Generalized Finite Element Method(GFEM)의 개념과 그 응용

Concept of the Generalized Finite Element Method and its Application

김 대 진*

*미 일리노이 주립대 토목공학과 박사과정

Generalized finite element method(GFEM)은 무요소법(meshfree methods)의 발전과정에서 무요소법이 지닌 단점을 보완하고 그 장점을 살리는 과정에서 만들어진 수치해석 기법으로 많은 연구자들에 의해 연구 및 발전되어 왔다. 본고에서는 GFEM의 개념을 간단히 소개하고 이를 이용한 최근의 연구 중 임의의 정칙성(regularity)을 지니는 GFEM 형상함수 및 수치해석적 방법을 통해 GFEM의 확장함수(enrichment function)를 구축할 수 있는 global-local 해석 기법을 다루고자 한다.

1. 서 론

Generalized finite element method(GFEM)은 Babuska와 그의 동료들 그리고 Duarte 및 Oden에 의해 제안된 수치해석 방법으로, 이른바 무요소법(meshfree methods) 중 일부는 GFEM의 특별한 경우로 간주될 수 있다.[4),12),15)] GFEM의 가장 큰 특징은 단위분할(partition of unity)를 이용한다는 것이다. 단위분할에 특정함수를 곱할 경우 정의역 내의 임의의 점에서 특정함수 값을 재생산(reproduction)할 수 있다. 따라서 해석하고자 하는 문제의 특성에 따라 다른 종류의 함수를 이용하여 GFEM 형상함수를 구성할 수 있다. 그러므로 고전적인 유한요소법이 다항식으로 표현되는 형상함수를 사용함으로써 잘 묘사하기 힘들었던 해들을 GFEM은 적은 수의 자유도로 쉽게 묘사할 수 있다.

GFEM은 무요소법이 가진 장점-균열전파(crack propagation) 및 대변형(large deformation)과 같은 문제를 다루는데 용이함-과 유한요소법이 가진 장점-계산량을 많이 요구하지 않으며 비교적 간단한 공식화로 사용가능함-을 동시에 가지고 있기 때문에 지난 10여년에 걸쳐 많은 연구자들에 의해 발전 및 응용되어 왔다. 본고에서는 GFEM의 개념 및 이를 이용해 이루어진 최근의 몇몇 연구에 대해 간단히 소개하고자 한다. 임의의 정칙성(regularity)을 지니는 GFEM 형상함수와 수치해석적 방법을 통해 GFEM의 확장함수(enrichment function)를 구축할 수 있는 global-local 해석 기법이 본론에서 다루어질 것이다.

2. GFEM의 공식화

2.1 GFEM 형상함수

GFEM은 수치해석 결과를 얻기 위한 해석 공간을 구축하기 위해 단위분할(partition of unity; PoU)을 사용한다. 단위분할은 단순히 정의역 내의 각 점에서 그 값들의 합이 1이 되는 일련의 함수들이다. 단위 분할의 예로, 잘 알려진 라그랑지 타입의 선형 형상함수(Lagrangian type linear shape function) 그리고 최소자승근사법(moving least square function)이나 세퍼드 함수(Shepard function)등을 들 수가 있다. 일반적으로 라그랑지 타입의 선형 형상함수가 계산량을 많이 요구하지 않기 때문에 단위분할로 사용된다. GFEM 형상함수는 위에서 언급된 단위분할 φ_α과 확

장함수(enrichment function) $L_{i\alpha}$의 곱으로 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_i^{\alpha} := \varphi_{\alpha} L_i \alpha \quad i \in I(\alpha)$$

여기서 $I(\alpha)$는 각 절점에서의 확장함수의 인덱스를 가리킨다. 보통 확장함수로 다항함수가 많이 쓰이지만 이의 선택에 많은 자유가 있다. 단위분할 φ_{α}의 받침(support 혹은 cloud)는 각 절점을 공유하는 유한요소들의 합집합으로 주어진다.

그림 1은 확장함수로 다항함수를 이용한 GFEM 형상함수의 구성을 설명한다. 그림에서 노란색으로 표시된 영역은 단위분할의 받침을 가리키며, 그 위로 단위분할과 확장함수가 표시되어 있다. 최종적으로 GFEM 형상함수 ϕ_{α}^{i}는 단위분할과 확장함수의 곱으로 만들어짐을 그림 1이 표현하고 있다.

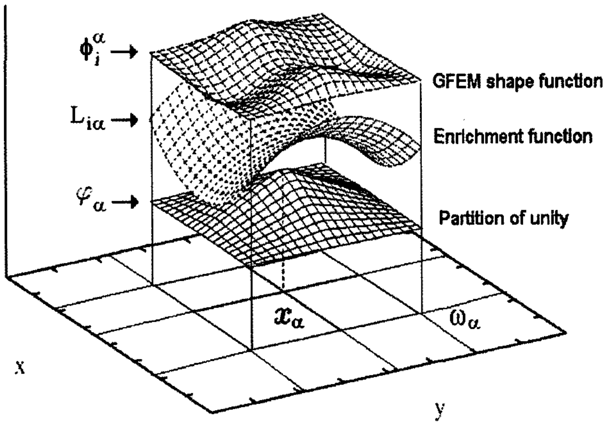


그림 1 GFEM 형상함수의 구성[8]

확장함수로 다항함수를 이용할 경우 GFEM은 고전적인 유한요소법과 본질적으로 동일하지만 *hp*-확장(*hp*-extension)이 GFEM에서 보다 쉽게 수행될 수 있다. 예를 들면 generalized finite element에서 각각의 절점은 서로 다른 차수의 다항함수를 확장함수로 가질 수 있다. 뿐만 아니라 방향에 따라 서로 다른 차수의 형상함수를 가질 수 있기 때문에 비등방성(non-isotropic) 유한요소 모델링이 한층 쉬워지게 된다. 또한 고전적인 유한요소법에서 처럼 높은 차수의 형상함수를 갖기 위해 유한요소의 변에 절점을 추가할 필요가 없기 때문에 서로 다른 차수의 형상함수를 가지는 유한요소들을 하나의 요소망(mesh)내에서 함께 임의로 사용할 수 있다.

2.2 단위분할의 재생산 조건(Reproducing property of the partition of unity)

단위분할의 가장 큰 특징은 정의역내 임의의 점에서 확장함수의 값을 재생산할 수 있다는 것이다.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \phi_i^{\alpha}(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \varphi_{\alpha}(x) L_{i\alpha}(x) = L_{i\alpha}(x)$$

따라서 주어진 공학 문제의 해가 어떤 함수로 구성되는지 미리 알 수 있는 경우, 그 함수를 GFEM 형상함수의 확장함수로 사용하면 적은 수의 자유도로 아주 정확한 수치해석 결과를 얻을 수 있다. 고전적인 유한요소법의 경우 형상함수가 다항함수로 구성되기 때문에 주어진 문제의 해가 다항함수로 잘 묘사될 때에는 (smooth solution) 정확한 결과를 얻을 수 있다. 하지만 그렇지 않은 경우(rough solution) 요소망을 아주 세분화시키거나(*h*-extension) 혹은 높은 차수의 형상함수를 사용해야만(*p*-extension) 정확한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 GFEM의 경우 형상함수가 다항함수로 제한되지 않기 때문에 고전적인 유한요소법과 같은 제한을 가지지 않는다. 확장함수의 선택에 대해서는 2.3절에서 추가로 논의될 것이다.

2.3 확장함수의 선택

주어진 공학문제를 기술하는 편미분 방정식의 구조에 따라 그 해를 확장함수로 사용할 수 있는 많은 경우가 있다. 그 중 3차원 공간에서 선형탄성 파괴역학(linear elasticity fracture mechanics)의 해를 이용한 확장함수에 대해 간단히 소개하고자 한다.

Belytschko 등은 균열 단부(crack tip)의 선형탄성 파괴역학에 의한 응력장을 묘사하기 위해 다음의 확장함수를 제안하였다(Belytschko는 이를 가지함수(branch function)라 명명하였다).[2]

$$L_{i\alpha} = \left[\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

여기서 r과 θ는 균열단부(crack tip)를 원점으로 하는 극좌표계(polar coordinate system)의 두 변수이다. 위의 확장함수는 Westergaard[20]와 Wiliams[22] 등에 의해 제안된 고전적인 2차원 선형탄성 파괴역학의 해로부터 추출된 성

분들이다. 이 식들은 2차원 선형탄성 파괴역학 이론으로부터 유도되었기 때문에, 3차원 구조물의 표면에 가까운 균열 단부보다는 평면변형률 조건(plane strain condition)을 만족시키는 구조물의 내부의 균열 단부에 대한 응력장(stress field)을 보다 잘 묘사할 수 있다.

위의 확장함수와 유사하면서 L자 형태의 입체(L-shaped domain) 혹은 임의의 각을 지니는 가장자리(edge)를 포함하는 보다 일반적인 경우에 대한 확장함수가 Duarte등에 의해 제안되었으며 [4]에 소개되어 있다.

3. GFEM의 응용

3.1 임의의 정칙성(regularity)을 지니는 GFEM 형상함수

본질적으로 C^0특성을 가지는 라그랑지 타입의 유한요소(Lagrangian finite elements)와는 달리 보다 매끄러운 근사함수를 요구하는 응용 예가 많이 존재한다. 예를 들면 과도한 변형을 가지는 고무 재료의 해석 혹은 키르히호프-러브 판모델(Kirchhoff-Love plate model)의 경우 보다 매끄러운 근사함수의 성질을 요구하기 때문에 이 조건을 충족시키는 유한요소 모델링에 많은 어려움이 있어왔다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 무요소법(meshfree methods)이 이용되어 왔으며 이러한 클래스의 문제들의 해결에 효과적임을 보였다.[11),16)]

하지만 무요소법은 일반적으로 형상함수를 수치적분하기 위해 많은 적분점(integration points)을 사용하여야 하기 때문에 계산량이 많다는 단점을 가지고 있다. 뿐만 아니라 무요소법은 기존의 유한요소 자료구조(data structure)를 직접적으로 활용할 수 없으며, 디리클레 경계조건(Dirichlet boundary conditions)을 부여하는 것에 특별한 주의가 필요하다.

따라서 이와 같은 문제점을 해결하기 위해 Duarte 등에 의해 기존의 유한요소와 동일한 지지부를 가지며 임의의 차수로 미분가능한 GFEM 형상함수가 제안되었다.[6)] 이 방법에서 $C^k(k\geq 1)$특성을 가지는 단위분할이 사용되며 확장함수로는 이전과 동일하게 다항함수 등이 사용될 수 있다. 다항함수의 경우 그 자체로서는 C^∞특성을 가지기 때문에 단위분할의 미분가능차수(smoothness)에 따라 전체 형상함수의 미분가능차수가 결정된다.

새로 제안된 GFEM 형상함수에서 $C^k(k\geq 1)$ 특성을 지니는 단위분할을 구성하기 위해 Edward에 의해 제안된 공식을 사용한다.[9)] 이 단위분할은 기본적으로 아래의 셰퍼드 함수(Shepard function)의 형태를 지니고 있다.

$$\varphi_\alpha(x)=\frac{W_\alpha(x)}{\sum_{\beta(x)}W_\beta(x)}\quad \beta(x)\in\{\gamma \mid W_\gamma(x)\neq o\}$$

$$\alpha=1,\ldots,N$$

여기에서 N은 정의역 내의 유한요소의 개수이다. 위의 함수 내에 포함된 가중치 함수(weight function)는 아래의 식과 같이 구성된다.

$$W_\alpha(x):=e^{c\alpha}\prod_{j=1}^{M_\alpha}\varepsilon_{\alpha,j}(x)$$

여기에서 C_α는 각각의 절점에서 가중치 함수의 값을 1로 만들기 위한 계수이며 M_α는 절점에 정의된 받침(support 혹은 cloud)이 가진 변의 개수이다. 가중치 함수는 요소 내부로 들어갈수록 값이 증가하는 지수함수($\epsilon_{\alpha,j}$)의 곱으로 표현될 수 있다. 그리고 이와 같은 지수함수를 받침 경계함수(cloud boundary function)라고 부르며 그림 2와 같이 묘사된다. 볼록한 모서리 만을 가지는 받침(convex cloud)의 경우에 대하여 가중치 함수와 단위 분할의 예가 그림 3에 표현되어 있다.

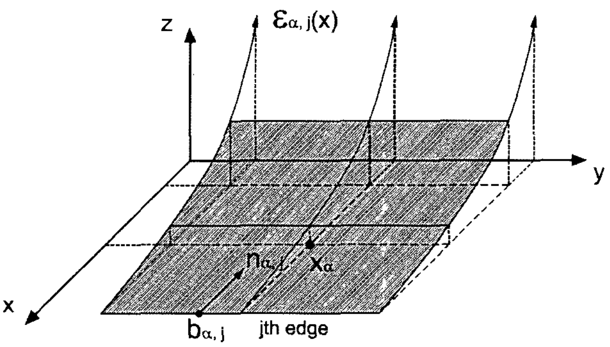
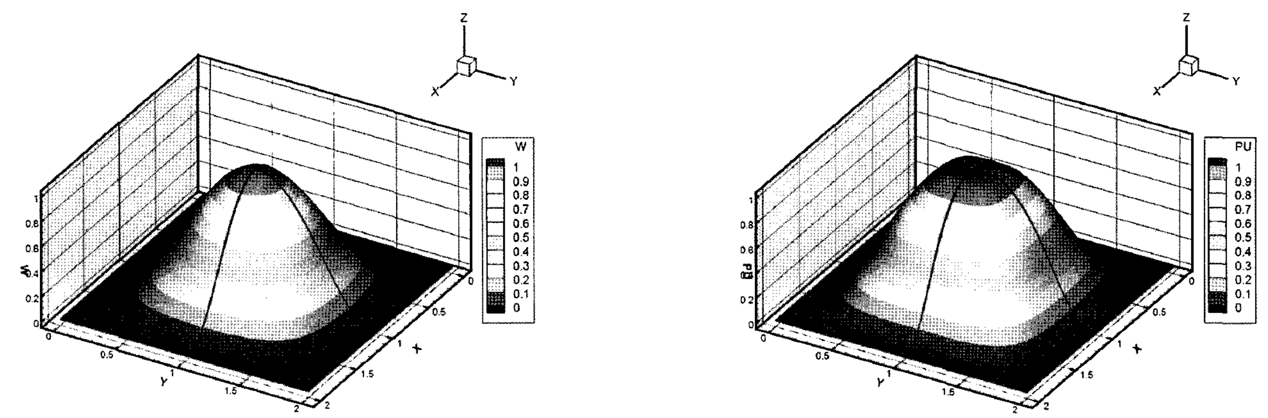


그림 2 2차원 받침 경계함수(cloud boundary function)의 예[6)]

하지만 그림 4에 묘사된 것과 같이 오목한 모서리를 가지는 방침(concave cloud)의 경우 점선을 따라 가중치 함수의 값이 0이 되기 때문에 가중치 함수의 수정이 필요하다. 이를 위해 R함수 "or"을 사용한다.

$$(f_1\vee_0^k f_2):=\left(f_1+f_2+\sqrt{f_1^2+f_2^2}\right)\left(f_1^2+f_2^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

R함수 "or"의 특징은 주어진 두개의 함수 f_1과 f_2중 하나만



a) 볼록한 형상의 받침에 대한 가중치 함수　　　　b) 볼록한 형상의 받침에 대한 단위분할

그림 3 볼록한 형상의 받침(support)에 대한 가중치 함수와 단위분할[6)]

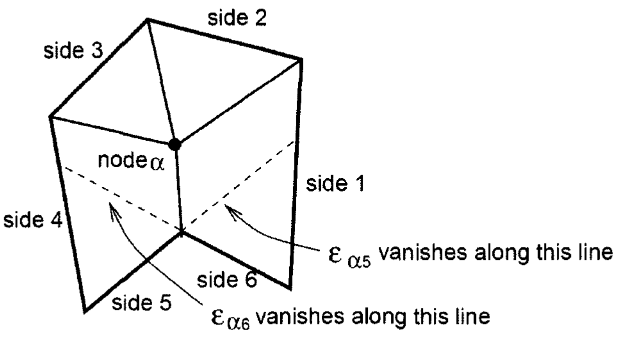


그림 4 오목한 모서리를 포함하는 유한요소[6)]

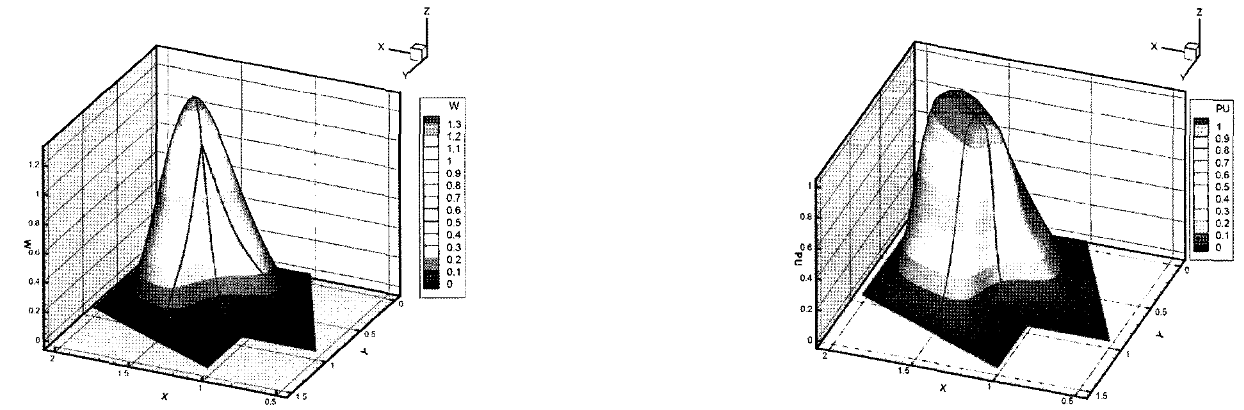
양의 값을 가지면 결과로 만들어지는 함수 "or" 또한 0 이상의 값을 갖게 된다는 것이다. 또한 이 함수는 $C^k(k\geq1)$ 특성을 갖는다. 따라서 이와 같은 R함수 "or"의 특징을 이용하면 그림 4에 묘사된 오목한 모서리를 가지는 받침(concave cloud)의 경우에도 $C^k(k\geq1)$ 성질을 지니는 단위분할을 구성할 수 있게 된다. 오목한 모서리를 구성하는 변에 대한 받침 경계함수는 다음의 식으로 표현된다.

$$\varepsilon^{nc}_{\alpha,mn}(x) := \frac{\varepsilon_{\alpha,m}(x)\vee^{k}_{0}\varepsilon_{\alpha,n}(x)}{\varepsilon_{\alpha,m}(x_\alpha)\vee^{k}_{0}\varepsilon_{\alpha,n}(x_\alpha)}$$

윗 식의 분모는 볼록한 모서리만을 가지는 받침의 경우에 계수 C_α가 필요했던 것과 마찬가지로 각 절점에서 가중치 함수의 값을 1로 만들기 위해 필요하다. 오목한 모서리를 가지는 경우에 대한 가중치 함수를 그림 4의 예제에 대해 표현하면 다음과 같다.

$$W_\alpha(x) := \left(e^{c\alpha}\prod_{j=1}^{4}\varepsilon_{\alpha,j}(x)\right)\varepsilon^{nc}_{\alpha,56}(x)$$

오목한 모서리를 가지는 경우에 대해 이 개념을 이용한 가중치 함수와 단위 분할의 예가 그림 5에 표현되어 있다. 보다 자세한 수식의 전개와 수렴거동(convergence behavior) 그리고 제안된 형상함수를 이용한 예제는[6)] 보다 세부적으로 기술되어 있다. C^1성질을 지니는 연속적인 키르히호프-러브



a) 오목한 형상의 받침에 대한 가중치 함수　　　　b) 오목한 형상의 지지부에 대한 단위분할

그림 5 오목한 형상의 받침(support)에 대한 가중치 함수와 단위분할[6)]

판요소 모델은 지난 반세기동안 많은 노력을 쏟아부었음에도 불구하고 쉽게 해결할 수 없었던 어려운 문제였으나, 소개된 GFEM 형상함수는 비교적 간단한 수학적 모델로 이 문제를 해결할 수 있다.

3.2 GFEM을 이용한 global-local 해석 방법

2.2절에 소개된 단위분할의 재생산 조건에 의하면 GFEM에 의한 수치해석 결과의 정확성은 확장함수가 얼마나 정해(exact solution)를 잘 묘사할 수 있느냐에 의존한다. 그러나 대부분의 경우에 있어 주어진 공학문제의 해를 수학식의 형태로 얻을 수 있는 경우는 무척 제한되어 있다.

2.3절에 소개된 2차원 선형탄성 파괴역학에 근거한 확장함수를 3차원 균열단부의 해석에 이용할 경우, 균열단부 주변의 응력장을 정확히 묘사하기 위하여 요소망을 추가로 세분화해 주어야 한다. 이는 GFEM이 가진 장점을 반감시키는 것이며 전파되는 균열(propagation cracks)의 경우 모델링에 많은 어려움을 야기시킨다. 왜냐하면 균열단부가 어디에 형성될지 미리 알 수 없고 균열이 전파되면서 단부가 이동함에 따라 요소망을 새로 짜주어야 하기 때문이다.

이에 Strouboulis 등은 수치적인 방법으로 확장함수를 구성할 수 있는 방법을 제시하였다.[19] 제시된 방법은 확장함수를 구축하고자 하는 국부 영역(local domain)에 일련의 노이만 경계조건(Neumann boundary conditions)을 적용시켜 이 경계치 문제(boundary value problem)를 수치적으로 푼 후 그 해를 확장함수로 이용한다. 이 경우 정확한 확장함수 값을 얻기 위해 국부 경계치문제(local boundary value problem)에 수천 수만개의 자유도를 사용하더라도 그 결과로 나타나는 확장함수는 불과 몇 개의 자유도를 추가하는 것에 불과하다.

하지만 Strouboulis의 접근방법은 한계점을 지니고 있는데 국부 경계치문제를 풀기 위해 필요한 경계조건(boundary conditions)의 선택이 쉽지 않다는 것이다. Strouboulis는 2차원에서 경계치 문제를 풀기 위해 라플라스 방정식(Laplace equation)의 해인 조화다항식(harmomic polynomial)을 국부 경계치문제의 노이만 경계조건으로 사용하였다. 하지만 이 방법은 3차원 탄성역학 문제는 물론, 2차원 비선형 문제로의 확장조차 용이하지가 않다.

이에 Duarte 등은 Strouboulis의 접근방식을 확장하여3차원 선형탄성 파괴역학 문제, 특히 전파되는 균열 문제에 응용할 수 있도록 다음과 같은 알고리즘을 제안하였다.[5),7),8)]

i) 2.3절에 제시된 확장함수를 균열단부 주변의 유한요소에 사용하여 전체 문제(global problem)를 푼다.

ii) 단계 i)의 전체문제의 해 혹은 이전 균열전파단계의 해를 국부문제(local problems)의 경계조건으로 사용하여 이 문제를 푼다.

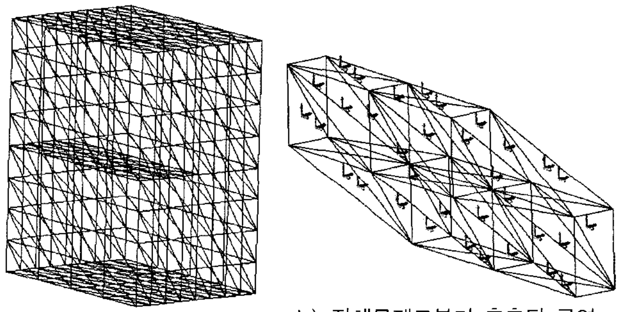
iii) Strouboulis의 접근방식에서처럼 단계 ii)에서 구한 국부문제의 해를 전체 문제의 확장함수로 이용한다.

iv) 전체 문제를 풀고 균열을 진행시킨다.

v) 균열이 전파를 멈출때까지 단계 ii)로 되돌아가 과정을 반복한다.

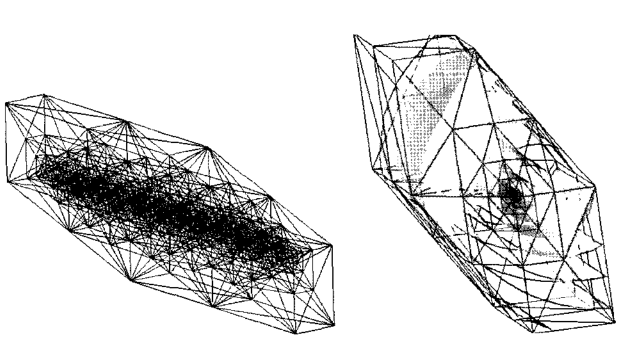
단계 i)은 이러한 시뮬레이션의 초기 단계에서만 수행되고 이후로부터는 이전단계의 전체문제의 해(global solution)를 국부문제의 경계 조건으로 사용한다. 이 때 국부문제의 경계조건으로 Strouboulis의 방법과 달리 디리클레 경계조건이 사용된다. 정확한 국부 문제의 해를 얻기 위해서는 국부 영역(local domain)에 대한 최적화된 *hp*-확장(*hp*-extension)이 필수적이다.

그림 6과 7은 위에서 제안된 알고리즘을 이용한3차원 정적 균열해석 문제의 간단한 예를 보여준다. 그림 6의 a)는 이 예제의 전체 영역을 보여주며 b)는 전체 요소망에서 추출된 균열단부의 국부요소망을 보여준다. 정확한 확장



a) 균열을 포함한 3차원 입방체　　b) 전체문제로부터 추출된 균열단부 주변의 국부요소망

그림 6 Global-local 해석을 위한 전체 및 국부 영역의 설정[8)]



a) *hp*-확장을 적용시킨 국부문제　　b) 국부문제의 수치해석 결과(등변위면)

그림 7 전체문제의 확장함수를 수치해석적으로 얻기 위한 국부문제의 풀이과정[8)]

함수를 구하기 위해 *hp*-확장이 적용된 국부 문제가 그림 7 a)에 표현되어 있으며, 이 국부문제를 풀어서 얻은 등변위면(isosurface of displacement)이 그림 b)에 나타나 있다.

제안된 global-local 해석방법은 전체 영역이 여러개의 동일한 혹은 거의 유사한 국부 문제(local problems)을 포함하는 경우 매우 효과적으로 이용될 수 있다. 예를 들어 여러개의 균열을 동시에 가진 3차원의 입체를 가정하자. 이 경우 하나의 균열에 대한 국부 문제를 풀고 그 해를 확장함수의 형태로 여러개의 균열에 동시에 적용시킬 수 있다. 그 결과 전체문제를 풀기 위해 요구되는 자유도의 수가 크게 감소된다. 왜냐하면 앞에서 언급했듯 수천 수만개의 자유도를 요구하는 국부 문제도 확장함수의 형태로 전체 문제에 전달되는 해는 불과 몇 개에 불과하고 입체에 포함된 여러개의 균열에 대해 동일한 국부문제를 반복해서 풀 필요가 없기 때문이다.

수치해석 문제의 연산에 있어 대부분의 과부하가 속도보다는 기억용량(memory size)에서 발생함을 고려할 때 제안된 알고리즘은 기존의 수치해석 방법이 가지고 있는 약점을 없애는데 대단히 유효하다는 것을 알 수 있다. 또한 이 방법은 재료의 미소 영역(micro level)에서 발생한 거동이 어떻게 거대영역(macro level)에 영향을 미치는지 규명하고자 하는 다중스케일기법(multi-scaling approach)의 한 방법으로 효과적으로 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

4. 결 론

GFEM의 간단한 개념 및 최근에 연구가 이루어진 두 가지 응용분야 - 임의의 정칙성을 지닌 GFEM 형상함수 및 확장함수를 수치적으로 구성할 수 있는 global-local 해석방법 - 가 본론에서 소개되었다.

이 밖에도 GFEM의 많은 응용분야가 존재하는데 가장 대표적인 것으로는 Belytschko에 의해 XFEM(extended finite element method)로 명명된 균열전파문제(crack propagation problems)에 대한 응용을 들 수 있다.[13),14)] 균열전파의 문제를 접착영역모델(cohesive zone model)과 결합시켜 균열단부(crack tip)에서의 비선형거동을 고려한 파괴역학 문제의 해결에 이용되기도 하였으며,[14),21)] 최근에는2차원상에서의 해석에서 벗어나 3차원상의 균열전파 문제에도 많은 연구자들이 관심을 보이고 있다.[1),10)]

한편으로 재료의 미소구조(micro structure)에서 불연속적인 결정입계(discontinuous grain boundary)를 가지는 다결정(polycrystalline)의 해석에도 GFEM이 이용되고 있으며,[17),18)] 섬유보강 복합재료(fiber reinforced composite material)의 구조해석에 있어 섬유(fiber)와 기질(matrix)의 수치모델 구성에 이용되고 있기도 하다.[13)]

참 고 문 헌

1. P. M. A. Areias and T. Belytschko, "Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:760~788, 2005.
2. T. Belytschko and T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5): 601~620, 1999.
3. C. Daux, N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko, "Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1741~1760, 2000.
4. C. A. Duarte, I. Babuska, and J. T. Oden, "Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems," *Computers and Structures*, 77:215~232, 2000.
5. C. A. Duarte, D.-J. Kim, and I. Babuska, "A Global-Local Approach for the Construction of Enrichment Functions for the Generalized FEM and its Applications to Three-Dimensional Fracture Mechanics Problems," In preparation.
6. C. A. Duarte, D.-J. Kim, and D. M. Quaresma, "Arbitrarily Smooth Generalized Finite Element Approximations," *Submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* in 2005.
7. C. A. Duarte, D.-J. Kim, and I. Babuska, "Three-dimensional generalized FEM computations using multi-level enrichment functions," In *Eighth US National Congress on Computational Mechanics*, Austin, TX, USA, 25~27 July 2005. Invited abstract.
8. C. A. Duarte and I. Babuska, "A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized fem and its application to propagating three-dimensional cracks," In V. M. A. Leitao, C. J. S. Alves, and C. A. Duarte, editors, *ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods*, Lisbon,

Portugal, 11~14 July 2005. 8 pages.

9. H. C. Edwards, "C_∞ finite element basis functions," Technical report, TICAM Report 96~45, The University of Texas at Austin, 1996.
10. T. C. Gasser and G. A. Holzapfel, "Modeling 3D crack propagation in unreinforced concrete using PUFEM," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2859~2896, 2005.
11. P. Krysl and T. Belytschko, "Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method," *Computational Mechanics*, 17:26~35, 1996.
12. J. M. Melenk and I. Babuska, "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289~314, 1996.
13. N. Moes, M. Cloirec, P. Cartraud, and J.-F. Remacle, "A computational approach to handle complex microstructure geometries," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3163~3177, 2003.
14. N. Moes and T. Belytschko, "Extended finite element method for cohesive crack growth," *Engineering Fracture Mechanics*, 69:813~833, 2002.
15. J. T. Oden, C. A. Duarte, and O. C. Zienkiewicz, "A new cloud-based hp finite element method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153:117~126, 1998.
16. D. C. Simkins Jr., S. Li, H. Lu, and W. K. Liu, "Reproducing kernel element method. Part IV: Globally compatible $C^n(n \geq 1)$ triangular hierarchy," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:1013~1034, 2004.
17. A. Simone, C. A. Duarte, and E. van der Giessen, "A generalized finite element method for grain-boundary sliding in polycrystals," In D. R. J. Owen and E. Onate, editors, VIII *International Conference on Computational Plasticity Fundamentals and Application-Complas 2005*, Barcelona, Spain, 5~8 September 2005. ECCOMAS, CIMNE, Barcelona, Spain. 3 pages.
18. A. Simone, C. A. Duarte, and E. van der Giessen, "A generalized finite element method for polycrystals with discontinuous grain boundaries," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006. Accepted for publication.
19. T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuska, "The generalized finite element method," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:4081~4193, 2001.
20. H. M. Westergaard, "Bearing pressures and Cracks," *Journal of Applied Mechanics*, 6:49~53, 1939.
21. G. N. Wells and L. J. Sluys, "A new method for modeling cohesive cracks using finite elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:2667~2682, 2001.
22. M. L. Wiliams, "On the stress distribution at the base of a stationary crack," *Journal of Applied Mechanics*, 24:109~114, 1957.