

비정렬 격자에서 Ghost Fluid 법을 이용한 밀도약층 주위 수중운동체에 의한 유동 해석

신 상 목*

NUMERICAL ANALYSIS OF FLOW AROUND A SUBMERGED BODY NEAR A PYCNOCLINE USING THE GHOST FLUID METHOD ON UNSTRUCTURED GRIDS

Sangmook Shin

A two-layer incompressible time-accurate Euler solver is applied to analyze flow fields around a submerged body moving at a critical speed near a pycnocline. Discontinuities in the dependent variables across the material interface are captured without any dissipation or oscillation using the ghost fluid method on an unstructured grid. It is shown that the material interface has significant effects on forces acting on a submerged body moving near a pycnocline regardless of the small difference in densities of two layers. Contrary to the shallow water waves, a submerged body can reach a critical speed at very low Froude number due to the small difference in the densities of the two layers.

Key Words: 상층화된 비압축성 유동(Two-layer incompressible flow), 매질경계면(Material interface), 밀도비(Density ratio), 임계속도(Critical speed), 고립내면파(Solitary internal wave)

1. 서 론

해양에는 계절과 해역에 따라 다양한 형태의 밀도약층(pycnocline)이 형성된다. 밀도약층에 의해 발생하는 내면파는 두 층의 밀도차가 작아서 파장이 대단히 크며 밀도약층까지의 수심이 파장에 비해 작아서 천수파의 특징을 갖는다. 이러한 내면파는 여러 가지 측면에서 해석이 요구된다. 내면파는 수중에서 음파의 전달 경로를 변화시켜 소나 작동에 영향을 초래하며, 또한 인공위성에서 SAR(synthetic aperture radar)를 이용한 관측이 가능하기 때문에 잠수함과 같은 수중운동체의 감시라는 측면과도 관련이 있다[1]. 또한 내면파는 수중운동체 및 제어관 등에 작용하는 동유체력을 변화시키기 때문에 해수면 근처에서 스노클링(snorkeling)하는 잠수함 등의 조종성에 영향을 초래할 수 있다. 그러나 밀도약층 주위의 수중운

동체에 의한 고립내면파의 발생 가능성이나 내면파에 의한 동유체력의 변화 등에 대한 해석 사례는 아직 보고되고 있지 않다.

밀도가 거의 균일한 상하층 사이의 좁은 영역에서 밀도변화가 집중되기 때문에, 내면파는 명확한 경계면을 가진 두 가지 밀도의 비압축성 매질에 대한 유동으로 근사된다[2,3]. 움직이는 매질 경계면이 있는 두 가지 매질의 비압축성 유동 해석은 다양한 방법을 이용하여 해석되어 왔다. 그러나 기존의 대부분의 연구들은 8-함수법으로 분류될 수 있다. 이러한 방법들에서는 매질 경계면에서의 종속변수의 불연속에 기인하는 수치해석상의 어려움을 피하기 위하여 매질 경계면 주위의 몇 개의 격자에서 모든 종속변수들이 미분 가능한 형태로 변화한다고 가정한다[4,5]. 이러한 가정은 수치기법의 안정성을 쉽게 확보해주지만 매질 경계면 근처에서 비물리적인 압축 효과를 초래하여 해의 정확도를 떨어뜨린다[6]. Fedkiw[7] 등은 두 가지 매질의 압축성 유동에서 발생하는 매질 경계면에서의 엔트로피의 불연속을 효과적으로 처리할 수 있는 기법인 ghost fluid 법을 제안하였다. 이 후 ghost fluid 법은 두 가지 매질의 경계면 처리에 효과적으로 적용되어 왔다[8,9].

접수일: 2005년 7월 5일, 심사완료일: 2005년 8월30일.

1 정회원, 부경대학교 조선해양시스템공학과

* E-mail: smshin@pknu.ac.kr

신상목 등은 두 가지 비압축성 매질 경계면의 내면과를 해석하기 위하여 비정렬 격자에서 ghost fluid 법을 적용하였다 [10,11].

본 논문에서는 개발된 두 가지 매질의 비압축성 유동해석 코드를 이용하여 잠수함과 같은 수중운동체가 밀도약층 주위에서 항주하는 경우에 대하여 고립내면과의 발생 가능성 및 동유체력의 변화 등에 대한 해석이 수행되었다.

2. 수치 해석

2.1 지배방정식 및 수치기법

혼합이 없는 경계면을 갖는 밀도가 다른 두 가지 비압축성 매질에 대해 비정상 Euler 방정식이 지배방정식으로 사용되었다. 전체압에서 수심에 따른 정압이 제외된 동압과 속도가 종속변수로 사용되었다. 종속변수들은 각각의 매질 밀도들과 두 매질에서 공통인 무한원방에서의 속도로 무차원화 되었다. 이러한 무차원화의 경우 매질의 밀도들은 지배방정식으로부터 완전히 제거되어 두 매질에서 지배방정식이 동일한 형태가 되며, 밀도의 불연속에 의한 효과는 무차원화된 동압의 매질 경계면에서의 불연속으로 나타난다. 고정된 격자계에서 매 순간 변화하는 두 매질의 경계면 추적을 위하여 레벨셋(level set) 함수 ϕ 가 지배방정식에 연성되었다.

비정렬 격자계에서 모든 종속변수들이 격자의 절점에 정의된 유한체적법(node-based FVM)이 사용되었다. 중첩이 없는 검사체적은 요소의 중심과 요소 경계의 중점을 연결하는 검사표면들의 조합으로 정의되었다. 비정상 상태의 비압축성 유동해석을 위해서는 각각의 물리적 시간 단계에서 가상시간(pseudo-time)을 도입하고 이에 대하여 의사압축성(artificial compressibility)이 사용되었다. 가상시간에 대한 정상상태의 해를 계산하기 위해서는 음해법(implicit method)이 사용되었으며, 물리적 시간에 대해서는 2차의 3점 후방 차분법이 사용되었다[12]. 레벨셋 함수가 완전히 연성된 지배방정식에 대한 플럭스 계산에는 Roe의 FDS 기법이 사용되었다, 고차의 정확도를 위한 미분치 계산에는 Green-Gauss 정리를 사용하였다.

2.2 매질 경계면에서의 플럭스 계산

매질 경계면에서의 밀도의 불연속에 기인하는 종속변수의 불연속은 경계면 주위에서의 플럭스 계산에 특별한 주의를 요한다. Ghost fluid 법에서는 매질 경계면 주위의 절점들에 대하여 각각의 매질들이 경계면을 넘어서 가상적으로 연장되었다고 할 때의 종속변수인 ghost fluid의 종속변수를 추정한다. 두 가지 매질들에 대해 각각 이러한 ghost fluid들의 종속변수들을 사용하면 매질 경계면에서도 두 개의 단일 매질에서의 플럭스 계산이 적용되기 때문에 비물리적인 확산이나

진동 없이 종속변수의 불연속을 정확하게 처리할 수 있다. Ghost fluid의 종속변수는 법선 속도 및 전체 압력의 연속등과 같이 매질 경계면에서 만족되어야 할 물리적인 요구조건으로부터 추정된다[7].

일반적으로 정렬격자에서 ghost fluid 법이 사용되는 경우, ghost fluid의 종속변수는 경계면 주위의 일정한 영역에서 계산되어 저장된 후 플럭스 계산에 사용된다. 그러한 영역은 경계면 주위의 절점들에서 플럭스 계산에 필요한 이웃 절점들을 포함해야한다. 그러나 비정렬 격자의 경우 고차의 정확도를 얻기 위해 절점에 저장된 종속변수의 미분치를 사용한다는 특징 때문에 ghost fluid 종속변수의 저장 및 이웃 절점들의 영역에 대한 고려가 전혀 필요하지 않게 된다[11].

Fig. 1은 비정렬 격자계에서 ghost fluid 법을 이용하여 매질 경계면에서 플럭스를 계산하는 자세한 과정을 보여준다. 우선 첫 번째 그림과 같이, 임의의 edge에 대해 양단의 절점에서의 레벨셋 함수의 부호로부터 그 edge가 매질 경계면을 가로지르는지를 결정한다. 그리고 edge가 경계면을 가로지르는 경우 그 edge에 부여된 검사표면을 통과하는 플럭스는 내부의 경우와 다른 과정으로 계산한다. 두 번째 그림은 고차의 정확도를 얻기 위해 검사표면 양쪽의 종속변수 Q_L 과 Q_R 을 재구성하는 단계를 보여준다. 아래에서 설명되듯이 각 절점에 저장된 종속변수의 미분치는 매질 경계면에서의 종속변수의 불연속을 고려하기 위하여 이미 ghost fluid의 종속변수들을 사용하여 계산된 값이다. 그러므로 Q_L 과 Q_R 은 내부의 절점들에서와 마찬가지로 Taylor 전개에 의해 재구성된다. 그러나 이러한 Q_L 과 Q_R 은 검사표면의 양쪽에서 각각 다른 매질들에 대한 종속변수들이다. 따라서 경계면에서 만족되어야 할 물리적 요구조건을 사용하여 세 번째 그림에서와 같이 실제 매질에서의 Q_L 과 Q_R 에 해당하는 ghost fluid들에 대한 값들을 추정한다. 마지막으로 동일 매질의 Q_L 과 Q_R 을 사용하여 두 가지 매질에 대한 플럭스들을 계산한 후 각각의 절점에 부여된 검사체적에 대해 플럭스의 효과를 고려한다.

내면과와 같이 전체압에 수심에 따른 정압효과가 포함되는 경우에 대해, Fig. 1의 세 번째 단계인 ghost fluid의 종속변수 추정은 다음과 같이 계산된다. 본 문제에서는 표면장력과 점성응력 등이 무시되므로, 매질 경계면에서 정압과 동압의 합이 연속해야한다는 동역학적 조건이 만족되어야 한다. 이 조건으로부터 실제 매질의 종속변수인 동압이 주어진 경우 ghost fluid의 동압은 다음 관계식으로 계산된다.

$$C_{\rho 1} = C_{\rho 2} \frac{\rho_2}{\rho_1} + 2\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{gn}{V_{\infty}^2} \quad (1)$$

$$C_{\rho 2} = C_{\rho 1} \frac{\rho_1}{\rho_2} + 2\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \frac{gn}{V_{\infty}^2} \quad (2)$$

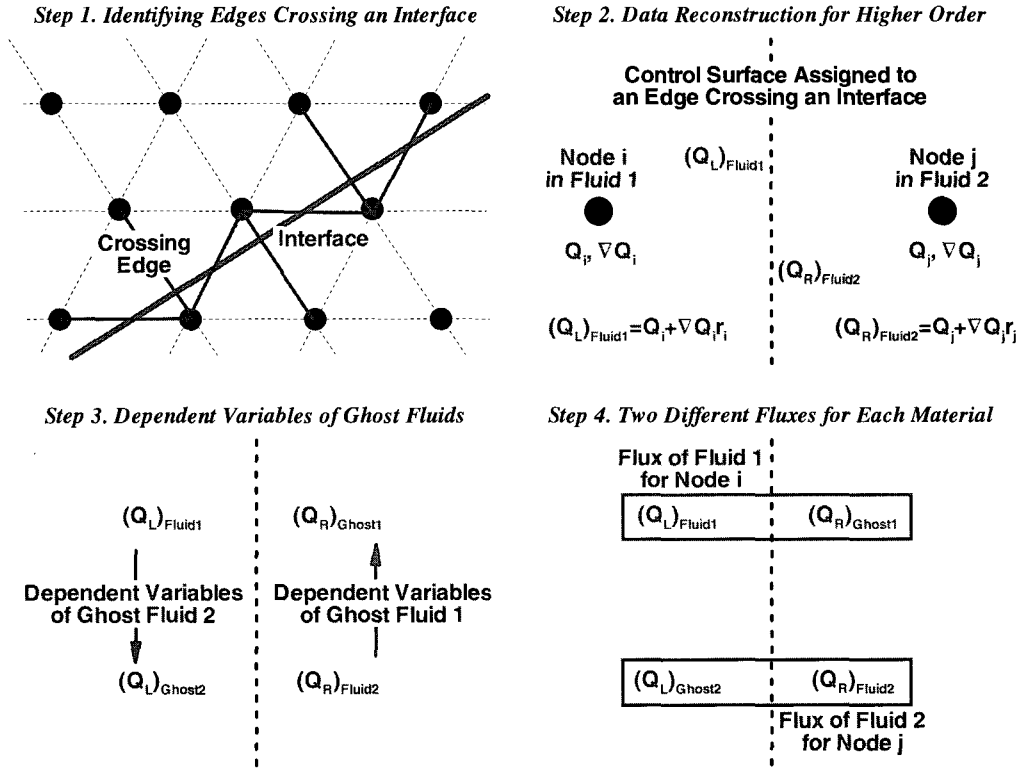


Fig. 1 Four steps of the ghost fluid method on unstructured grids

여기서 η 는 검사표면의 연직방향 위치이며 g 는 중력가속도이다. 속도의 경우에는 매질 경계면에서 법선 속도가 동일해야 한다는 운동학적 조건이 만족되어야 한다. 동일한 무한 원방에서의 속도로 무차원화 되었기 때문에 ghost fluid의 법선 속도는 다음 식과 같다.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{n} = \vec{V}_2 \cdot \vec{n} \quad (3)$$

여기서 \vec{n} 는 검사표면에서의 매질경계면의 법선 방향 단위벡터이다. Ghost fluid의 접선속도는 상황에 따라 달라진다. 본 계산에서는 점성이 무시되는 경우이므로, 실제 매질의 접선속도에 대한 법선방향 미분이 매질 경계면에서 영이 되도록 외삽되었다.

이미 언급된 바와 같이 비정렬 격자계에서 ghost fluid 법이 사용되는 경우, 절점에 저장되는 종속변수의 미분치 계산 과정에서 매질 경계면에서의 종속변수의 불연속에 대한 고려가 필요하다. Green-Gauss 정리에 의해 미분치를 계산하는 경우에는 미분치 계산이 플럭스 계산과 같이 edge에 부여된 검사체적에서의 적분으로 근사되므로 플럭스 계산과정과 동일

한 방법을 적용할 수 있다.

$$\nabla Q \approx \frac{1}{\Omega} \oint_{\partial \Omega} Q \vec{n} dS \approx \frac{1}{\Omega} \sum_{edge_i} \bar{Q}_i (\vec{n}_i A_i) \quad (4)$$

이때 검사표면에서의 종속변수 \bar{Q} 는 매질 내부에 포함된 edge인 경우 $edge_i$ 의 두 절점에서의 종속변수들의 산술평균으로 주어지나, 경계면을 가로지르는 edge에 대해서는 두 절점에서의 종속변수에 해당하는 ghost fluid의 종속변수를 계산한 후 같은 매질들에 대한 두 개의 산술 평균값을 따로 사용하여야 한다.

물리적 시간 간격 동안 경계면의 이동으로 그 절점에서의 매질이 변화되는 절점들이 발생하게 된다. 이러한 절점들에서는 새로 계산되는 종속변수들에 대하여 매질 변화에 따른 영향을 식 (1)-(3)으로 고려해 주어야 한다. 또한 물리적 시간 전진을 위해 3점의 후방 차분법이 이용되므로, 그러한 매질 변화가 발생하는 절점들에 대해서는 이전의 두 단계의 종속변수들도 새로운 매질에서의 종속변수들로 변화시켜야 한다. Ghost fluid 법에 의해 Q_L 과 Q_R 이 변화되는 경우, 음해법에서

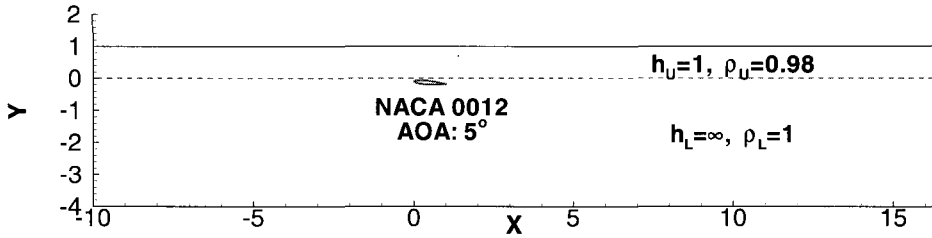


Fig. 2 A schematic drawing of a submerged body moving near a pycnocline

필요한 Jacobean 행렬 계산에도 그 영향을 고려해 주어야한다. Jacobean 행렬도 edge들에 대한 반복으로 계산되므로, 플럭스 계산에서 Q_L 과 Q_R 이 변경되는 경우마다 아래의 식으로 그 영향을 Jacobean 행렬에 동시에 고려해 줄 수 있다.

$$\frac{\partial F}{\partial Q_{Fluid}} = \frac{\partial F}{\partial Q_{Ghost}} \frac{\partial Q_{Ghost}}{\partial Q_{Fluid}} \quad (5)$$

여기서 $\frac{\partial F}{\partial Q}$ 는 Roc의 FDS에 의한 플럭스 F 의 종속변수 Q 에 대한 Jacobean이며 $\frac{\partial Q_{Ghost}}{\partial Q_{Fluid}}$ 는 식 (1)-(3)을 이용하여 계산된다.

3. 계산 결과

비정렬 격자계에서 ghost fluid 법을 이용하여 두 가지 매질의 비압축성 유동 해석을 위하여 개발된 코드는 물과 비중 0.811의 kerosene에 대한 실험 및 다른 계산 결과와 비교되어 검증되었으며, 해석 결과의 격자 의존도 및 다른 파라미터들의 영향도 조사되었다[11,12]. 본 논문에서는 수중운동체가 밀도약층 주위를 항주하는 경우를 모사하기 위하여 Fig. 2와 같은 경우에 대한 해석을 수행하였다. 그림에서 모든 길이는 물체의 길이로 무차원화 되었다. Fig. 3은 계산에 사용된 비정렬 격자를 보여준다. 물체 전방으로 전파되는 교란내면파를 포착하기 위하여 조밀한 격자가 물체 전방으로도 연장되었다. 교란이 없을 때의 매질 경계면은 $Y=0$ 에 위치하며 중력은 음의 Y 방향으로 작용한다. 물체는 NACA0012 단면으로 영각은 5° 이며 선단은 $X=0, Y=-0.1$ 에 위치한다. 밀도약층의 경우 상층의 밀도비가 거의 1에 가깝기 때문에 밀도비 ρ_U/ρ_L 는 0.98로 주어졌다. 동해의 경우 수심 500-800m의 연안에서 약 10-200m 수심에서 밀도약층이 관측되는 점을 감안하여 상층의 두께는 물체의 길이와 동일하게 주어졌다. 큰 파고의 내면파가 발생하는 경우에도 해수면은 큰 밀도 차이로 인하여 변화가 거의 없기 때문에, 이전의 연구들에서는 해수면은 고정

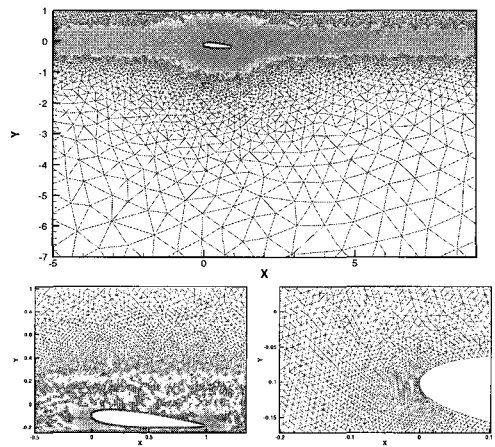


Fig. 3 An unstructured grid around a hydrofoil near a pycnocline

되어 있다고 가정되었다[2,3]. 본 계산에서도 해수면의 효과를 고려하기 위하여, $Y=1$ 에 비점성의 벽면이 존재한다고 가정하였다. 원해에 대한 모사를 위해서 계산 영역의 아래쪽 경계에서는 무한 원방조건이 사용되었다. Fig. 2와 같은 경우에 대한 임계속도를 Grue[3] 등이 사용한 선형화된 근사식 (6)으로 추정하면, 물체의 길이를 기저로한 Froude 수가 약 0.143에서 임계상태가 될 것으로 추정된다.

$$c_o^2 = gh_U h_L (\rho_U - \rho_L) / (\rho_U h_L + \rho_L h_U) \quad (6)$$

이에 따라 실제 계산에서는 Froude 수를 0.143 주위에서 다양한 값으로 변화시켜 보았으며 그 결과 선형화된 식 (6)에 의한 근사값보다 다소 작은 Froude 수에서 임계상태가 되는 것으로 나타났다. 임계속도 근처에서 파형의 특성을 비교하기 위하여 Froude 수가 0.09 및 0.11에 대한 결과를 포함시켰다. 작은 밀도차 때문에, 내면파는 파장이 대단히 길며 밀도약층까지의 수심은 알아서 거의 대부분의 경우 천수파의 특성을 갖는다. 또한 식 (6)으로부터 내면파의 경우 대부분 수중운동

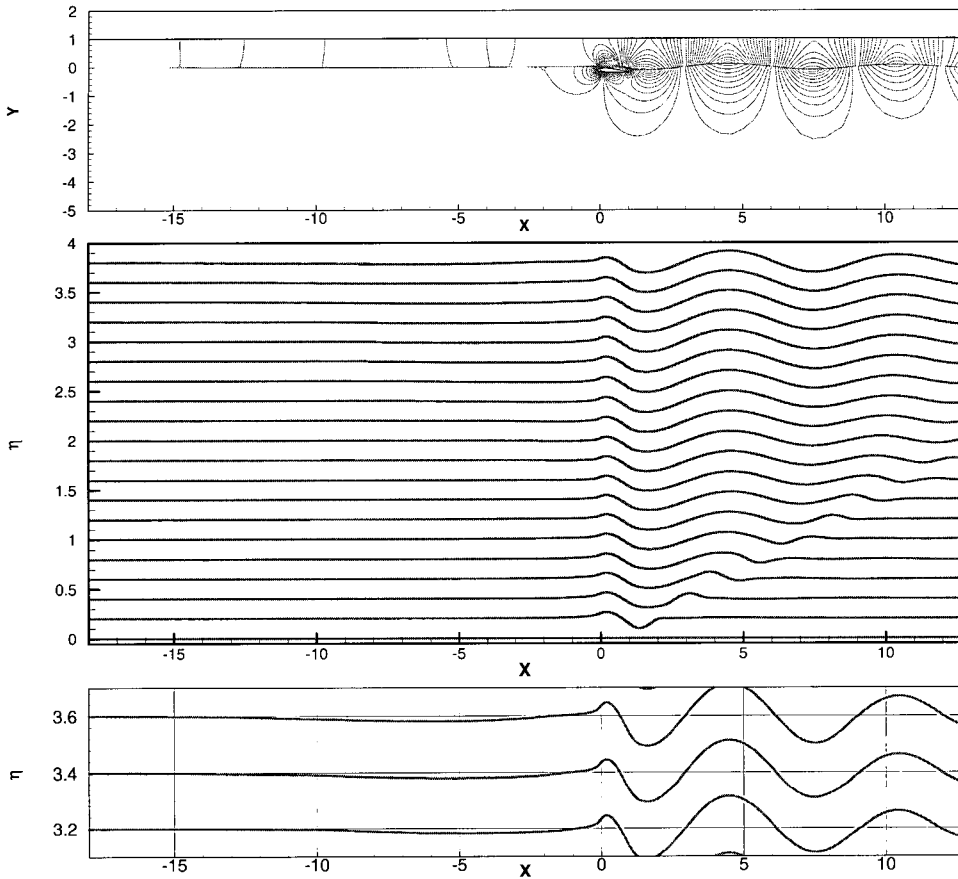


Fig. 4 Dynamic pressure distribution and time evolution of the material interface ($F_n=0.09$)

체의 경우 저속에 해당하는 상태에서 임계상태가 발생할 것으로 예측된다. 따라서 수면 가까이에서 저속으로 스노클링(snorkeling)하는 잠수함 등은 임계상태에 해당하는 경우가 많을 것으로 예상되며 이로 인한 고립내면파(solitary internal wave)의 발생 가능성도 높다고 판단된다.

Fig. 4는 Froude 수가 0.09인 경우에 특정 순간에서의 동압 분포와 시간에 따른 매질 경계면의 변화를 보여주고 있다. 동압 분포로부터 물체 전방으로 교란이 전파되고 있음을 확인할 수 있다. 매질 경계면의 시간변화를 확대한 마지막 그림에서도 물체 전방에 경계면이 아래로 내려간 영역이 점진적으로 전파되고 있음을 확인할 수 있다. 경계면의 하강은 평균 유속의 감소 및 동압의 증가를 초래하여 동압 분포에 나타난 형태의 교란을 발생시킨다. 실제 동해에서는 계절에 따라 밀도 경계면이 평균 수심 아래로만 하강하는 depression 형태의 고립내면파와 위로만 상승하는 elevation 형태의 고립내면파가 모두 관측되고 있다. 본 계산 결과는 하강형태의 고립내면파

의 전형적인 특성을 나타내고 있다.

Fig. 5는 익형 주위의 동압 분포를 확대하여 보여준다. 경계면이 없는 영각 5° 인 경우와 비교하여, 정체점이 익형 선단의 아래쪽으로부터 선단 중심으로 이동해 있음을 관찰할 수 있다. Fig. 6에서는 익형 주위의 유선들이 매질 경계면이 없는 경우의 유선(점선)들과 비교되었다. 매질 경계면이 있는 경우에는 유선들이 익형과 나란하게 기울어지려는 경향이 나타나며 이에 따라 선단에서 유동의 방향 변화가 급격히 감소함을 확인할 수 있다. 이는 Fig. 9에서 보듯이 양력의 급격한 감소를 초래한다. 즉 아주 작은 밀도차이에도 불구하고 매질 경계면의 존재는 익형으로의 유입 방향을 변화시켜 양력에 커다란 영향을 초래한다.

Fig. 7은 익형의 속도가 증가하여 Froude 수가 0.11인 경우에 대한 결과이다. 이 속도에서는 익형 전방에 압력 교란이 전혀 발생하지 않았다. 확대된 매질 경계면의 시간 변화에서도 익형 전방에서 매질 경계면이 일정하게 유지되고 있음을

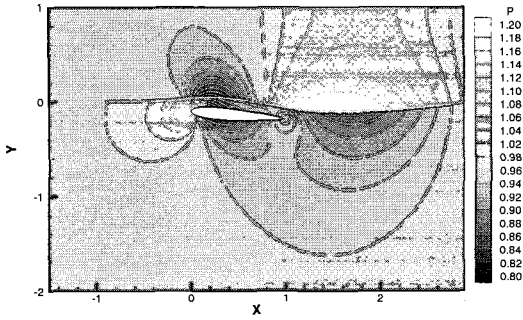


Fig. 5 Pressure contours around a hydrofoil near a pycnocline

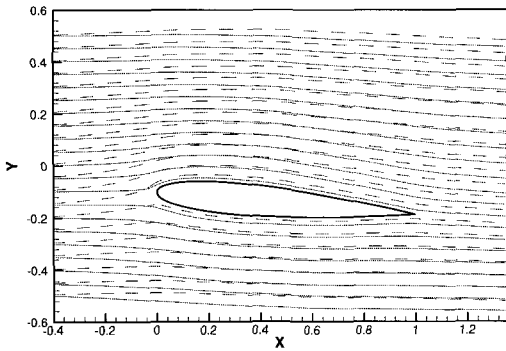


Fig. 6 Comparison of streamlines: near a pycnocline(solid lines) and bounded case(dashed lines)

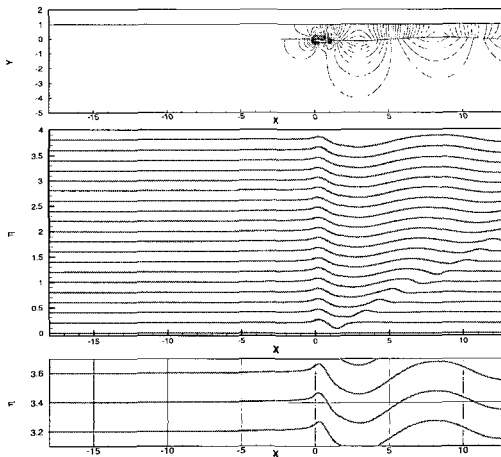


Fig. 7 Dynamic pressure distribution and time evolution of the material interface ($F_n=0.11$)

확인할 수 있다. Fig. 8은 사용된 격자계와 계산된 동압 분포를 보여준다. 매질 경계면에서의 동압분포의 불연속이 한 개의 요소 안에서 진동 없이 포착되고 있으며 불연속면 주위에서 비물리적인 확산도 나타나지 않음을 확인할 수 있다. Fig.

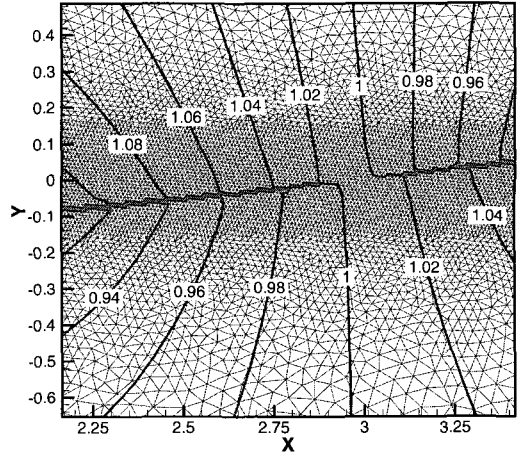


Fig. 8 Pressure contours and triangular cells

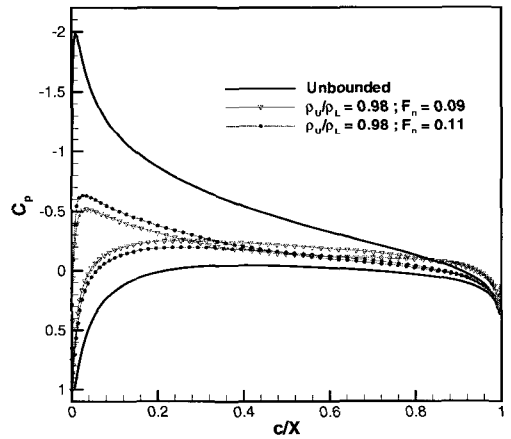


Fig. 9 Comparison of pressure distributions: near a pycnocline (symbols) and unbounded case(solid line)

9는 경계면이 없는 익형에 대한 동압계수 분포(실선)와 매질 경계면이 있는 두 가지 속도에 대한 동압 계수 분포(기호)를 보여준다. 이미 유선 비교에서 예상되듯이 유입 유동의 방향 변화는 선단에서의 양력 발생을 급격히 감소시키며 이러한 경향은 두 가지 속도 모두에서 동일하게 나타났다.

4. 결 론

비정렬 격자에서 ghost fluid 법에 의한 두 가지 밀도의 비정상 비압축성 유동해석 코드를 이용하여 수중운동체가 밀도약층 주위에서 항주하는 경우에 대한 유동장을 해석하였다. 매질 경계면 주위에서의 종속변수의 불연속이 비물리적인·확

산이나 진동 없이 한 개의 요소 안에서 포착되었다.

밀도약층 위 아래의 작은 밀도차이로 인하여, 실질적인 수중운동체의 저속 구간에서 임계속도 상태가 발생한다. 또한 내면파의 파장에 비하여 밀도약층까지의 수심이 작기 때문에 고립내면파도 쉽게 발생한다.

두 층의 밀도비가 0.98로 아주 작은 밀도 차이임에도 불구하고, 매질 경계면의 존재는 익형 주위의 유선을 익형과 나란하게 변화시킴으로써, 양력의 급격한 감소를 초래함이 확인되었다. 따라서 잠수함 등이 밀도약층 주위에서 항주하는 경우, 송강타의 양력 감소 등의 동유체력 변화가 크게 나타날 것으로 예측된다.

참고문헌

- [1] Velegrakis, A.F., Oikonomou, E., Theocharis, A., Collins, M.B., Kontoyiannis, H., Papadopoulos, V., Voulgaris, G., Wells, T. and Balopoulos, E., 1999, "Internal waves revealed by Synthetic Aperture Radar (SAR) imagery in the vicinity of the eastern Certan Arc Straits (Eastern Mediterranean)," *Progress in Oceanography*, Vol.44, p.553-572.
- [2] Melville, W.K. and Helfrich, K.R., 1987, "Transcritical two-layer flow over topography," *J. Fluid Mech.*, Vol.178, p.31-52.
- [3] Gruc, J., Friis, H.A., Palm, E. and Rusas, P.O., 1997, "A method for computing unsteady fully nonlinear interface waves," *J. Fluid Mech.*, Vol.351, p.223-252.
- [4] Iafrafi, A., Mascio, A.D. and Campana, E.F., 2001, "A level set technique applied to unsteady free surface flows," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.35, p.281-297.
- [5] Sussman, M., Almgren, A.S., Bell, J.B., Colella, P., Howell, L.H. and Welcome, M.L., 1999, "An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.148, p.81-124.
- [6] Helenbrook, B.T., Martinelli, L. and Law, C.K., 1999, "A numerical method for solving incompressible flow problems with a surface discontinuity," *J. Comput. Phys.*, Vol.148, p.366-396.
- [7] Fedkiw, R.P., Aslam, T., Merriman, B. and Osher, S., 1999, "A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)," *J. Comput. Phys.*, Vol.152, p.457-492.
- [8] Liu, T.G., Khoo, B.C. and Wang, C.W., 2005, "The ghost fluid method for compressible gas-water simulation," *J. Comput. Phys.*, Vol.204, p.193-221.
- [9] Caiden, R., Fedkiw, R.P. and Anderson, C., 2001, "A numerical method for two-phase flow consisting of separate compressible and incompressible regions," *J. Comput. Phys.*, Vol.166, p.1-27.
- [10] 신상목, 김동훈, 2004, "동압계수의 불연속성을 이용한 내면파의 수치해석," *대한조선학회논문집*, Vol.41-4, p.17-29.
- [11] Shin, S., 2005, "Internal wave computations using the ghost fluid method on unstructured grids," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.47, p.233-251.
- [12] Shin, S., Kim, C.K. and Bai, K.J., 2004, "Numerical simulation on an interaction of a vortex street with an elliptical leading edge using an unstructured grid," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.44, p.331-346.