

다공질 박판의 유효 직교 이방성 크리프 파라미터 계산

정일섭[#]

Evaluation of Effective Orthotropic Creep Parameters for Perforated Sheets

Ilsup Chung[#]

ABSTRACT

Evaluating the effective properties of materials containing various types of in-homogeneities is an important issue in the analysis of structures composed of those materials. A simple and effective method for the purpose is to impose the periodic displacement boundary conditions on the finite element model of a unit cell. Their theoretical background is explained based on the purely kinematical relations in the regularly spaced in-homogeneity problems, and the strategies to implement them into the analysis and to evaluate the homogenized material constants are introduced. The creep behavior of a thin sheet with square arrayed rectangular voids is characterized, where the orthotropy is induced by the presence of the voids. The homogenization method is validated through the comparison of the analysis of detailed model with that of the simplified one with the effective parameters.

Key Words : Effective Creep Parameter(유효 크리프 파라미터), Orthotropy(직교 이방성), FEM(유한요소법), Unit Cell(단위 격자), Homogenization(균질화), Periodic Deformation Boundary Condition(주기적 변형 경계 조건), Perforated Sheet(다공질 박판),

1. 서론

불균질성이 내재된 재료의 예로는, 섬유나 입자 형태의 보강재를 함유한 첨단 복합재료, 수십만 개의 구멍이 가공되어 있는 CRT의 새도우 마스크, 열교환기의 관판(tube sheet), 적층된 벽돌 구조물, 또는 규칙 배열된 강심 보강 콘크리트 등을 들 수 있는데, 이들 불균질성 개재물(inclusion)은 재료의 거시적 거동에 크게 영향을 미친다. 보통, 이들 개재물의 크기는 거시적 구조물에 비하여 미세할 뿐 아니라 그 개수 또한 무수히 많아서, 이론적 혹은 수치적 해석에서 모든 개재물을 실제 형상 그대로

고려하는 것은 효율적이지 못하며 대부분의 경우 가능하지 않다.

일정한 개재물이 규칙적으로 배열된 경우에는, 재료의 특성을 대표할 수 있어서 이를 적층함으로써 전체 재료를 재구성할 수 있는 단위 격자(unit cell)가 정의될 수 있으며, 이의 성질을 규명함으로써 재료의 유효 물성치를 계산할 수 있다. 따라서, 단위 격자에 대한 경계치 문제를 풀으로써 유효 물성치를 구하고자 하는 노력이 있어 왔다. 그러나, 많은 경우, 다양한 형태의 개재물에 대한 엄밀한 수학적 접근이 용이하지 않아 대부분의 연구자들은 수치적 방법에 의존하여 왔다. 이와 같은 많

접수일: 2004년 7월 27일; 게재승인일: 2004년 11월 19일
 # 영남대학교 기계공학부
 E-mail ilchung@yu.ac.kr Tel. (053) 810-3525

은 연구 가운데 예로 O'Donnell^{1,2}, Baik^{3,4}, Theocaris⁵, Park⁶, Kang⁷ 등을 들 수 있다. 단위 격자에 대한 해석의 문제점은 그 정확한 경계 조건을 미리 알 수 없다는 것이다. 가장 간단한 방법으로 균일 변위 또는 응력을 경계 절점에 가하고 단위 격자의 거동을 평균함으로써 유효 물성치를 구할 수 있지만, 이는 실제와는 상이한 경계 조건이므로 구해진 물성치에는 오차가 있을 수 밖에 없다. 여러 개의 단위 격자 모델을 사용함으로써 그 영향을 감소시킬 수 있으나, 이론적으로는 무한대 개의 격자 모델링을 하여야 정확한 결과를 얻을 수 있다.

거시적으로 균일한 응력장이 가해지더라도, 실제 단위 격자내의 응력과 변형율은 균일하지 않으나, 수많은 단위 격자가 반복되어 있을 경우 이들이 주기적으로 반복된다는 점에 착안한 점근적 균질화(asymptotic homogenization) 기법은 단위 격자내에서 발생하는 짧은 주기의 변동을 고려할 수 있어서 정확한 해를 구할 수 있는 적절한 방법이다. 이를 이용한 연구로 Meguid⁸, Kalamkarov⁹, Lee¹⁰, Ghosh¹¹, Jang¹², Ohno¹³, Yun¹⁴, Hassani¹⁵ 등을 들 수 있는데, 극히 단순한 기하학적 형상이나 물성치의 경우를 제외하고는 모두 점근적 균질화 기법에 입각한 유한요소해석 프로그램을 코우딩하여 해석을 수행하고 후처리 과정을 거쳐 균질화 물성치를 구하고 있다.

한편, Anthoine¹⁶은 단위 격자의 주기적 변형 경계 조건을 직관적으로 제시하였고, 라그랑주(Lagrange) 승수법을 이용하여 변형률의 주기성을 단위 격자 모델에 부과할 수 있도록 하였다. 역시 해석 코우드의 수정이 필요하였으나, 균질화 물성치를 매우 간단히 구할 수 있는 방법을 제시하였다. 이 보다 더욱 간편한 방법으로 Chung¹⁷은 단위 격자의 경계 절점에 적절한 운동 구속 조건을 부여하고, 경계의 특정 절점의 변위만으로 탄성 물성치를 정확히 구할 수 있음을 보였다.

본 연구에서는 Chung¹⁷이 제시하였던 운동 구속 조건을 보다 일반화하여 3 차원, 비선형, 혹은 시간 의존적 문제의 적용이 가능함을 보였다. 이는 평행 사변형이나 평행 육면체의 단위 격자와 같이 경사 좌표계를 사용하는 경우에도 적용이 가능하다. 이어서, 단위 격자의 유한 요소 모델에 대한 구속 조건 부여 및 하중 부과 방법을 살펴보고, 이를 이용하여 직사각형 기공을 가진 박판의 유효 크리프 물성치를 구하고 비교함으로써 그 유용성

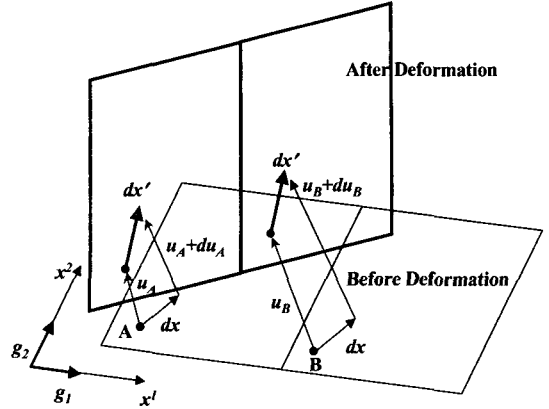


Fig. 1 Schematic diagram for the periodic deformation of adjacent unit cells

을 검증한다. 제시된 방법은 기존의 일반적 유한 요소 프로그램을 수정 없이 사용할 수 있으며, 유효 물성치의 계산 또한 매우 간단하고 정확하다는 장점을 가진다.

2. 주기적 변형 경계 조건

2.1 주기적 불균질 재료의 변형

거시적 균일 응력장에서 주기적 불균질 재료의 변형은 Fig. 1에 나타낸 것과 같은 주기성을 가진다. 즉, 인접한 단위 격자내의 동일 지점 A와 B에 위치한 같은 미소 길이 벡터 dx 는 역시 동일한 벡터 dx' 으로 변형한다. 그러므로, 두 식

$$\begin{aligned} \bar{u}_A + dx' &= dx + \bar{u}_A + d\bar{u}_A \\ \bar{u}_B + dx' &= dx + \bar{u}_B + d\bar{u}_B \end{aligned}$$

로부터, 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$d\bar{u}_A = d\bar{u}_B \quad (1)$$

여기서 기준 축으로 \bar{g}_i 를 기저(base) 벡터로 하는 경사 좌표계를 사용하면, $\bar{u} = \bar{g}_i u^i$ 이므로

$$d\bar{u} = \bar{g}_i u^i \Big|_j dx^j \quad (2)$$

가 된다. 이 때, 직교 좌표계나 경사 좌표계에서의 크리스토펠 기호는 모두 0이 되므로 식(2)는

$$d\bar{u} = \bar{g}_i \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \quad (2-1)$$

가 된다. 따라서, 식(1)과 (2-1)로부터 인접 단위 격자의 주기적 변형은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\bar{g}_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \right)_A = \bar{g}_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \right)_B$$

여기에 반변(contra-variant) 기저 벡터를 내적하여 위 식의 기저 벡터를 소거 시킨 뒤, dx^j 의 성분별 비교를 통하여 다음의 관계식을 구할 수 있다.

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right)_A = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right)_B \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

만약, 점 A가 단위 격자의 경계선 상에 위치한다면, 이에 따라 점 B는 인접한 단위 격자의 동일한 경계선, 즉 점 A가 위치한 경계선의 대변에 위치하여야 한다. 따라서 식(3)은 단일 단위 격자의 해석에서 대변에 놓인 상응하는 재료 점(material point)들이 만족하여야 하는 주기적 변형 경계 조건을 의미한다.

위의 과정은 재료의 성질이나 변형의 크기등에 관한 아무런 가정을 포함하지 않으며, 단지 재료 점들의 운동만을 고려하고 있으므로, 식(3)은 비선형성 재료, 시간 의존성 문제 혹은 대변형 문제에서도 동일하게 성립되어야 하는 조건이다. 또한, 이는 2 차원 뿐 아니라 3 차원 단위 격자에서도 만족되어야 한다.

2.2 유한요소 모델에의 적용

불균질성이 특정 방향으로 일정한 간격으로 배열된 문제에 대한 단위 격자는 2 차원 평면 문제에서는 평행사변형, 3 차원 문제의 경우에는 평행 육면체로 항상 정의될 수 있다. 앞 절에서 유도한 식(3)은 3 차원 문제에도 성립하지만, 본 연구에서는 2 차원 문제만을 다루고자 한다.

Fig. 2는 평면 문제에 대한 단위 격자 유한 요소 모델의 한 예를 보인다. 여기서, 상, 하측 모서리와 좌, 우측 모서리의 절점 수를 각각 M 개와 N 개라 하고, 경계 절점의 위치를 순서쌍(i, j)로 표시

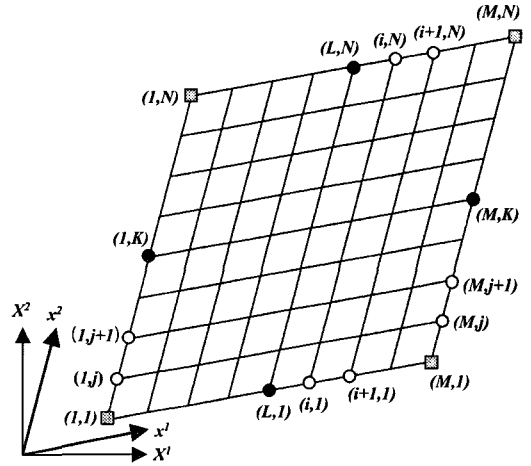


Fig. 2 An example of FE model for a unit cell in the shape of parallelogram

하였다. 먼저, 상, 하 모서리에서 동일한 x^1 좌표 값을 가지는 ($i,1$) 절점과 (i,N) 절점에 대하여 식(3) 가운데

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^1} = \frac{\partial u^k}{\partial x^1} \quad (3-1)$$

을 적용하고, 이를 유한 차분 형태로 표시하면,

$$\frac{u^k_{(i+1,1)} - u^k_{(i,1)}}{x^1_{(i+1,1)} - x^1_{(i,1)}} = \frac{u^k_{(i+1,N)} - u^k_{(i,N)}}{x^1_{(i+1,N)} - x^1_{(i,N)}}$$

가 되며, 평면 문제의 경우, $k=1,2$ 이다. 요소 분할 시 상, 하 모서리의 절점 간격이 균일할 필요는 없으나, 대변의 같은 위치에 놓인 상응 절점에서 그 인접 절점과의 간격을 동일하게 한다면, 위 식의 분모는 서로 상쇄되어 다음과 같은 $(M-1)$ 개의 식을 얻게 된다.

$$u^k_{(i+1,1)} - u^k_{(i,1)} = u^k_{(i+1,N)} - u^k_{(i,N)}$$

이들 식은 서로 더하거나 감함으로써 임의의 경계 절점 사이의 식으로 표현할 수 있는데, Fig. 2에 ($L,1$)과 (L,N)으로 표시한 기준 절점의 변위를 포함하는 식으로 변환하면 다음과 같다.

$$u^k_{(i,1)} - u^k_{(L,1)} = u^k_{(i,N)} - u^k_{(L,N)} \quad (4)$$

식(3) 가운데 적용하지 않은 식

$$\frac{\partial u_{(i,1)}^k}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{(i,N)}^k}{\partial x^2} \quad (3-2)$$

은 x^2 에 대한 적분을 통해

$$u_{(i,1)}^k = u_{(i,N)}^k + f^k(x^1)$$

으로 표시할 수 있고, 이를 x^1 으로 미분한 뒤, 식(3-1)을 적용하면 결국 함수 $f^k(x^1)$ 은 상수이어야 함을 알 수 있다. 따라서, 위 식은 단위 격자의 대변에 놓인 상응 절점의 변위 값의 차이가 모든 절점 쌍(pair)에서 동일하다는 식(4)의 결과와 일치하는 것이다.

유사한 방법으로 좌, 우 모서리에 놓인 절점(1,j)와 절점(M,j)에 대하여 식(3-2)를 적용하고, 이를 Fig. 2의 (1,K)와 (M,K) 절점의 변위를 포함한 식으로 변환하면 아래와 같은 (N-1)개의 식을 구할 수 있다.

$$u_{(1,j)}^k - u_{(1,K)}^k = u_{(M,j)}^k - u_{(M,K)}^k \quad (5)$$

이 경우에도 대변의 상응 절점간의 변위의 차이는 일정하다.

위의 식(4)와 (5)는 주기적 변형 조건을 만족하기 위하여 경계 절점에 부과할 일종의 구속 조건이며, 본 연구에서 사용한 ABAQUS에서는 명령어 *EQUATION을 사용하여 해석에 반영할 수 있다.

한편, 단위 격자의 모퉁이에 위치한 절점에 대한 주기적 변형 경계 조건은 식(4)와 (5)에 중복되어 있으며, 이는 동일한 절점의 자유도가 2 번에 걸쳐 종속 변수로 정의되거나, 또는 이미 종속 변수로 정의된 자유도가 다른 구속 조건에서는 독립 변수가 됨으로써 해석 에러를 유발시킨다. 이를 방지하기 위하여는 모퉁이 절점의 조건식을 조합하여 잉여식을 없애야 한다. 먼저, 식(4)의 i 와 식(5)의 j 를 각각 1과 N으로 하여

$$\begin{aligned} u_{(1,1)}^k - u_{(L,1)}^k &= u_{(1,N)}^k - u_{(L,N)}^k \\ u_{(1,N)}^k - u_{(1,K)}^k &= u_{(M,N)}^k - u_{(M,K)}^k \end{aligned}$$

를 구하고, 위 두 식을 더하여 $u_{(1,N)}^k$ 을 소거하면

$$u_{(1,1)}^k - (u_{(L,1)}^k + u_{(1,K)}^k) = u_{(M,N)}^k - (u_{(L,N)}^k + u_{(M,K)}^k) \quad (6)$$

가 얻어진다. 또한, 식(4)의 i 와 식(5)의 j 를 각각 M과 1로 하여 구한 두 식의 차이를 정리하면

$$u_{(M,1)}^k - (u_{(L,1)}^k + u_{(M,K)}^k) = u_{(1,N)}^k - (u_{(1,K)}^k + u_{(L,N)}^k) \quad (7)$$

가 된다. 식(6)과 (7)은 모퉁이 절점과 기준 절점들 간의 구속 조건을 나타내는 식으로서 이를 적용할 경우, 위에서 언급한 문제점은 발생하지 않는다.

식(4)~(7)의 구속 조건은 모두 변위 벡터의 변위 성분들로 표현되어 있다. 해석을 위한 전처리 기에서 경사 좌표계의 지정이 가능하다면 이를 기준으로 구속 조건을 입력하면 되며, 그렇지 않은 경우에는 위 식의 변위 성분을 전체 직교 좌표계의 변위로 간주하여 입력하여도 무방하다. 이는 위의 식들을 직교 좌표계로 변환하면 동일한 형태의 구속 조건식을 얻을 수 있기 때문이다.

평면 문제에 있어서 단위 격자의 경계에 가해지는 구속 조건은 모퉁이 절점에 대한 식을 제외하여 식(4)로부터 (2M-6)개, 식(5)으로부터 (2N-6)개, 모퉁이 절점에 대한 식(6)과 (7)로부터 4개가 되어 총 구속 조건의 수는 (2M+2N-8)개가 된다. 경계 절점의 수가 커지면, 이들 구속 조건을 부여하기 위한 지루한 작업이 필요하므로, 본 연구에서는 경계 절점의 좌표로부터 대변의 상응 절점을

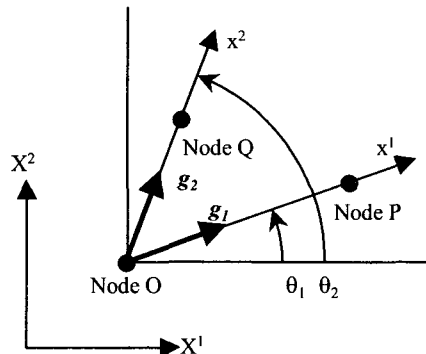


Fig. 3 Nodes to be constrained against rigid body motion

찾아 구속 조건에 대한 입력 파일을 생성할 수 있는 간단한 프로그램을 만들어 사용하였다.

2.3 하중 부과 및 강체 운동의 구속

요소 분할 후 2.2 절의 구속 조건을 부여하고 나면 모델의 경계 절점에 하중을 가하여야 하는데, 이미 경계 절점들은 주기적 변형 조건을 만족하고 있으므로, 하중은 단지 기준 절점에만 가해지면 된다. Fig. 2 에서 검은 원형 기호로 표시된 기준 절점은 반드시 모서리 중앙에 위치할 필요는 없다. 다만, 상·하의 기준 절점들은 서로 동일한 x^1 좌표 값을, 좌·우의 기준 절점들은 서로 동일한 x^2 좌표 값을 가지도록 하여야 한다. 하중의 크기와 방향은 원하는 거시적 응력장에 따라 달라질 수 있으나, 물성치의 계산을 위하여 가장 간편한 방법은 전체 직교 좌표계를 기준으로 하여 다음 식으로 계산하여 기준 절점에 가하는 것이다. 여기서 k 는 단위 격자의 모서리를 표시하고, Δx 는 모서리의 길이, n 은 여기에 수직인 바깥 법선 벡터를 의미하며, 바깥의 두께는 편의상 1로 한다.

$$F_i^{(k)} = \Delta x^{(k)} \sigma_{ij} n_j^{(k)} \quad (8)$$

모델의 강체 운동을 구속하기 위하여는 먼저 임의의 절점을 선택하여 평행 이동 자유도를 모두 구속한다. 또한, 강체 회전 운동은 변위 벡터의 회전(curl) 성분을 구속함으로써 방지할 수 있으며, 평면 문제의 경우에는 Fig. 3 과 같이 단위 격자내의 임의의 3 개 절점을 선택하여 $\omega^3 = 0$ 를 구속 조건으로 부여하면 된다. 경사 좌표계 혹은 직교 좌표계를 기준으로 한 평면 문제의 경우,

$$\omega^3 = u_{j,i} \varepsilon^{ij3} = (u_{2,1} - u_{1,2}) \varepsilon^{123} = 0$$

를 만족하여야 하며, 공변 변위 벡터 성분을 직교 좌표계의 변위 성분으로 표현하면 아래와 같다.

$$\beta_2^k \frac{\partial U_k}{\partial x^1} - \beta_1^k \frac{\partial U_k}{\partial x^2} = 0$$

Fig. 3 의 절점 O 가 평행 이동 자유도의 구속이 가해지는 절점이어서 $U_k^{(O)} = 0$ 라면, 위 식에 변환 텐서의 성분을 대입하고 이를 유한 차분 형태로

표시하여 아래의 강체 회전 운동 구속식을 얻을 수 있다.

$$\cos \theta_2 \frac{U_1^{(P)}}{|OP|} + \sin \theta_2 \frac{U_2^{(P)}}{|OP|} = \cos \theta_1 \frac{U_1^{(Q)}}{|OQ|} + \sin \theta_1 \frac{U_2^{(Q)}}{|OQ|}$$

직교 좌표계에서 절점 P 또는 Q 와 절점 O 사이의 좌표 값의 차이를 (ΔX^1 , ΔX^2)로 나타낸다면 위의 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\Delta X_{(Q)}^1 U_1^{(P)} + \Delta X_{(Q)}^2 U_2^{(P)} = \Delta X_{(P)}^1 U_1^{(Q)} + \Delta X_{(P)}^2 U_2^{(Q)} \quad (9)$$

3. 유효 물성치의 계산

3.1 탄성 물성치

평면 문제의 경우, 평면 문제에서는 3 가지의 거시적 응력 상태, 즉

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

에 해당하는 하중을 식(8)로 계산하고, 이를 기준 절점에 가했을 때 그 절점의 변위로부터 전체 직교 좌표계를 기준으로 한 거시적 변형율을 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial U^1}{\partial X^1} \approx \frac{U_{(M,K)}^1 - U_{(1,K)}^1}{X_{(M,K)}^1 - X_{(1,K)}^1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial U^2}{\partial X^2} \approx \frac{U_{(L,M)}^2 - U_{(L,1)}^2}{X_{(L,M)}^2 - X_{(L,1)}^2} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial U^2}{\partial X^1} + \frac{\partial U^1}{\partial X^2} \\ &\approx \frac{U_{(M,K)}^2 - U_{(1,K)}^2}{X_{(M,K)}^1 - X_{(1,K)}^1} + \frac{U_{(L,M)}^1 - U_{(L,1)}^1}{X_{(L,M)}^2 - X_{(L,1)}^2} \end{aligned} \quad (11)$$

이렇게 계산된 변형율로 곧 유연도 행렬을 구할 수 있으며, 이로부터 탄성 물성치를 계산할 수 있다. 그 계산 예는 Chung¹⁷에서 찾아 볼 수 있다.

3.2 직교 이방성 크리프 파라미터

등방성 재료에 불균질성이 개재되면 그 배열에 따라 거시적인 이방성이 나타나게 되며, 특히 원형 혹은 직사각형의 구멍이 직각 배열되는 경우에는 그 거시적 거동은 직교 이방성을 보인다. 직교 이방성의 소성 거동이나 크리프 거동을 표현하기 위한 퍼텐셜 함수는 아래와 같이 정의된다.¹⁸

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2$$

여기서 상수 F, G, H, L, M, N 은 재료의 이방성 파라미터이며, 등방성 재료의 경우 이들의 값은 다음과 같다.

$$L = M = N = 3F = 3G = 3H = 3 \quad (12)$$

관련 유동법칙(associated flow rule), 응력 성분 행렬과 크리프 변형률 속도 성분 행렬의 내적이 다축 응력 상태의 상당 응력 $\sigma_e = \sqrt{2f}$ 와 상당 크리프 변형률 속도 $\dot{\epsilon}^C$ 의 곱과 같다는 조건 및 Bailey-Norton 식¹⁹

$$\dot{\epsilon}^C = A\sigma_e^n t^m \quad (13)$$

을 적용하여 응력과 크리프 변형률 속도의 관계를 구하고, 이를 시간에 대하여 적분하면 다음과 같은 크리프 곡선식을 얻을 수 있다. 먼저, σ_{11} 을 제외한 모든 응력이 0 이라면,

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^C &= \frac{A(G+H)^{(n+1)/2}}{m+1} |\sigma_{11}|^{n-1} \sigma_{11} t^{m+1} \\ \epsilon_{22}^C &= -\frac{A(G+H)^{(n-1)/2} H}{m+1} |\sigma_{11}|^{n-1} \sigma_{11} t^{m+1} \end{aligned} \quad (14)$$

유사하게 σ_{22} 만이 0 이 아닌 응력 성분인 경우에는

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^C &= -\frac{A(F+H)^{(n-1)/2} H}{m+1} |\sigma_{22}|^{n-1} \sigma_{22} t^{m+1} \\ \epsilon_{22}^C &= \frac{A(F+H)^{(n+1)/2}}{m+1} |\sigma_{22}|^{n-1} \sigma_{22} t^{m+1} \end{aligned} \quad (15)$$

또한, σ_{12} 만이 0 이 아닌 응력 성분인 경우에는

$$\gamma_{12}^C = \frac{A(2N)^{(n+1)/2}}{m+1} |\sigma_{12}|^{n-1} \sigma_{12} t^{m+1} \quad (16)$$

이 된다. 직교 이방성인 경우, 수직 응력과 전단 변형을 혹은 전단 응력과 수직 변형을 사이의 커플링은 나타나지 않는다.

위 식의 파라미터 값의 결정을 위하여는, 먼저 단위 격자 모델의 기준 절점에 식(8)과 (10)에 따른 하중을 가한 뒤, 그 변위로부터 식(11)에 따라 변형률을 계산하고, 이로부터 탄성 변형률을 제외함으로써 크리프 곡선들을 구해야 한다. 이 크리프 곡선을 시간에 대하여 $\epsilon_{ij}^C = a_{ij} t^{m+1}$ 의 형태로 곡선 맞추기(curve fitting)하면 파라미터 m 이 결정된다.

이 때, 각 크리프 곡선 별로 구해진 a_{ij} 는 위 식에서 알 수 있듯이 응력 상태와 단위 격자의 이방성 등에 의존하는 값이다. 같은 종류의 응력 상태에서 응력의 크기를 변화시키며 얻은 크리프 곡선으로부터 각각의 a_{ij} 를 구하고, 이를 다시 응력 크기에 대하여 $a_{ij} = b_{ijkl} \sigma_{kl}^n$ 의 형태로 곡선 맞추기 하면 응력의 지수인 파라미터 n 이 결정된다.

식(14)~(16)과의 비교를 통해 위에서 구해진 b_{ijkl} 은 직교 이방성 크리프 파라미터와 다음의 관계를 가짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} b_{1111} &= \frac{A(G+H)^{(n+1)/2}}{m+1}, & b_{2211} &= -\frac{A(G+H)^{(n-1)/2} H}{m+1} \\ b_{2222} &= \frac{A(F+H)^{(n+1)/2}}{m+1}, \\ b_{1122} &= -\frac{A(F+H)^{(n-1)/2} H}{m+1}, \\ b_{1212} &= \frac{A(2N)^{(n+1)/2}}{m+1} \end{aligned}$$

위의 F, G, H, N 은 응력 성분별 방향별로 상대적인 크리프 특성을 나타내는 파라미터이므로, 그 중 하나의 값은 임의로 정할 수 있다. 여기서 $G+H$ 를 1 로 한다면, 위 식으로부터

$$A = (m+1)b_{1111} \quad F = \frac{b_{2211}}{b_{1111}} \left(\frac{b_{2222}}{b_{1122}} + 1 \right)$$

$$G = 1 + \frac{b_{2211}}{b_{1111}} \quad H = - \frac{b_{2211}}{b_{1111}} \quad (17)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{b_{212}}{b_{1111}} \right)^{2/(n+1)}$$

가 되어 직교 이방성 크리프 거동의 표현에 필요한 모든 파라미터가 구해진다.

4. 결과 및 고찰

4.1 등방성 균질 재료의 크리프

등방성 균질 재료에 대하여 단위 격자를 정의하고 물성치를 구한다는 것은 실용적으로 불필요한 일이다. 그러나, 주기적 변형 경계조건을 부여한 크리프 유한요소 해석 방법의 유효성을 검증하기 위하여 Fig. 2 와 같이 64 개의 4 절점 사각형 요소로 구성된 단위 격자 모델에 대한 크리프 해석을 수행하였다. 상,하 및 좌,우 모서리는 그림의 X' 축에 대하여 각각 10°와 75° 만큼 경사지도록 하였으며, 모서리의 길이는 모두 1 이다. 모델의 중앙부에 위치한 절점과 그 인접 절점에 대하여 강제 운동 구속 조건을 가하고, 각 모서리의 중앙에 위치한 기준 절점에 식(8)과 (10)에 따른 하중을 가하였다. 재료의 성질은 탄성 계수 100, 프와송비 0.3, 식(13)의 크리프 파라미터 A, n, m 은 각각 0.003, 2.0, -0.5 로 하였다.

기준 절점의 시간 별 변위로부터 식(11)에 따라 변형율을 구하여 Fig. 4 에 표시하였다. 그림의 실선은 식(14)~(16)에 이방성 파라미터 대신 식(12)의

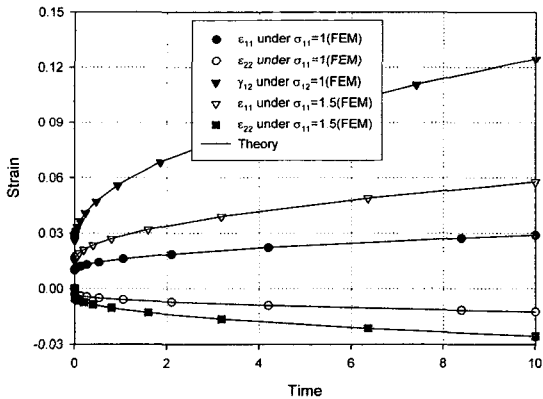


Fig. 4 Comparison of theoretical creep equations with FE analysis results from skewed unit cell model

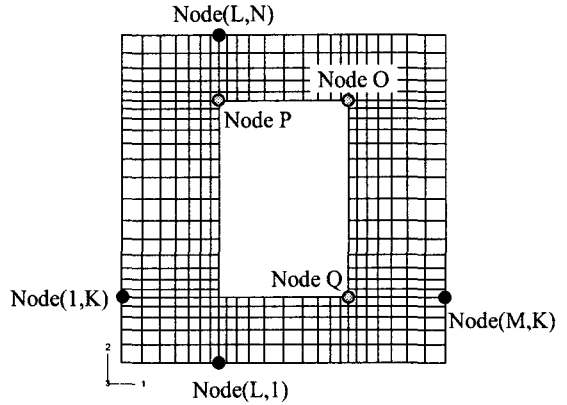


Fig. 5 Unit cell model for a perforated sheet with rectangular voids

값을 대입하여 등방성 재료의 크리프 식을 구하고, 여기에 탄성 변형율을 더한 결과이며, 유한요소 해석 결과와 잘 일치하고 있다. 따라서, 주기적 변형 경계조건을 부여한 단위 격자가 등방성 균질 재료의 크리프 거동을 대표할 수 있음을 알 수 있다.

4.2 직교 이방성 크리프 파라미터의 계산

Fig. 5 는 직사각형의 구멍이 정방형 배열된 가공질 박판의 단위 격자 모델을 보인다. 구멍 사이의 간격이 상하, 좌우 방향으로 모두 1 이라 가정하여, 단위 격자의 크기 또한 가로 세로 모두 1 로 하였으며, 구멍의 크기는 가로 0.4 세로 0.6 이다. 총 436 개의 8 절점 4 각형 요소를 사용하여 해석을 수행하였으며, 기준 절점 및 강제 운동 구속

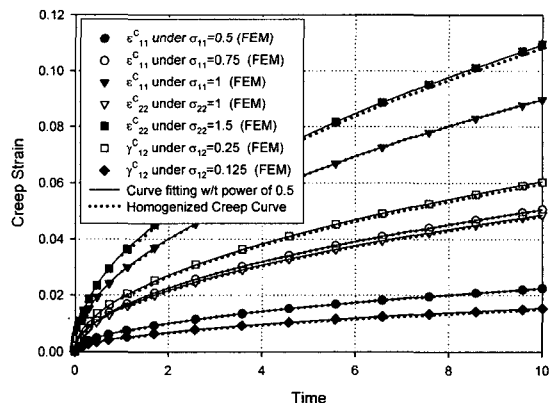


Fig. 6 Creep curves of the unit cell with rectangular hole

조건을 부여한 절점의 위치는 그림에 표시한 것과 같다. 앞 4.1 절과 동일한 가상의 물성치를 사용하였는데, 먼저 탄성 해석을 통해 구한 직교 이방성 탄성 물성치 E_{11} , E_{22} , ν_{12} , ν_{21} , G_{12} 는 각각 42.0264, 62.4541, 0.1649, 0.2237, 9.9970 이다. Hassani¹⁵ 는 동일한 문제에 대하여 점근적 균질화 기법을 사용하여 직교 이방성 평면 응력 문제의 강성 행렬을 계산하였는데, 위의 결과와 비교하면, 최대 오차는 불과 0.03%이다.

Fig. 6 은 거시적 응력 상태에 상당하는 하중을 기준 절점에 가한 뒤, 크리프 해석을 통해 구한 크리프 변형을 변화의 몇 가지 예를 보인다. 그림의 실선은 이들 크리프 변형을 시간의 멱함수 $\epsilon_{ij}^C = a_{ij}t^{m+1}$ 로 곡선 맞추기 한 결과인데, 응력 상태와 변형을 성분에 무관하게 시간의 지수는 모두 0.5 이다. 따라서, 식(13)의 m 은 원재료와 동일하게 -0.5로 정해 질 수 있다.

Fig. 7 은 위 곡선 맞춤의 계수 $a_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl}^n$ 와 응력 σ_{kl} 의 관계를 보인다. 역시 원재료와 동일하게 $n=2$ 로 정해 질 수 있다. 이처럼 불균질성이 기공의 형태인 경우에는 파라미터 m 과 n 이 원재료의 그것과 같은 값이 됨을 알 수 있다. 위의 곡선 맞춤에서 구해진 b_{ijkl} 는 식(17)에 대입하여 거시적 직교 이방성 크리프 거동의 표현에 필요한 나머지 모든 파라미터를 구하는데 사용되며, Table 1 은 그 결과를 보인다. Fig. 6 의 점선은 이들 파라미터를 식(14)~(16)에 대입하여 구한 크리프 곡선이다. 단위 격자의 유한 요소 해석 결과와 잘 일치하고 있으며, 따라서 계산된 유효 직교 이방성 크리프 파라미터가 매우 정확함을 알 수 있다.

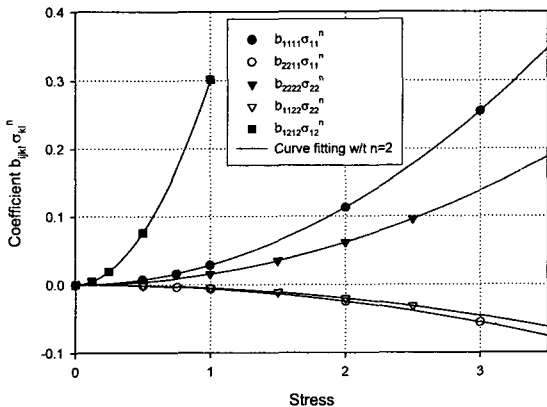


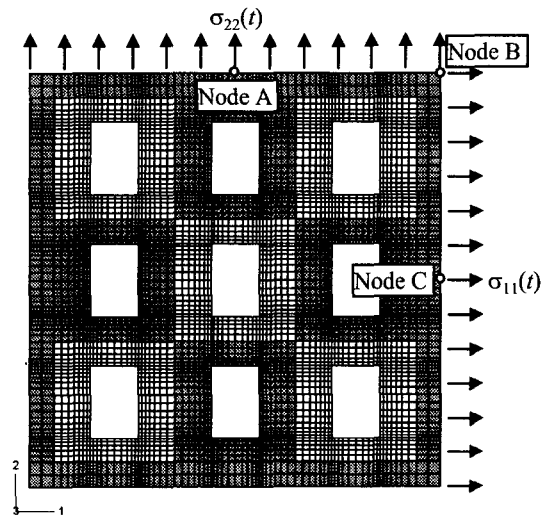
Fig. 7 Variation of the coefficient a_{ij} due to applied stress

Table 1 Evaluated orthotropic creep parameters

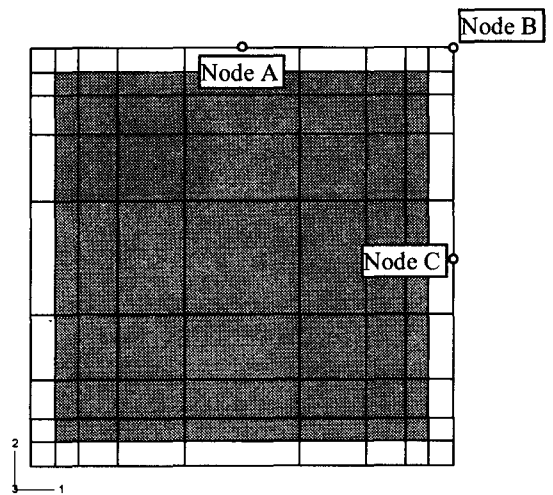
A	0.0142	m	-0.5	n	2
F	0.4404	G	0.7804	H	0.2196
N	2.4198				

4.3 다공질 박판의 크리프 해석

앞 4.2 절의 단위 격자가 규칙적으로 반복된 박판에 대한 해석을 수행하였다. 먼저 Fig. 8(a)와 같이 3x3 의 단위 격자의 둘레에 폭 0.2 의 띠가



(a) Detail model with all the holes in their shape



(b) Simple model with homogenized properties

Fig. 8 FE models for a perforated sheet of 3x3 unit cells

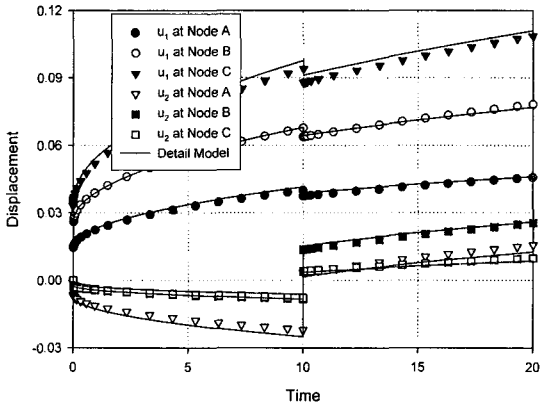


Fig. 9 Comparison of displacements at specified nodes from detail and simple models

들러진 박판을 상세 모델링 하였다. 모두 4516 개의 8 절점 4 각형 요소가 사용되었으며, 절점의 수는 14276 개이다. 4.1 절과 동일한 물성치를 사용하였으며, 아래 쪽 모서리는 상하 방향으로 좌측 모서리는 좌우 방향으로 고정하였다. 시간의 전체 길 이 20 에 걸쳐 우측 모서리에 $\sigma_{11} = 0.5$ 를 지속시켰으며, 시간이 10 에 이르렀을 때 $\sigma_{22} = 0.5$ 를 추가하여 끝까지 유지하였다. 그림에 표시한 3 개 절점 A, B, C 의 변위의 변화를 Fig. 9 에 실선으로 표시하였다. 하중의 변동에 대하여는 시간 경화 법칙 (time hardening law) 을 사용하였다.

동일한 문제를 Fig. 8(b)에 보인 것과 같이 단순화하여 모델링 하였는데, 8 절점 4 각형 요소의 수는 81 개, 절점의 수는 280 개이다. 그림에서 회색으로 표시된 부분은 상세 모델의 3x3 단위 격자에 해당되는 부분으로 여기에는 앞 4.2 절에서 구한 유효 직교 이방성 탄성 및 크리프 물성치를 부여하였다. 상세 모델과 동일한 경계 및 하중 조건 하에 절점 A, B, C 의 변위는 Fig. 9 에 표시한 것과 같다. 파라미터 계산을 위한 곡선 맞춤 과정에서 발생할 수 있는 수치 오차에도 불구하고, 유효 물성치를 사용한 단순 모델로부터 상세 모델에 매우 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 요소와 절점의 개수가 상세 모델 대비 각각 1.8%, 2.0%에 불과함을 감안하면 이는 매우 정확하고도 유용한 방법이라 평가할 수 있다.

5. 결론

미세한 불균질성이 규칙적으로 배열된 재료의 유효 물성치를 유한 요소 해석으로 계산하기 위한 방법을 제시하였다. 단위 격자의 경계 절점에 미시적 주기성을 반영할 수 있는 운동 구속 조건을 부여하고, 그 강체 운동을 적절히 구속한 뒤, 기준 절점에 거시적 응력 분포에 해당하는 집중 하중을 가함으로써 탄성 및 크리프 유효 파라미터를 계산할 수 있었다.

주기적 변형 경계 조건은 3 차원, 비선형 재료 특성, 시간 의존적 거동 등의 문제에도 유효하며, 불균질성이 경사진 방향으로 배열되어도 적용이 가능하므로, 본 방법은 매우 다양한 문제의 유효 물성치 계산에 활용될 수 있을 것으로 보인다.

본 연구에서는 등방성 균질 재료와 직사각형 구멍이 반복된 다공질 박판을 대상으로 직교 이방성 탄성 및 크리프 물성치를 구하였으며, 비교를 통해 그 정확성을 확인하였다.

이 방법은 기존의 유한 요소 코우드의 수정을 요하지 않는다는 것과 물성치의 계산이 간편하다는 점에서 점근적 균질화법에 비하여 명백한 장점을 가진다고 판단된다.

후 기

이 논문은 2004 년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 일부 지원되었음.

참고문헌

1. Slot, T. and O'Donnell, W. J., "Effective Elastic Constants for Thick Perforated Plates with Square and Triangular Penetration Patterns," J. of Engineering for Industry, Tran. ASME, Vol. 93, No. 4, pp. 935-942, 1971.
2. O'Donnell, W. J. and Porowski, J., "Yield Surfaces for Perforated Materials," J. of Applied Mechanics, Tran. ASME, Vol. 40, No. 3, pp. 263-270, 1973.
3. Baik, S. C., Oh, K. H. and Lee, D. N., "Analysis of the Deformation of a Perforated Sheet under Uniaxial Tension," J. of Materials Processing Technology, Vol. 58, No. 2, pp. 139-144, 1996.

4. Baik, S. C., Han, H. N., Lee, S. H., Oh, K. H. and Lee, D. N., "Plastic Behavior of Perforated Sheets under Biaxial Stress State," *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 39, No. 7, pp. 781-793, 1997.
5. Theocaris, P. S., Stavroulakis, G. E. and Panagiotopoulos, P. D., "Calculation of Effective Transverse Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Composites by Numerical Homogenization," *Composites Sciences and Technology*, Vol. 57, No. 5, pp. 573-586, 1997.
6. Park, S. K., Kim, J., Chang, Y. C. and Kang, B. S., "Analysis of the Deformation of a Perforated Sheet under Thermal and Tension Load Using Finite Element Method," *J. of Materials Processing Technology*, Vol. 113, No. 1, pp. 761-765, 2001.
7. Kang, C. G. and Oh, J. K., "An Evaluation of Three Dimensional Finite Element Model on the Strength Prediction of Particles Reinforced MMCs," *J. of KSPE*, Vol. 15, No. 6, pp. 124-138, 1998.
8. Meguid, S. A., Kalamkarov, A. L., Yao, J. and Zougas, A., "Analytical, Numerical and Experimental Studies of Effective Elastic Properties of Periodically Perforated Materials," *J. of Engineering Materials and Technology*, *Tran. ASME*, Vol. 118, No. 1, pp. 43-48, 1996.
9. Kalamkarov, A. L., "Analysis, Design, and Optimization of composite structures," *J. Wiley & Sons*, New York, 1997.
10. Lee, J. H., "Simplified Stress Analysis of Perforated Plates Using Homogenization Technique," *J. of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 8, No. 3, pp. 51-58, 1995.
11. Ghosh, S., Lee, K. and Moorthy S., "Two Scale Analysis of Heterogeneous Elastic-Plastic Materials with Asymptotic Homogenization and Voronoi Cell Finite Element Model," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 132, No. 1, pp. 63-116, 1996.
12. Jang, J., Yoon, M. and Lee, J., "Computation of Equivalent Material Properties of Woven Fabric Composites Using Homogenization Technique," *Tran. of KSME A*, Vol. 22, No. 3, pp. 588-594, 1998.
13. Ohno, N., Wu, X. and Matsuda, T., "Homogenized properties of Elastic-Viscoplastic Composites with Periodic Internal Structures," *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 42, No. 8, pp. 1519-1536, 2000.
14. Yun, S. H., "The Finite Element Analysis for Calculation of Equivalent Elastic Constants Using the Homogenization Method," *J. of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 13, No. 1, pp. 51-61, 2000.
15. Hassani, B. and Hinton, E., "A Review of Homogenization and Topology Optimization II-Analytical and Numerical Solution of Homogenization Equations," *Computers and Structures*, Vol. 69, pp.719-738, 1998.
16. Anthoine, A., "Derivation of the In-Plane Elastic Characteristics of Masonry through Homogenization Theory," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 32, No. 2, pp. 137-163, 1995.
17. Chung, I., "Evaluation of In-plane Effective Properties of Circular-Hole Perforated Sheet," *J. of KSPE*, Vol. 21, No. 1, pp. 181-188, 2004.
18. Slater, R.A.C., "Engineering Plasticity," *The Macmillan Press LTD*, London, UK, 1977.
19. Kraus, H., "Creep Analysis," *John Wiley & Sons*, New York, USA, 1980.