군표현의 역사와 기약지표들

한양대학교 응용수학과 **왕문옥**
wang@hanyang.ac.kr
한양대학교 응용수학과 **이광석**
mathore96@ihanyang.ac.kr

본 논문은 군표현에 관한 역사적 배경을 알아보고, 유한군의 기약지표에 대한 어떤 조건하에서 그 군이 자명하지 않는 아벨 정규부분군을 가짐에 대한 성질들과 기약지표들의 적에 대한 성질을 증명한다.

주제어 : 기약지표, 표현

0. 역사적 배경

표현론과 지표론은 유한군을 연구하는 데 중요한 수단임은 분명하다. 복소-표현과 지표은 120여년 전에 프로베니우스(G. Frobenius)에 의해 처음 연구되었다. 처음에 표현론은 추상대수의 공리계의 구체적인 실현에 대한 연구로서 치환군과 행렬다원환의 연구에 기원을 두었다. 특히, 군표현론은 19세기 후반에 프로베니우스에 의해 잘 정립되었다. 그리고 프로베니우스와 번사이드(Burnside)에 의해 정립되고 구체화된 군표현은 유한군론을 연구하는 데 중요한 역할을 하였다. 프로베니우스는 복소-표현과 복소-지표의 연구로부터 시작하여, 슈르(I. Schur)의 기여와 더불어 프로베니우스의 업적의 대부분은 복소수체 상에서 행렬에 의한 유한군의 표현론에 대한 연구였다. 실로, 지표의 도입 없이는 증명될 수 없었던 프로베니우스 정리와 이와 같은 몇 가지 중요한 결과가 있다.

프로베니우스의 업적과 함께 1911년에 번사이드가 집필한 책 *Theory of groups of finite order*는 표현론에 체계적인 접근을 준 첫 번째 산물이었다. 또한, 그 책에는 군지표를 이용해 증명된 추상군에 대한 많은 결과들이 들어 있다. 그중 가장 유명한 정리는 번사이드의 $p^a q^b$-정리일 것이다. 그 후, 톰프슨(Tompson)은 위의 정리를 순수한 군-이론적 증명을 하였다. 물론 톰프슨의 증명은 군의 구조론에 매우 중요한 역할을 하였으나 그것은 최초의 군지표을 이용한 원래의 증명보다 매우 복잡하다.

1929년에 뇌터(N. Noether)는 표현론이 환과 다원환 상에서 가군의 연구를 통해 이

해될 수 있다는 사실을 입증하였다. 환과 다원환의 표현론은 반단순환의 고전적 이론에 새로운 방향을 제시하였고, 프로베니우스 다원환과 준 프로베니우스환의 카야마(N. Kayama)의 이론에 초점을 두는 최소 조건을 가진 환의 새로운 연구의 장을 열었다.

유한군의 모듈러 표현에 대한 브라우어(R. Brauer)의 업적은 표현론에 또 다른 중요한 발전을 가져왔고, 그것은 유한군의 이론에 매우 중요한 응용문제였다. 또한, 그것은 다원환 표현론에 획을 그었고, 최소 조건에서 가군과 환에 대한 새로운 문제를 제시하였다.

1950~1960년 동안, 군과 환의 적분표현론은 호몰로지 대수와 비가환환에서 계산하는데 있어 몇 가지 과제와 가설을 불러일으켰다. 10년 후에, 다른 주제인 대수적인 K-이론이 적분 표현론에 큰 영향을 보였다. 1970년대에 위상적 K-이론이 발전되었고, 아티야-싱어(Atiyah-Singer)의 지수정리에 응용되었다. 이 위상적 K-이론의 몇 가지 매우 좋은 성질이 성립하는데 이를 보트(Bott)의 주기성 정리라고 한다. 이 일반화된 호몰로지 이론은 어떤 의미에서 K-이론의 간단한 대수적인 재 공식화하는 것이다. 그러나 대수적인 K-이론은 주기성 정리를 만족시키지 못한다. 그래서 그것은 위상적인 K-이론보다 더 복잡하다. 그런 복잡함과는 달리 대수적 K-이론은 표현론에서 매우 중요한 새로운 문제를 제시하였다. 이 해법은 위상기하학과 대수적인 정수론의 새로운 응용문제를 가져다주었다. 마지막 역사적인 소고로서, 표현론과 기하학 사이에 다른 상호관계가 있다. 이것은 리(Lie)형의 유한군의 표현에서 나타난다. 그 예로서 알려진 지표표를 표준방법에 의해 만들기 어려운 어떤 표현이 있다. 극적인 전환점에서, 들리뉴(Deligne)와 루스치히(Lusztig)는 대수다양체에서 군의 작용의 체계적인 연구를 통해 이것과 다른 표현을 만들기 위한 일반적인 방법을 찾았다. 표현론과 지표론은 유한군의 연구에 중요한 도구이다. 복소표현론과 그 지표는 프로베니우스에 의해 연구되었으며 추이치환군에 대한 그의 이론은 첫 번째 중요한 결과물이었다. 그것은 오늘날 번사이드의 $p^a q^b$-정리와 함께 표현론에 대한 첫 번째 과정의 최고중의 하나로 남아있다. 그리고 번사이드의 정리(지표론의 마직막 대부분)은 대수적 정수의 성질에 의존한다.

본 논문에서 모든 군 G는 유한군이고, 군 G의 모든 지표는 복소지표를 의미하고 $Irr(G)$를 G의 모든 기약 복소 지표들의 집합을 나타낸다.

1. 서론

A와 B를 F-다원환이라 할 때, 다음 세 가지 조건을 만족하는 사상 $\phi: A \to B$를 다원환준동형사상 또는 F-준동형사상이라고 한다.

(1) 모든 $x, y \in A$에 대하여 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$이다. (2) $\phi(1)=1$.
(3) ϕ는 F-선형변환이다

G를 군, F를 체라 하자. 또한 V를 F 상에서 유한차원 벡터공간을 나타낼 때. 군준동형사상 $T: G \to GL(V)$을 G의 F-표현이라 한다. 여기서 $GL(V)$는 V의 일반선형변환군을 나타낸다. 또한, $GL_n(F)$를 F 위의 n차의 전행렬다원환이라 할 때 군준동형사상 $\phi: G \to GL_n(F)$를 G의 n차의 F-행렬표현이라 하고, 이때 n을 T 또는 ϕ의 차수라 하고, 각각 $\deg T$, $\deg \phi$로 나타낸다.

V가 F-벡터공간으로서 유한 차원을 갖는 A-가군일 때, $T: G \to GL(V)$를 F-표현이라고 하면 다음과 같은 정의를 할 수 있다.

(1) $\dim_F V$은 T의 차수이다. (2) V가 기약이면 즉, V가 오직 부분가군 $\{0\}$과 V만을 가질 때, T는 기약이다. (3) V가 가약이면 T는 가약이다. (4) V가 완전가약이면 즉, 모든 V의 부분가군 W에 대해서 $V = W \oplus U$을 만족하는 V의 다른 부분가군 U가 존재할 때 T는 완전가약이다. 마찬가지로, F-행렬표현도 정의된다.

G가 유한군이고, $F[G]$가 형식적 합 $\{ \sum_{x\in G} a_x x \mid a_x \in F \}$의 집합들이라면, $F[G]$는 F-다원환이며, 이를 F 상에서 G의 군다원환이라 한다. 여기서 벡터공간의 구조는 일상적인 방법으로 정의되어지고, 곱셈은 G에서의 곱셈을 사용해서 1차로 정의된다. $1g \in F[G]$ ($1 \in F$)를 $g \in G$와 동일시하면 $G \subseteq F[G]$이며, 이때 G는 $F[G]$의 기저이다. T와 S를 각각 기약 $F[G]$-가군 V와 W에 의해 주어진 기약 F-표현이라고 하자. 이때, 적당한 기저들에 대하여 T의 행렬표현 $\phi(x) = [\alpha_{ij}(x)]$가 주어지고, 또한 S의 행렬표현 $\psi(x) = [\beta_{ij}(x)]$가 주어지면 다음과 같은 성질을 얻을 수 있다.

(1) $V \not\cong_{F[G]} W$이면, 모든 i, j, k, l에 대하여 $\sum_{x\in G} \beta_{ij}(x^{-1})\alpha_{kl}(x) = 0$이다([1],[3],[5]).

(2) F가 대수적 폐체이고, $charF \nmid |G|$이면, $\sum_{x\in G} \alpha_{ij}(x^{-1})\alpha_{kl}(x) = \delta_{jk}\delta_{il}\dfrac{|G|}{\deg T}$이다 ([3], [5]).

G가 유한군이고, F을 체라 할 때, 함수 $f: G \to F$가 모든 $x, y \in G$에 대해서 $f(x^{-1}yx) = f(y)$일 때 f를 류함수라 한다. $Cf_F(G, F)$를 F 상에서 G의 모든 류함수들의 집합이라고 하면, $Cf_F(G, F)$는 F-벡터공간이 된다. F가 대수적 폐체일 때, $Cf_F(G, F)$에서 내적을 $[f_1, f_2] = [f_1, f_2]_G = \frac{1}{G} \sum_{x\in G} f_1(x) f_2(x^{-1})$로 정의한다.

T가 G의 F-표현이라고 하면, T에 의해 주어진 G의 F-지표 χ는 $\chi(g)=trT(g)$로 정의된 함수이다. G의 동치인 F-표현에 의해 주어진 지표는 같은 지표이고, 모든 지표들은 류함수이다. 그리고 $\overline{\chi(g)}$은 복소수체 내에서 $\chi(g)$과 공액이므로 $\chi(g^{-1})=\overline{\chi(g)}$ 이다. 따라서 다음 **직교관계**([2], [3], [4])를 얻을 수 있다.

χ와 ζ가 각각 기약 $F[G]$-가군 V와 W에 의해 주어진 지표라고 한자. 여기서 $\dim_F V=n$, $\dim_F W=m$이라 하면,

(1) 어떤 체 F에 대해, $V\not\cong_{F[G]}W$이면 $[\chi,\zeta]_G=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi(x)\zeta(x^{-1})=0$이다.

(2) F가 대수적 폐체이고, $charF\nmid|G|$이면, $[\chi,\chi]_G=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi(x)\chi(x^{-1})=1$이다.

(3) F가 $charF\nmid|G|$인 대수적 폐체이고 G가 r-공액류 $\mathscr{C}_1,\cdots,\mathscr{C}_r$를 갖는다고 하자. 이때, $h_i=|\mathscr{C}_i|$라 하고 $x_i\in\mathscr{C}_i$를 택하며, G의 기약지표들을 $\chi_1,\cdots,\chi_r$로 나타내면, $\sum_{l=1}^{r}\chi_l(x_i)\chi_l(x_j^{-1})=\frac{\delta_{ij}|G|}{h_j}=\delta_{ij}|C_G(x_j)|$ ($C_G(x_j)$는 중심화부분군).

또한, $Irr(G)$가 유한군 G의 모든 복소-기약지표들의 집합이라고 하면, $|Irr(G)|$은 G의 공액류들의 개수와 같고, $\sum_{\chi\in Irr(G)}\chi(1)^2=|G|$이다.

모든 $\chi_i\in Irr(G)$에 대한 $\chi=\sum_{i=1}^{n}n_i\chi_i$가 G의 F-지표들이면, $n_i>0$일 때 χ_i를 χ의 기약성분이라고 한다. 따라서 군 G가 아벨군이기 위한 필요충분조건은 모든 기약지표들의 차수가 1이다.

2. 본론

보조정리 1. χ가 아벨군 A의 지표이면 $\sum_{x\in A}|\chi(x)|^2\geq|A|\chi(1)$이다.

증명. $\chi_i\in Irr(A)$이고 n_i가 양의 정수일 때, $\chi=\sum_{i=1}^{k}n_i\chi_i$라 하자. 이때, A가 아벨군이기 때문에 모든 $i=1,2,\cdots,n$에 대해서 $\chi_i(1)=1$이며, 또 χ_i는 준동형사상이다. 따라서

$$\chi(x)\ \chi(x^{-1})=(\sum_{i=1}^{k}n_i\chi_i(x))(\sum_{j=1}^{k}n_j\chi_j(x^{-1}))=\sum_{1\leq i,j\leq k}n_in_j\chi_i(x)\ \chi_j(x^{-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \chi_i(x)\chi_i(x^{-1}) = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$$

한편, $\chi(1) = \sum_{i=1}^{k} n_i\chi_i(1) = \sum_{i=1}^{k} n_i \le \sum_{i=1}^{k} n_i^2$이므로, 위의 결과로부터 다음을 얻는다.

$$\sum_{x\in A} |\chi(x)|^2 = \sum_{x\in A} \left| \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \right| = |A| \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \ge |A|\chi(1)$$

보조정리 2. A가 G의 아벨부분군이면, 모든 $\chi \in Irr(G)$에 대해서 $\chi(1) \le |G:A|$이다.

증명. 모든 $\chi \in Irr(G)$에 대해서 $[\chi, \chi] = 1$이므로

$$|G| = |G|[\chi, \chi] = \sum_{g\in G} |\chi(g)|^2 \ge \sum_{x\in A} |\chi(x)|^2$$

따라서 보조정리 1에 의하여 $|G| \ge |A|\chi(1)$ 이므로 $\chi(1) \le |G: A|$이다.

보조정리 3. χ가 G의 기약지표이면, $\chi(1)$은 $|G: Z(G)|$를 나눈다.

증명. [2]를 참고.

보조정리 3에서, G의 모든 기약지표들에 대해서 $|G: Z(G)|$이 $\chi(1)$에 의해 나눠지는 G의 부분군이 적어도 하나는 존재한다. 그래서 A가 G의 부분군일 때, $|G: A|$는 기약지표 $\chi(1)$에 의해 나눠질 수 있다고 할 수 있다.

보조정리 4 (Ito 정리). A가 G의 정규 아벨부분군이면, 모든 $\chi \in Irr(G)$에 대해서 $\chi(1)$는 $|G: A|$를 나눈다. .

증명. $[\chi_A, \lambda] \ne 0$인 $\lambda \in Irr(A)$에 대하여 $T = I_G(\lambda)$ (G에서 λ의 관성군)이라 하면, 어떤 $\psi \in Irr(T)$에 대해서, $\chi = \psi^G$와 $\psi_A = e\lambda$이다. 따라서 $A \subseteq Z(\psi)$이고, 또 $\psi(1)$은 $|T: A|$를 나눈다. 한편, $\chi(1) = \psi^G(1) = |G: A|\psi(1)$이므로 위의 결과에 의하여 $\chi(1)$는 $|G: A|$를 나눈다.

정리 1. G는 군이고, A_i가 G의 분할 아벨부분군일 때 $G = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$라고 하자. 이 때, $\chi \in Irr(G)$이고 또 $\chi(1) > 1$이면, $\chi(1) \ge \frac{|G|}{n-1}$ 이다.

증명. 앞에서 $|G|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-(n-1)$이고 다음이 성립한다.

$$|G|=\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in A_i}|\chi(x)|^2-(n-1)\chi(1)^2$$

따라서 보조정리 1에 의하여, $\sum_{x\in A_i}|\chi(x)|^2\geq|A_i|\chi(1)$이므로

$$\begin{aligned}|G|+(n-1)\chi(1)^2&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in A_i}|\chi(x)|^2\\&\geq\sum_{i=1}^{n}|A_i|\chi(1)=\chi(1)(|G|+(n-1))\end{aligned}$$

그러므로 $(n-1)\chi(1)(\chi(1)-1)\geq|G|(\chi(1)-1)$을 얻는다. 따라서 $\chi(1)\geq\frac{|G|}{n-1}$이다 .

정리 2. A가 G의 아벨부분군이면 G는 적어도 $\frac{|A|^2}{|G|}$개의 공액류를 갖는다.

증명. k를 G의 공액류들의 개수라면, 보조정리 2에 의하여 모든 $\chi\in Irr(G)$에 대해서 $\chi(1)\leq|G:A|$이다. 따라서 $\sum_{i=1}^{k}|\chi_i(1)|^2\leq\sum_{i=1}^{k}|G:A|^2=k|G:A|^2$이므로 $\frac{|A|^2}{|G|}\leq k$이다.

정리 3. G를 아벨군이 아니라고 하자. 이때, A_i가 G의 분할 아벨부분군이며 $G=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$라 하면, 각 i에 대하여 $|A_i|\leq n-1$이고 또 $n-1\geq(|G|)^2$이다.

증명. 보조정리 2와 정리 1에 의하여, $i=1,2,\cdots,n$에 대해 $\chi(1)\leq\frac{|G|}{|A_i|}$이고 또 $\chi(1)\geq\frac{|G|}{n-1}$이다. 따라서 $|A_i|\leq n-1$ 이고 또 $\sum_{i=1}^{n}|A_i|\leq n(n-1)$이다. 그러므로 $|G|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-(n-1)\leq n(n-1)-(n-1)=(n-1)^2$이고, 따라서 $n-1\geq(|G|)^{\frac{1}{2}}$이다.

정리 4. $H\subseteq G$이고 또 χ가 $G-H$에서 0이 되는 G의 지표라고 하자. 이때, $H=1$ 이거나 또는 G가 아벨군이면 $|G:H|$은 $\chi(1)$를 나눈다.

증명. $H=1$이면, $\chi=\rho$은 정칙지표이므로 $|G:H|=|G|=\rho(1)=\chi(1)$이다. 한편

G가 아벨군이고 $H\neq 1$이라고 하자. 이때, λ를 χ_H의 기약성분이라면, $\lambda\in Irr(G)$이고 $\lambda(1)=1$이다. 따라서 $\mu_H=\lambda$을 만족하는 $\mu\in Irr(G)$가 존재하므로

$$[\chi,\mu]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\mu(g^{-1})=\frac{1}{|G|}\sum_{h\in H}\chi(h)\mu(h^{-1})$$
$$=\frac{|H|}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(h)\mu(h^{-1})=\frac{|H|}{|G|}[\lambda_H,\lambda]$$

그러므로 $|G:H|[\chi,\mu]=[\chi_H,\lambda]$이다. 즉, $|G:H|$는 $[\chi_H,\lambda]$를 나눈다. 한편, G가 아벨군이므로 $H\lhd G$이고, 또 $\lambda_i\in Irr(H)$에 대하여 $\chi_H=e\sum_{i=1}^{t}\lambda_i(1)$이다. 따라서 $[\chi_H,\lambda]=e$ 이고 또 $\chi(1)=et$이므로 $[\chi_H,\lambda]$은 $\chi(1)$를 나눈다. 그러므로 위 결과에 의하여 $|G:H|$은 $\chi(1)$를 나눈다.

정리 5. A가 군 G의 아벨부분군이라고 하자. 이때, $\chi(1)=|G:A|$인 $\chi\in Irr(G)$가 존재하면 G는 자명하지 않는 정규 아벨부분군을 갖는다.

증명. 보조정리 1에 의하여 $\frac{1}{|A|}\sum_{x\in A}|\chi(x)|^2\geq\chi_A(1)=\chi(1)=\frac{|G|}{|A|}$이므로 $\sum_{x\in A}|\chi(x)|^2\geq|G|=\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2$이다. 그러나 $\sum_{x\in A}|\chi(x)|^2\geq\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2$이므로 $\sum_{x\in A}|\chi(x)|^2=\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2$이고, 또 χ는 $G-A$에서 0이 된다. 한편, 모든 $g\in G$에 대하여 $gag^{-1}\notin A$이며, 위수가 $o(a)=m$인 $a\in A$가 존재한다고 가정하면, $\chi_A(gag^{-1})=0$이다.

또한, A가 아벨군이기 때문에, $\chi_A(gag^{-1})$를 m번 곱한 결과는 다음과 같다.

$$0=\chi_A(gag^{-1})\cdots\chi_A(gag^{-1})=\chi_A(ga^mg^{-1})=\chi_A(1)=\chi(1)>0$$

따라서 이것은 모순이기 때문에 $A\lhd G$이다.

정리 6. A를 G의 아벨부분군이라고 하자. 이때, $\chi(1)=|G:A|$인 $\chi\in Irr(G)$이 존재하면, 모든 $\theta\in Irr(G)$에 대하서 $\theta(1)$은 $|G:A|$를 나눈다.

증명. Ito 정리와 정리 5에 의하여 이 정리는 분명하다.

다음은 군 G의 두 개의 부분군과 그 지표들의 곱에 대해서 생각해보자. $G=H\times K$이고, ϕ와 θ를 각각 H와 K의 지표라고 하자. 이때, 모든 $h\in H$와

$k \in K$에 대해서 $\chi(hk) = \phi(h)\theta(k)$로 $\chi = \phi \times \theta$를 정의하자. 그러면 $\phi \in Irr(H)$와 $\theta \in Irr(K)$에 대하여 $\phi \times \theta \in Irr(G)$이 됨을 알 수 있다

성질 1. $G = H \times K$라 하고, $\phi \in Irr(H)$와 $\theta \in Irr(K)$를 충실한 지표라 하자. 이때, $\phi \times \theta$가 충실한 지표가 되기 위한 필요충분조건은 $|Z(H)|$와 $|Z(K)|$가 서로소이다.

증명. $\phi \in Irr(H)$와 $\theta \in Irr(K)$가 충실하면, $Z(\phi) = Z(H)$이고 $\phi \times \theta \in Irr(G)$이다. 이제, $|Z(H)|$와 $|Z(K)|$가 서로소라 가정하고 $\ker(\phi \times \theta) = (1, 1)$임을 보이자. 한편, $(h, k) \in \ker(\phi \times \theta)$이라 하면, $\phi(h)\theta(k) = \phi(1)\theta(1)$이다. 따라서 $|\phi(h)||\theta(k)| = \phi(1)\theta(1)$이다. 또한, $\phi(h) \leq \phi(1)$이고 $\theta(k) \leq \theta(1)$이므로 위의 두 관계식을 곱하면, $\phi(h)\theta(k) \leq \phi(1)\theta(1)$이다. 여기서 등호는 $|\phi(h)| = \phi(1)$와 $|\theta(h)| = \theta(1)$일 때 유효하다. 따라서 $h \in Z(\phi)$이고 $k \in Z(\theta)$이고, $o(h)$와 $o(k)$는 서로소이다. 반면에 $h \in Z(\phi)$이면 1의 $o(h)$-승근 ε_1에 대하여 $\phi(h) = \varepsilon_1\phi(1)$이다. 마찬가지로, ε_2가 1의 $o(k)$-승근일 때, $\theta(k) = \varepsilon_2\theta(1)$가 성립한다. 그러므로 $\phi(h)\theta(k) = \varepsilon_1\varepsilon_2\phi(1)\theta(1)$이며, 따라서 $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$이다. 결국, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^{-1}$는 1의 $o(h)$-승과 $o(k)$-승근이다. 위에서 $o(h)$와 $o(k)$가 서로소이므로 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$이다. 따라서 $\phi(h) = \phi(1)$이고 $\theta(h) = \theta(1)$이다. 즉, $h \in \ker\phi$이고 $k \in \ker\theta$이다. 그러나 ϕ와 θ가 충실한 지표이므로 $h = 1$이고 $k = 1$이다.

역으로, $\phi \times \theta$가 충실하다고 가정하자. $Z(\phi)$와 $Z(\theta)$가 서로소임을 보이기 위하여 만약 이들이 서로소가 아니라면 $Z(\phi)$와 $Z(\theta)$의 공약수인 소수 p가 존재한다. 따라서 위수가 동시에 p인 $h \in Z(\phi)$와 $k \in Z(\theta)$가 존재한다. 앞에서처럼 위수 p에 대한 1의 p-승근 ε, δ에 대해서 $\phi(h) = \varepsilon\phi(1)$이고 $\theta(k) = \delta\theta(1)$이다. 한편, $o(h) = o(k) = p$는 $h \neq 1$이고 $k \neq 1$임을 뜻한다. 충실성에 의해 $\varepsilon \neq 1$이고 $\delta \neq 1$이다. 따라서 1의 ε, δ 근들이기 때문에, $\varepsilon^n = \delta^{-1}$을 만족하는 n이 있다. 그리고 $p \nmid n$이다. 그러므로 $h^n \neq 1$이고, $\phi(h^n) = \varepsilon^n\phi(1) = \delta^{-1}\phi(1)$이다. 따라서 $(\phi \times \theta)(h^n, k) = \phi(h^n)\theta(k) = \delta^{-1}\phi(1)\delta\theta(1) = \phi(1)\theta(1) = (\phi \times \theta)(1, 1)$. 이때, $(h^n, k) \in \ker(\phi \times \theta)$와 $(h^n, k) \neq (1, 1)$은 $\phi \times \theta$의 충실성에 모순이 된다. 따라서 $|Z(H)|$와 $|Z(K)|$는 서로소이다.

정리 7. 아벨군 A에 대하여 $G = H \times A$라고 하자. 이때 $n > 0$을 $(|H|, n) = 1$인 정수라면, 모든 $\chi \in Irr(G)$에 대하여 $\chi^{(n)} \in Irr(G)$이다.

증명. $\phi \in Irr(H)$이고 $\theta \in Irr(K)$이면, $\phi \times \theta \in Irr(G)$이므로 모든 $\chi \in Irr(G)$에 대해서, $\chi = \phi \times \theta$라 놓을 수 있다. 따라서 $\chi^{(n)}(1) = \chi(1^n) = \chi(1) > 0$이다. 한편,

$h\in H$이고 n이 양의 정수이므로 $k_n(h)=|\{g\in H \mid g^n=h\}|$라고 하자. 또한, $(|H|, n)=1$이므로 $nm\equiv 1 \pmod{|H|}$을 만족하는 정수 m을 선택할 수 있다. 따라서 $g^n=k^n$이라면, $g=g^nm=k^nm=k$이고, 모든 $h\in H$에 대해서 $k_n(h)\le 1$을 얻는다. 한편, 사상 $g\to g^n$이 G에서 일대일 대응이기 때문에, 모든 $h\in H$에 대해서 $k_n(h)=1$이다. 그러므로

$$\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}|\phi(h^n)|^2=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}|\phi(h)|^2=1$$

또한, A가 아벨군이기 때문에 A의 각 공액류들은 단 하나의 원소를 가짐으로

$$\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}|\theta(a^n)|^2=\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}|\theta(a)|^2=1$$

따라서 위의 결과들로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}[\chi^{(n)}, \chi^{(n)}] &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{(n)}(g)\overline{\chi^{(n)}(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^n)\overline{\chi(g^n)} \\ &= \frac{1}{|H||A|}\sum_{h\in H,\, a\in A}\theta(h^n)\theta(a^n)\overline{\theta(h^n)\theta(a^n)} \\ &= \left(\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}|\phi(h^n)|^2\right)\left(\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}|\theta(a^n)|^2\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

그러므로 $\chi^{(n)}\in Irr(G)$이다.

참고 문헌

1. M.J. Collins, *Representations and Characters of Finite Groups*, Cambridge Univ. Press, New York, 1989.
2. L. Dornhoff, *Group Representation Theory*, Dekker, New York, 1971.
3. I.M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Dover Pub. Inc., New York, 1994.
4. I.M. Isaacs, *Algebra, a graduate course*, Brooks Cole Pub. Com. Pacific Grove, California, 1994.
5. W. Ledermann, *Introduction to Group Characters*, Cambridge Univ. Press, New York, 1987.

On the History and the Irreducible Characters in Group Representations

Department of Applied Mathematics, Hanyang University **Moon-ok Wang**
Department of Applied Mathematics, Hanyang University **Kwang-suk Lee**

In this paper, we know the historical background in group representations and prove the properties such that a finite group G has non-trivial abelian normal subgroup in some condition for the irreducible character of G and prove the properties of product of irreducible characters of finite groups.

Key words: irreducible character, representation.

2000 Mathematics Subject Classification: 20C15

논문 접수: 2004년 12월 6일, 심사 완료: 2005년 1월