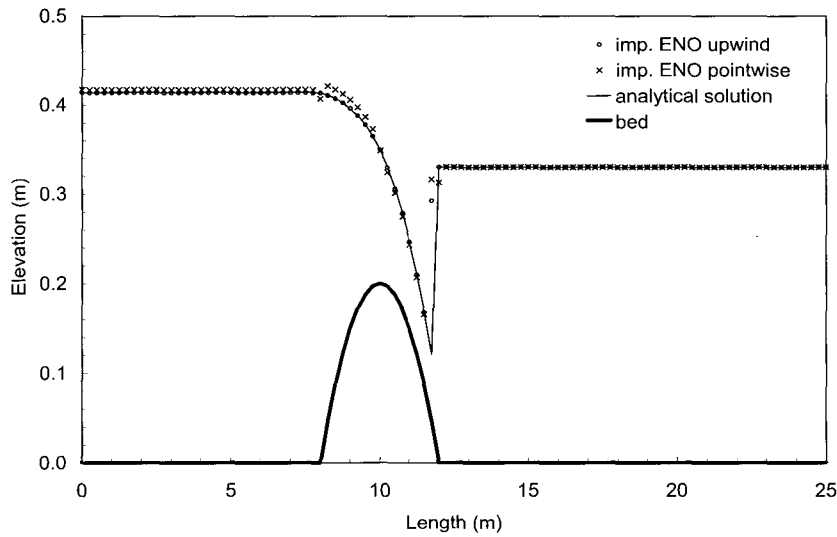


그림 3. 도수가 발생하는 경우 지점차분기법과 상류이송기법의 수위

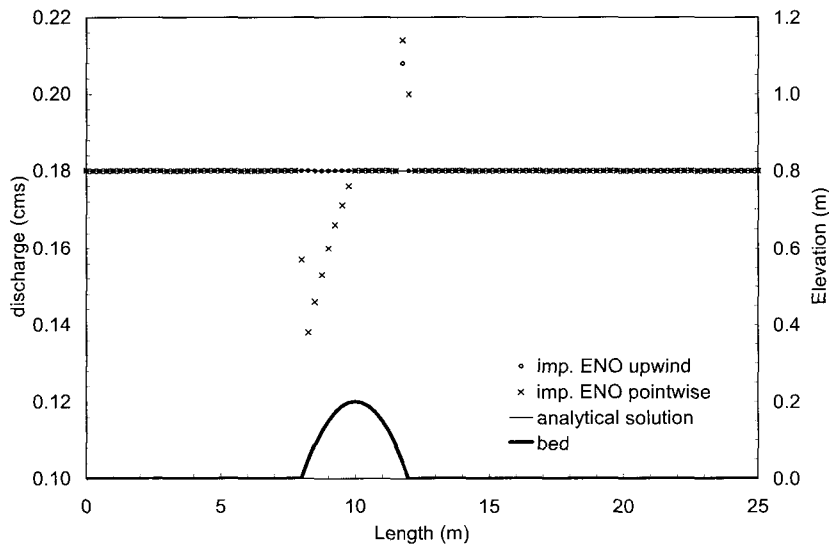


그림 4. 도수가 발생하는 경우 지점차분기법과 상류이송기법의 유량

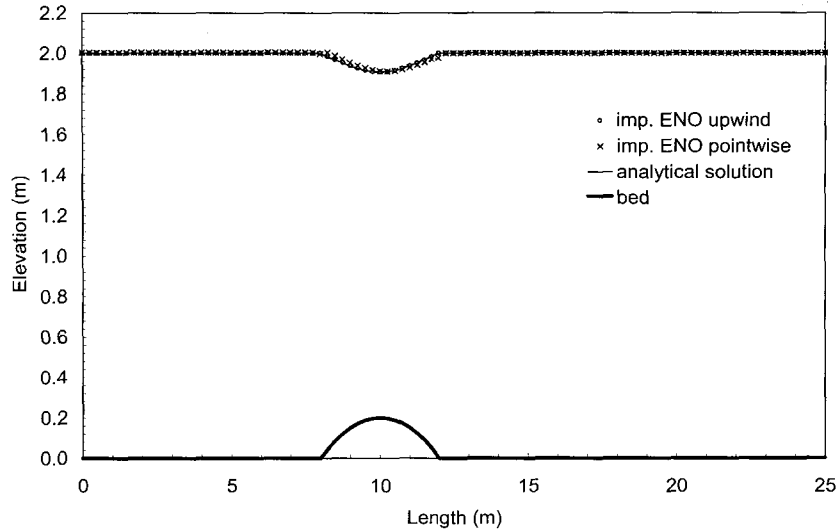


그림 5. 상류 상태의 경우 지점차분기법과 상류이송기법의 수위

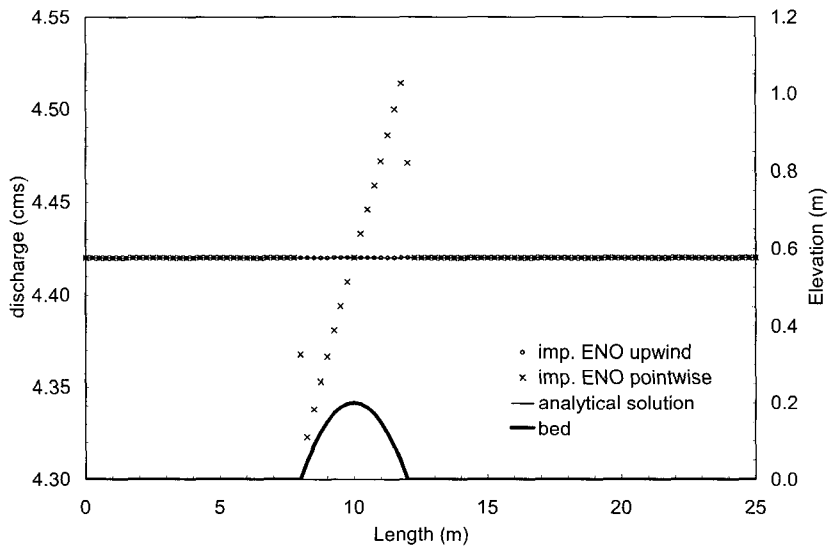


그림 6. 상류 상태의 경우 지점차분기법과 상류이송기법의 유량

와 유량에서 크고 작은 오차를 발생하는 것으로 나타났다. 이와 같은 오차를 줄이기 위해 본 연구에서 제시한 상류이송기법을 사용한 결과 흐름조건에 관계없이 모든 경우에서 해석해와 정확하게 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 다만 도수가 발생하는 한 지점에서만 유량이 해석해와 일치하지 않는 것으로 나타났는데 이것은 현재까지 개발된 상류이송기법들의 일반적인 특징으로 (Goutal와 Maurel, 1997) 고정확도 기법에서는 이와 같은 오차를 줄일 수 있을 것으로 기대되고 있다.

3.2 하폭 변화 하도의 정상류

하폭이 변화하는 하도에서 발생하는 정상류에 대해 검증하기 위해 다음과 같이 하폭이 변화하는 500m 가

상하도를 이용하였다.

$$B = 5 - 3.587 \left(\sin \left(\pi \left(\frac{x-100}{300} \right) \right) \right)^2 \quad (28)$$

상류경계조건으로 유량 20.0m³/sec, 하류경계조건으로 1.775m를 설정하였는데 도수가 발생하는 흐름의 경우이다. 하상마찰은 없으며, 초기조건으로 유량 20.0m³/sec, 수위 2.0m를 설정하였다.

그림 7의 경우에는 계산된 수위와 해석해를 나타내고 있는데 지점차분기법에 의한 계산결과가 하폭이 줄어드는 부분에서 해석해보다 약간 크게 나타나고 있다.

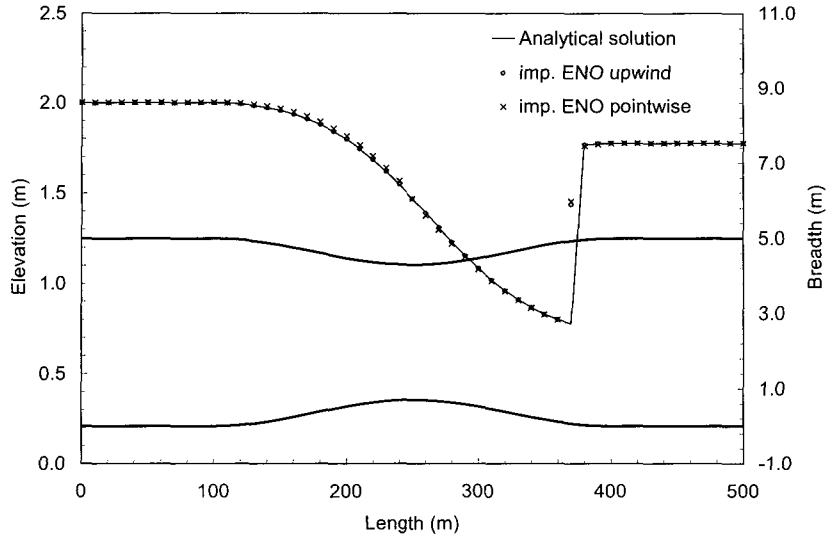


그림 7. 하폭이 변화하는 경우 지점차분기법과 상류이송기법의 수위

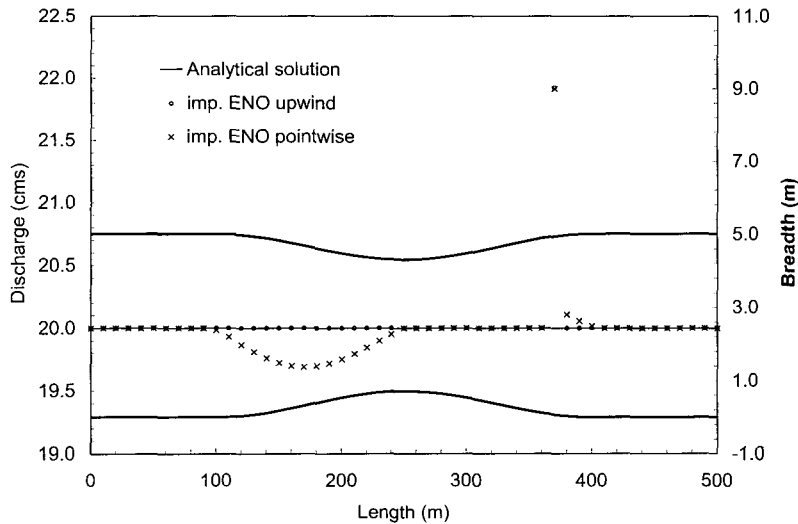


그림 8. 하폭이 변화하는 경우 지점차분기법과 상류이송기법의 유량

상류이송기법의 경우에는 해석해와 정확하게 일치하고 있다. 그림 8은 유량을 나타내고 있는데 지점차분기법의 경우 하폭이 줄어드는 부분에서 유량이 감소하였다가 도수가 발생하는 지점 부근에서 상승하는 불안정한 모습을 보이고 있다. 상류이송기법의 경우에는 도수가 발생하는 한 지점에서만 제외하고 전구간에서 해석해와 잘 일치하고 있다.

3.3 하상과 하폭이 변화하는 부정류

하상과 하폭이 매우 불규칙하게 변화하는 하도에서 발생하는 부정류에 대한 검증은 위해 댐붕괴 모의 워크샵에서 사용된 하도조건을 사용하였다(Goutal와 Maurel, 1997 ; Vazquez Cendon, 1999). 이 하도조건

은 해석해를 가지는 특별한 조건의 하상과 하폭으로 이루어지는데 그림 9에 나타낸 바와 같다. 이 경우 Manning의 마찰계수는 0.1이며 계산지점수는 200개이다. 초기조건과 경계조건은 다음 식으로 이루어진다.

$$h(x,0) = H(x) \quad (29)$$

$$u(x,0) = 0 \quad (30)$$

$$h(0,t) = H(0) + 4 + 4 \sin \left(\pi \left(\frac{4t}{86,400} - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (31)$$

$$u(L,t) = 0 \quad (32)$$

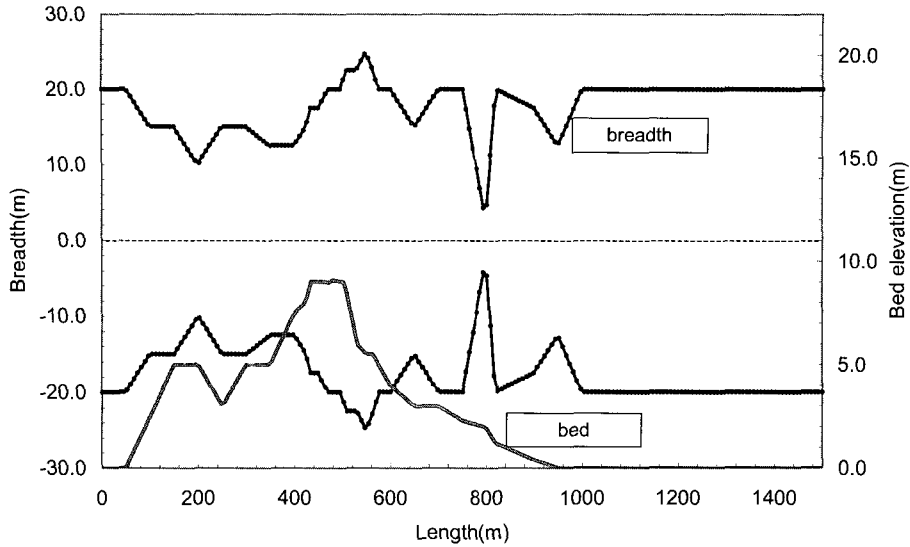


그림 9. 하상과 하폭의 변화양상(CASE1)

$$H(0) = 16m, L = 1500m, H(x) = H(0) - z(x) \quad (33)$$

그림 10과 그림 11은 생성항에 상류이송기법을 적용한 ENO 기법으로 계산된 것으로 하류방향으로 가장 큰 흐름이 형성되는 시각인 $t = 10,800\text{sec}$ 에 대한 결과를 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 생성항에 상류이송기법을 적용한 ENO 기법은 수위나 유량 모두 전구간에서 해석해와 정확하게 일치하고 있다. 생성항에 상류이송기법이 아닌 직접차분기법을 적용한 경우에는 이와 같은 흐름에 수렴하지 못하였다.

두 번째 경우는 첫 번째 경우에 비해 하폭의 변화가

단순화된 경우로서 하폭과 하상의 변화가 그림 12에 나타나 있다. 이 경우에도 생성항을 직접차분기법으로 처리한 경우에는 흐름에 수렴하는 계산을 하지 못하였다. 반면 생성항을 상류이송기법으로 처리한 ENO 기법은 수위와 유량에서 정확해와 일치하는 결과를 보여주고 있다(그림 13과 그림 14).

하상과 하폭이 매우 복잡하고 심하게 변화하는 경우 상류이송기법에서는 생성항의 처리를 위해 일반적인 직접차분기법을 사용할 경우 모의자체가 불가능한 것으로 나타났으며 상류이송기법을 이용하여 생성항을 차분하여야만 정확한 해에 수렴할 수 있는 것으로 나타났다.

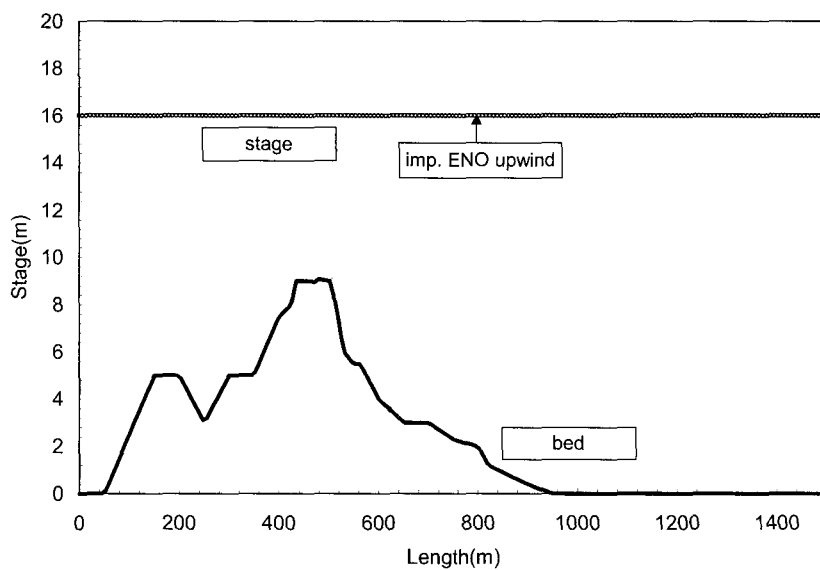


그림 10. 상류이송기법에 의한 수위($t=10,800\text{sec}$)

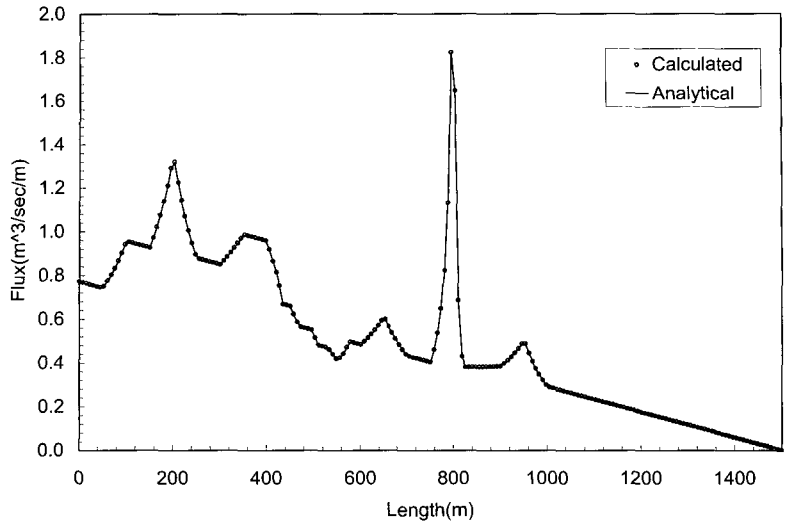


그림 11. 상류이송기법에 의한 단위폭당 유량($t = 10,800\text{sec}$)

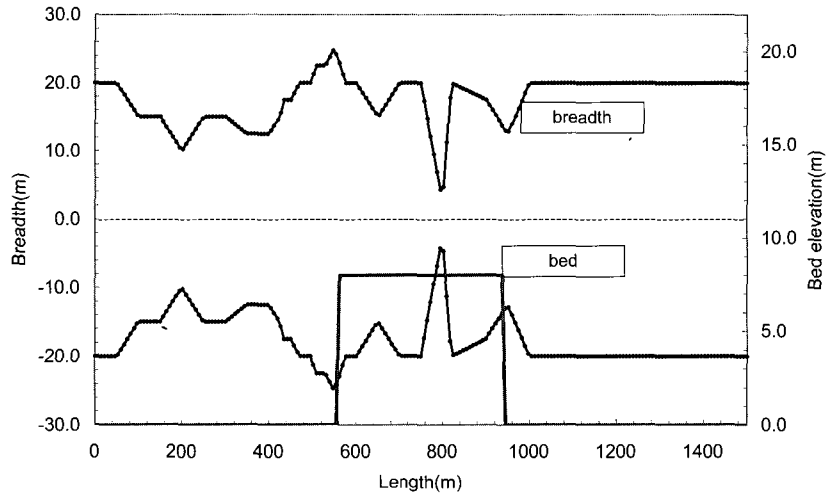


그림 12. 하상과 하폭의 변화양상(CASE2)

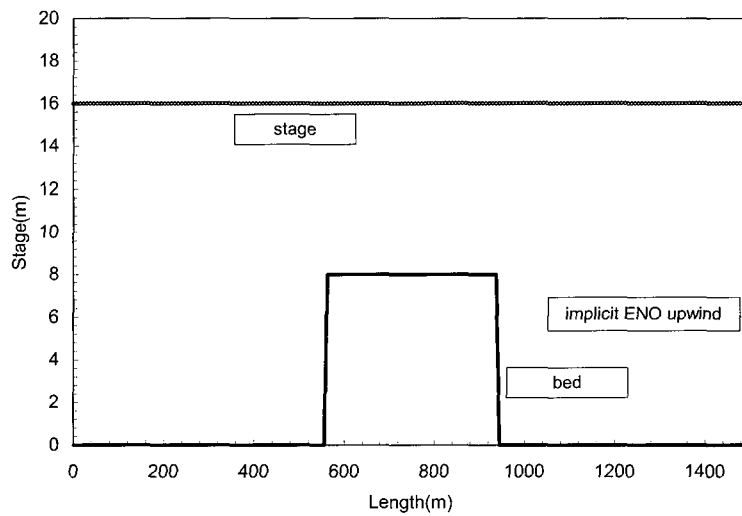


그림 13. 상류이송기법에 의한 수위($t = 32,400\text{sec}$)

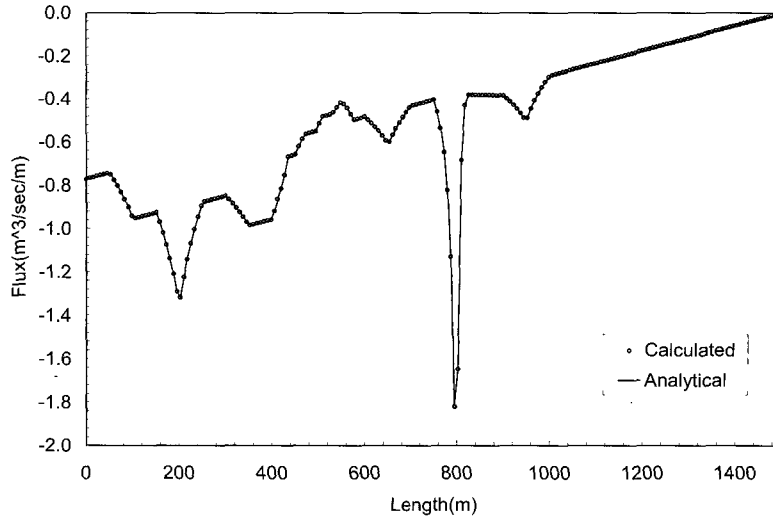


그림 14. 상류이송기법에 의한 단위폭당 유량($t = 32,400\text{sec}$)

4. 결 론

본 연구에서는 불연속 흐름의 모의를 위해 필요한 상류이송기법에서 가장 큰 한계로 남아있는 생성항의 처리를 위해 새로운 기법을 개발하였고, 이를 여러 가지 흐름조건에 적용하여 검증하였다. 주요 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 상류이송기법에서 생성항 처리를 위해 기존에 사용하던 지점차분기법은 생성항의 변화가 작은 경우에는 수위와 유량에서 오차를 발생시키며, 생성항의 변화가 큰 경우에는 수렴이 불가능한 것으로 나타났다.
- (2) 이와 같은 상류이송기법의 한계를 극복하기 위해 본 연구에서는 흐름항과 생성항이 동일하게 차분되어야 한다는 기본조건을 만족시킬 수 있도록 정규 Jacobian을 사용하여 생성항을 상류이송형태로 차분하는 기법을 새롭게 개발하였다.
- (3) 생성항을 상류이송형태로 차분하는 기법을 정상류, 부정류, 도수가 있는 경우와 없는 경우, 생성항의 크기가 작은 경우와 매우 큰 경우 등의 흐름에 적용한 결과 새롭게 개발된 기법이 매우 정확하게 여러 가지 흐름을 모의할 수 있는 것으로 나타났다.

본 연구에서 개발한 생성항을 위한 상류이송기법은 기법이 단순하고, 생성항 차분에 필요한 기본조건을 충족시켜서 정확하게 생성항을 처리할 수 있기 때문에 복잡한 하천지형 조건을 가진 자연하도에서 발생하는 불연속 흐름도 효과적으로 처리할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

이 논문은 한국과학재단의 해외 Post-doc. 연수지원에 의하여 연구되었으며 한국과학재단에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 강민구, 박승우 (2003). "ENO 기법을 이용한 2차원 유한체적 수치모형." **한국수자원학회논문집**, 제36권, 제1호, pp. 1-11.
- 김 원, 한건연 (2000a). "고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석 I. : 모형개발." **한국수자원학회논문집**, 제34권, 제1호, pp. 45-55.
- 김 원, 한건연 (2000b). "고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석 II. : 적용." **한국수자원학회논문집**, 제34권, 제1호, pp. 57-65.
- 김 원, 한건연, 김상호 (2001). "음해적 ENO 기법을 이용한 댐 붕괴류 해석." **대한토목학회논문집**, 제21권, 제4-B호, pp. 417-426.
- 이정규, 김태관 (2003). "댐붕괴 문제의 해석에 관한 TVD-McCormack 기법의 적용." **한국수자원학회논문집**, 제36권, 제3호, pp. 365-374.
- 이종욱, 조용식 (2001). "TVD 수치모형의 개발: II. 천수방정식." **한국수자원학회논문집**, 제34권, 제2호, pp. 187-195.
- 이종욱, 조용식, 윤광석, 윤태훈 (2001). "TVD 수치모형의 개발: I. 선형 이송방정식." **한국수자원학회논문집**, 제34권, 제2호, pp. 177-186.
- 전정숙, 이봉희, 조용식 (2003). "TVD 기법을 이용한 불연속 흐름의 수치해석." **한국수자원학회논문집**, 제36권, 제4호, pp. 597-608.

- Burguete, J., and Garcia Navarro, P. (2001). "Efficient construction of high resolution TVD conservative schemes for equations with source terms Application to shallow water flows." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 37, No. 2, pp. 209-248.
- Bermudez, A., and Vazquez, M.E. (1994). "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms." *Computers & Fluids*, Vol. 23, no. 8, pp. 1049-1071.
- Choi, S. U., and Paik, J.C. (2001). "Performance test of high resolution schemes for 1D dam break problem." *Journal of Civil Engineering*, KSCE, Vol. 5, No.3, pp. 273-280.
- Delis, A.I., Skeels, C.P., and Ryrie, S.C. (2000). "Implicit high resolution methods for modeling one dimensional open channel flow." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 38, No. 5, pp. 369-382.
- Garcia Navarro, P. and Vazquez Cendon, M.E. (1997). *Some considerations and improvements on the performance of Roe's scheme for 1D irregular geometries*, University of Zaragoza, Spain.
- Garcia Navarro, P. and Vazquez Cendon, M.E. (2000). "On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations." *Computers & Fluids*, Vol. 29, No. 8, pp. 951-979
- Gliaster, P. (1988). "Approximate Riemann solutions of the shallow water equations." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 26, pp. 293-306.
- Goutal, N. and Maurel, F. (1997). *Proceedings of the 2nd workshop on dam break wave simulation*, HE43/97/016/B.
- Hubbard, M.E. and Garcia Navarro, P. (2000). "Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients." *Journal of Computational Physics*, Vol. 165, No. 1, pp. 89-125
- LeVeque, R.J. (1998). "Balancing source terms and flux gradients in high resolution Godunov methods: the quasi steady wave propagation algorithm." *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, No. 1, pp. 346-365.
- Leveque, R.J. and Yee, H.C. (1990). "A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms." *Journal of Computational Physics*, Vol. 86, pp. 187-.
- MacCormack, R.W. (1969). "The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering." *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 69-354.
- Meselhe, E.A. (1994). *Numerical simulation of transcritical flow in open channels*, Ph.D. dissertation, Civil and Environmental Engineering, University of Iowa, Iowa.
- Nujic, M. (1995). "Efficient implementation of essentially nonoscillatory schemes for the computation of free surface flows." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 1, pp. 101-111.
- Roe, P.L. (1986) Upwind differenced schemes for hyperbolic conservation laws with source terms, *Proceedings of the Conference on Hyperbolic Problems*, Carasso Riaviart and Serre (Editors), pp. 41., Springer Verlag, New York.
- Toro, E.F. (1997). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Vazquez Cendon, M.E. (1999). "Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry." *Journal of Computational Physics*, Vol. 148, No. 2, pp. 497-526.
- Yang, J.Y. (1990). "Uniformly second order accurate essentially nonoscillatory schemes for the Euler equations." *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 12, pp. 2069-2076.
- Yang, J.Y. (1991). "Third order nonoscillatory schemes for the Euler equations." *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 10, pp. 1611-1618.
- Yang, J.Y., Hsu, C. A., and Chang, S.H. (1993). "Computations of free surface flows, Part 1 : Onedimensional dam break flow." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 31, No. 1, pp. 19-34.
- Zhou, J.G., Causon, D.M., and Ingram, D.M. (2001). "The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow water equations." *Journal of Computational Physics*, Vol. 168, No. 1, pp. 1-25.
- Zhou, J.G., Causon, D.M., Ingram, D.M., Mingham, C.G. (2002). "Numerical solutions of the shallow water equations with discontinuous bed topography." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 38, pp. 769-788.

(논문번호:04-106/접수:2004.12.01/심사완료:2005.01.28)