

표준 영상에 의한 FFT 기반 상호상관 PIV 알고리즘의 불확도 해석

이석중* · 최중근* · 성재용† · 황태규** · 도덕희***

Uncertainty Analysis of Cross-Correlation Algorithm based on FFT by PIV Standard Images

Sukjong Lee*, Junggeun Choi*, Jaeyoung Sung†, Tae Gyu Hwang**, Deog Hee Doh***

Abstract. Uncertainty introduced by a cross-correlation algorithm based on FFT has been investigated using PIV standard images. The standard images were generated by the Monte Carlo simulation method. Both bias and random errors from the velocity vector have been analyzed with regard to the particle diameter, displacement, and the number of particles. The uncertainty of velocity is evaluated based upon the ISO/IEC standard. As a result, a total error of 0.26% is included in the PIV cross-correlation algorithm. In addition, the uncertainty budget is presented, where the effect of the above three variables is examined. According to the budget, the variation of the number of particles within the interrogation window mainly contributes to the combined standard uncertainty of the real measured velocity field when excluding the effect of errors by the experiments itself. Finally, the expanded uncertainty is found to be about 12% at the 95% confidence level.

Key Words: Standard Image(표준영상), Cross-Correlation PIV(상호상관 PIV), Standard Uncertainty(표준 불확도), Expanded Uncertainty(확장불확도)

1. 서 론

80년대에 등장한 PIV(particle image velocimetry) 유동계측 기법은 정량적 가시화(quantitative visualization) 기법으로서 주어진 순간에 전체 유동영역에서의 정량적 속도 데이터를 동시에 얻을 수 있다. 이러한 이유로 PIV 기술은 90년대 들어 컴퓨터와 광학이 발전하면서 급속히 성장하였다. 하드웨어의 발전과 더불어 획득된 영상으로부터 속도장을 추출하는 소프트웨어적 기법에 있어서도 지속적인 발전을 거듭해왔다. 속도장 추출 방식에 따라 분류하면 크게 미소조사구간에서 입자들의 통계적인 평균속도를 구하는 PIV 방식과 개별입자의 위치 정보로부터 입자의

변위를 직접 구하는 PTV 방식으로 나눌 수 있다.

PIV에서의 속도벡터 추출에 관하여 Kean & Adrian⁽¹⁾이 상호상관(cross correlation) 알고리즘을 발표한 후 계측정확도와 성능을 높이기 위한 다양한 노력들이 시도되었다. Hart⁽²⁾는 계층적인 순환 연산(iterative correlation)을 사용하여 PIV 결과의 공간 분해능을 증가시키는 방식의 새로운 알고리즘을 제안하였고, Scarano & Riethmuller⁽³⁾, Hu 등⁽⁴⁾, Hart 등⁽⁵⁾은 PIV 입자영상의 데이터 처리과정에서 에러 벡터들을 제거하기 위해 계층적 순환 상관법과 CBC(correlation based correction) 기법을 적용하였다. 한편, PIV 알고리즘을 적용함에 있어서 발생하는 오차에 관한 연구도 있었으며, Willert & Gharib⁽⁶⁾은 가상의 디지털 영상으로부터 입자의 변위, 밀도에 따른 RMS오차에 대해 논의하였다. Okamoto 등⁽⁷⁾은 PIV 알고리즘의 오차를 평가하기 위한 표준영상을 LES 수치해석 결과를 바탕으로 만들어 일본 가시화학회(VSJ) 홈페이지를 통해 제공하고 있다.

2000년대 들어서는 PIV 기법이 보편적인 유동장

†서울산업대학교 기계공학과
E-mail : jysung@snut.ac.kr

*서울산업대학교 에너지환경대학원

**한국해양대학교 대학원

*** 한국해양대학교 기계공학과

계측 도구로 자리잡아 가고 있으며, 이에 따라 지금까지 개발되고 발전해 온 PIV 알고리즘에 대하여 표준화된 성능평가방법을 개발하는 것이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 표준영상(standard image)을 기반으로 현재 가장 널리 사용되는 FFT(fast Fourier transformation)를 이용한 상호상관 PIV 알고리즘에 대하여 입자 직경, 변위, 입자 영상밀도에 따른 오차를 계통적 오차와 불확도로 나누어 체계적으로 분석하고 각각의 성분의 변화량이 전체 불확도에 미치는 기여도를 평가하고자 한다.

2. 상호상관 PIV

PIV 계측에 있어 속도장 측정원리는 주어진 시간간격에 대하여 유동장에 삽입된 입자의 변위를 측정함으로써 속도를 구하는 방식이다. 입자의 변위를 구하는 방법은 여러 가지가 있으나 상호상관 계수에 의한 입자 추적 기법을 사용한다. 주어진 시간 t 와 $t+\Delta t$ 에서의 빛의 밝기를 나타내는 함수를 각각 $f(m, n)$, $g(m, n)$ 이라 할 때, 상호상관 계수 R 은 다음 식으로부터 계산된다.

$$R(p, q) = \frac{\sum_{j=0}^{N-1-M-1} \sum_{i=0}^{N-1-M-1} f(i, j)g(i+p, j+q)}{\sqrt{\sum_{j=0}^{N-1-M-1} \sum_{i=0}^{N-1-M-1} f^2(i, j) \sum_{j=0}^{N-1-M-1} \sum_{i=0}^{N-1-M-1} g^2(i, j)}} \quad (1)$$

where $p = 0, 1, 2, \dots, M-1$,
 $q = 0, 1, 2, \dots, N-1$,

상호상관 계수는 Fig. 1(a)에서와 같이 전체 영상에서 $M \times N$ 픽셀 크기로 추출된 미소조사구간(interrogation window)에 대하여 계산되며, 통상적으로 미소조사구간은 64×64 또는 32×32 픽셀 크기의 윈도우로 설정한다. 각 미소조사구간에는 다수의 입자가 분포되어 있고 이로부터 계산된 상관계수는 Fig. 1(b)와 같이 입자의 변위에 해당하는 위치에서 정점을 가지는 분포를 보인다. 따라서 원점에 대하여 상호상관계수의 정점의 위치가 x, y 방향으로 움직인 입자의 변위가 된다. 각 미소조사구간에서는 한 개의 속도벡터가 얻어지며, 전체 영상을 다수의 미소조사구간으로 분할하여 다수의 속도벡터로 이루어진 속도장의 데이

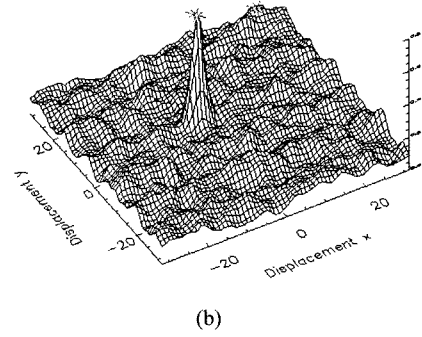
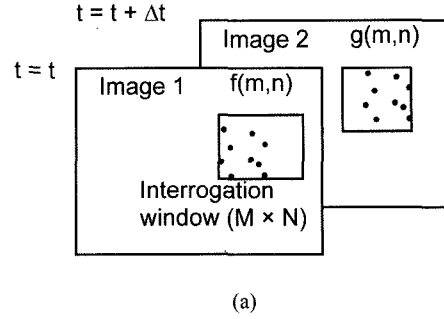


Fig. 1. Velocity vector calculated from a displacement of particle image in a small sub-region; (a) interrogation window, (b) cross-correlation function.

터를 획득한다.

3. 표준영상

PIV 속도장 추출 알고리즘을 오차를 정량적으로 분석하기 위해서는 기지의 속도벡터와 알고리즘에서 찾은 속도벡터 사이의 오차를 살펴보는 것이 중요하다. 실험으로부터 획득된 모든 영상은 실험장치, PIV 장치의 광학적 배치 등 제반 오차들이 포함되어 있어 순수 알고리즘에 의한 오차를 분리하여 고찰하기는 어렵다. 따라서 실험에서 발생할 수 있는 제반 불확실성을 배제한 표준영상의 제작이 절실하다.

본 연구에서는 표준영상을 제작함에 있어 가상의 입자영상에 대한 분포함수를 기존의 연구들에서처럼 다음과 같은 가우스분포함수를 사용하였다.

$$I(x, y) = I_0(z) \exp \left[\frac{-(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{(1/8)d_p^2} \right] \quad (2)$$

여기서 d_p 는 입자의 직경이고 (x_0, y_0) 는 입자의 중심을 나타낸다. I_0 는 중심에서의 입자 영상 값이다. 가우스분포함수에서 입자의 경계를 어떻게 할 것인가에 대해 기존 문헌들에 있어 약간의 차이가 있다. 위 식은 Raffel 등⁽⁸⁾이 사용한 것으로 입자 반경 위치에서 값이 최대값의 e^{-2} 배가 되도록 설정되어 있다. 이는 산란광의 약 95.4%가 존재하는 위치를 입자의 크기로 판단한 것이다. Willert & Gharib⁽⁶⁾은 $e^{-1/2}$ 배로서 68.3%의 산란광이 존재하는 위치를 입자 크기가 되도록 계수를 조정하였고, Okamoto 등⁽⁷⁾은 e^{-1} 배로서 84.1%의 산란광 위치를 입자 경계로 설정하였다. 입자 경계에 대하여 여러 가지 의견이 있을 수 있으나 본 연구에서는 이에 관한 자세한 논의는 생략한다. 레이저 평면광 내의 입자의 위치에 따라 최대 산란광의 강도가 달라지기 때문에 레이저 평면광 두께 내부의 분포함수도 가우스함수를 사용하였다. 따라서 입자 중심에서의 최대 강도는 입자가 평면광 두께 내의 위치에 따라 다음과 같은 식에 의해 결정된다.

$$I_0(z) = q \exp\left[\frac{-z^2}{(1/8)\Delta z^2}\right] \quad (3)$$

여기서 Δz 는 평면광의 두께이며, z 는 평면광 중심에서 떨어진 입자의 z 방향 위치이다. q 는 산란효율을 나타낸다.

표준 영상은 256×256 픽셀의 해상도를 갖는 영상으로 제작되었으며, 초기 시간 t 에서의 입자들을 난수(random number)를 이용하여 주어진 개수만큼 입자의 위치에 분포시킨다. 이와 같이 난수를 이용하여 확률론적으로 문제를 해석하는 방법을 통칭하여 Monte Carlo 모사법이라고 한다. 이 때 중요한 것은 난수의 사용이다. 난수가 갖추어야 할 통계학적 조건은 모든 구간에서 동일한 확률분포를 갖는 수가 되어야 한다는 것이다. 일반적으로 컴퓨터 프로그래밍에서 사용되는 난수발생함수는 의사난수발생기(pseudo random number generator)로서 완전히 랜덤하지는 않다. 따라서 이 의사난수발생기를 사용하여 확률, 통계적 계산에 사용하면 오류가 발생할 수 있기 때문에 통계학적 방법을 통해 검증되어야 한다. 이를 검증하기 위한 대표적 방법으로 카이제곱법(chi-square goodness of fit test)이 있다. 이 방법은 기대했던 분포와 실제

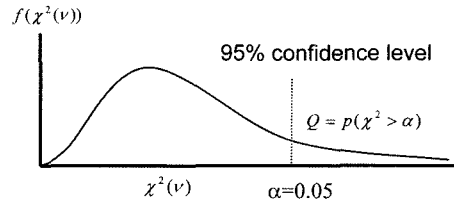


Fig. 2. Chi-square distribution at $df = 9$ and a significant level for a test of hypothesis.

관측된 분포사이에 얼마나 차이가 있는지 알아보는 것으로 그 차이 정도를 점검하여 판단한다.

난수가 되기 위해서는 범위를 총 k 개의 구간으로 나누었을 때, 각 구간의 확률이 모두 $p_{i0}=1/k$ 의 값을 가져야 한다. 기대빈도와 관측빈도 사이의 차이 정도를 나타내는 카이제곱값은 다음과 같이 결정된다.

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} \quad (4)$$

여기서 n 은 총 샘플의 크기이며, n_i 는 각 구간에서의 샘플의 크기이다. n 이 어느 정도 크면 자유도(df, degree of freedom)가 $k-1$ 인 근사 χ^2 의 분포를 이룬다. 카이제곱의 확률밀도함수는 Fig. 2에 나타난 바와 같은 감마함수형태이며, 자유도가 커질수록 정규분포에 가까운 모양을 보인다. 통계적 해석을 하기 위해서는 신뢰도(confidence level)가 필요하며, 일반적으로 99.5%의 신뢰도를 많이 사용한다. 즉, $\chi_{0.05}^2$ (자유도 $df = k-1$, 유의수준 $\alpha = 0.05$)의 값을 판단기준으로 하여 가설을 검증한다. 따라서 식 (4)에서 구한 χ_1^2 의 값이 $\chi_{0.05}^2$ 보다 작으면 99.5%의 확률로 기대빈도와 관측빈도가 잘 일치한다는 가설이 채택된다. 본 연구에서 사용된 난수발생기는 0~1 사이의 값을 발생시키며, 자유도가 9인 경우 총 1000개의 난수를 발생시켰을 때, $\chi_{0.05}^2$ 는 감마함수 테이블부터 16.919이고, 식 (4)에 의해 관측된 χ_1^2 은 8.61로서 균일한 난수를 발생시킨다고 볼 수 있다. Fig. 3은 이상의 기법으로 생성된 표준영상의 예를 보여준다.

4. 불확도 해석

PIV 속도벡터의 추출과정은 두 장의 연속된 영상으



(a)



(b)

Fig. 3. Samples of standard images at $Np = 20$, $\Delta x = 5$, $d_p = 2$; (a) first image, (b) second image.

로부터 상관계수를 구하고, 상관계수의 정점의 위치를 계산하여 입자의 평균변위를 구한다. 이 과정에서 여러 가지 원인에 의해 속도벡터에 오차가 발생할 수 있는데, 대표적으로 연속된 두 영상의 미소조사구간에서 입자 정보의 부족, 서로 매칭되지 않는 입자가 존재, 미소조사구간 내에서의 속도구배, 영상의 푸리에 변환과정에서 발생할 수 있는 주기적인 노이즈(cyclic noise), 상관계수 정점의 위치를 찾는 데 있어서의 불확실성 등이 원인이 된다. 이러한 오차를 줄이기 위해서 미소조사구간의 오프셋, 계층적 순환 상관 등 여러 가지 기법들이 개발되었으나, 본 연구에서는 이들 기법들의 영향을 배제하고 가장 기본적인 알고리즘에 대하여 영상 내 존재하는 입자의 직경, 변위, 밀도에 따른 속도장에 대한 영향을 살펴본다. 사용된 기본 알고리즘은 FFT에 근거한 상호상관 알고리즘이며, 미소조사구간은 가장 널리 사용되는 $32 \times$

32 픽셀의 윈도우에 50% 오버래핑을 한 경우를 사용하였다. 서브픽셀 해상도의 입자의 정점을 구하는 기법으로 가우스 보간함수(Gaussian interpolation function)를 채택하였다. 사용된 영상은 256×256 의 비트맵 표준영상으로 실제 직경이 $10 \mu\text{m}$ 인 입자가 2mm 의 레이저 평면광 내에서 산란되는 조건으로 만들어졌다. 식 (3)의 산란효율은 90%를 사용하였다.

속도벡터의 오차는 주어진 입자변위에 대하여 계산된 값과의 차이를 말하며, 단일 속도벡터에 대한 절대오차는 계통적오차(bias error)와 우연오차(random error)로 다음과 같이 구분할 수 있다.

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_{bias} + \varepsilon_{random} \quad (5)$$

여기서 계통적오차(ε_{bias})는 계산된 속도벡터의 평균값이 참값으로부터 벗어나는 정도를 나타내며, 우연오차(ε_{random})는 평균값을 중심으로 산포된 오차를 의미한다. 따라서 계통적오차는 알고리즘의 정확도(accuracy)를 나타내며, 우연오차는 정밀도(precision)와 관계된다. 본 연구에서는 이 두 가지 지표에 의해 측정 불확도(measurement uncertainty)를 평가한다.

실제 실험에서는 계통적오차를 산출하기 어렵지만 표준영상에서는 기지의 참값이 주어져 있으므로 속도장 추출 알고리즘에서 얻은 데이터와의 차이로부터 식 (6)과 같이 계산할 수 있다. 우연오차는 식 (7)에 주어진 바와 같이 ISO/IEC 규격⁽⁹⁾에 따른 랜덤불확도(RMS random uncertainty) 평가기법으로 구하였다.

$$\varepsilon_{bias} = q_{exact} - \bar{q} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{random} = u_{RMS} = \left(\frac{\sum (q_k - \bar{q})^2}{n(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

여기서 q_{exact} 는 임의로 주어진 참값이고, q_k 는 표준영상으로부터 얻어진 측정값이다. \bar{q} 는 측정값들의 산술 평균값이며, 본 연구에서 사용된 표준영상에서는 $n = 225$ 이다.

4.1 입자수, 입자 변위 및 직경에 따른 고찰

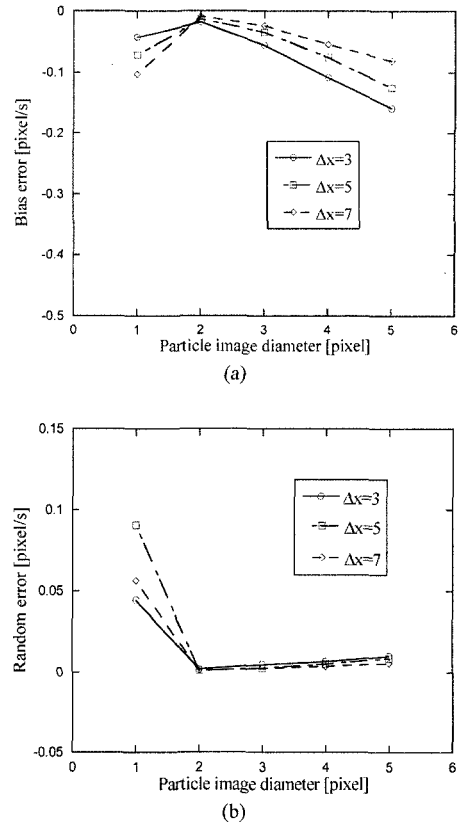
Monte Carlo 모사법에 의한 불확도해석을 위해 Table 1에 나타낸 바와 같이 입자수를 6가지로 변경

Table 1. Parameters used for the error analysis

Parameters	Values
Number of particles (N_p)	4 8 16 24 32 40
Particle displacement (Δx)	1 3 5 7 9
Time separation (Δt)	1/5 3/5 5/5 7/5 9/5
Particle diameter (d_p)	1 2 3 4 5

하고, 입자 변위와 입자 직경을 각각 5가지로 바꾸어 가면서 총 150가지의 경우에 대하여 계산 하였다. 여기서 입자수는 32×32 미소조사구간 내 포함된 평균 입자수이다. 실제 실험에서 오차는 속도벡터의 정확도에 의해 평가되기 때문에 입자의 변위가 바뀔 때 따라 획득된 두 영상의 시간 간격이 반비례하여 바뀐 것으로 설정하였다. 즉, 일정한 속도로 흐르는 유동장을 시간 간격을 달리하여 측정하였을 경우 입자 변위가 달라지고 본 연구에서는 그에 따른 영향을 살펴보고자 하였다. Table 1에서 속도는 $u = 5$ pixel/s로 모두 일정하게 설정되어 있다.

입자의 직경에 따른 영향을 살펴보기 위하여 입자수가 충분히 많은 $N_p = 16$ 인 경우에 대하여 입자 직경을 바꾸면서 관측된 불확도를 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4(a)는 계통적오차를 나타낸 것으로 입자의 직경이 커짐에 따라 오차가 증가하는 것을 볼 수 있다. 계통적오차는 항상 음수의 값을 가지고 있다. 이는 주어진 속도보다 계산된 속도가 낮게 나왔다는 것을 의미한다. Kean & Adrian⁽¹⁾은 상관영역 내에 속도구배가 있을 경우 빠른 속도의 입자는 느린 속도의 입자보다 상관영역을 벗어날 확률이 높아 입자 쌍의 매칭이 되지 못하므로 계산된 속도는 입자들의 평균속도에 비해 느린 속도로 편이(zero-velocity biasing)현상이 일어난다고 하였다. 본 시뮬레이션에서는 입자의 속도가 모두 동일하게 주어져 있으므로 속도구배에 의한 영향보다는 상호상관기법 그 자체가 원인이 된다. FFT 과정에서 유한한 크기를 가진 상관영역이 무한 공간에 주기적으로 반복되는 패턴으로 존재한다고 가정하기 때문에 상관영역을 벗어나 매칭 되지 못한 입자들이 상관영역 밖의 가장 가까운 입자들과 매칭 되려 하기 때문이다. Fig. 4(b)는 입자 직경에 따른 우연오차를 평가하였으며, 우연오차 역시 입자의 직경이 커짐에 따라 오차가 증가하는 것을 알 수 있다. 그 이유는 입자가 커짐에 따라 상관계수의 정점이 넓어지고 정점의 위치를 엄밀하게 구하는데 있어 오차가 많이 발생할 가능성이 커지기 때문이다. 입자의 직경

**Fig. 4.** Effect of the particle diameter at $N_p = 16$; (a) bias error, (b) random error.

이 1 pixel 일 때는 입자의 변위에 따라 크게 불확도가 증가하는데, 이는 미소조사구간 내 입자정보가 미약하고 상관계수의 정점이 너무 뾰족하여 보간과정에서 오차가 상대적으로 많이 발생하기 때문이다. 본 연구에서 테스트한 조건에서는 입자의 직경이 2 pixel 일 때 오차가 최소로 나타났으며, 이는 기존 연구 결과⁽⁸⁾와 거의 일치한다. 일반적으로 입자의 크기가 2~3 pixel의 경우 서브 픽셀 해상도의 입자의 정점을 구하는 기법으로 가우스 보간함수가 가장 좋은 성능을 보이고 입자의 직경이 증가할수록 상관관계의 정점이 넓어지며 이때는 도심(centroid)기법이 더 좋은 결과를 갖는다고 보고되어 있다.

Fig. 5에서는 입자 변위에 따른 계통적오차와 우연오차의 변화를 살펴보기 위하여 Fig. 4와 동일한 조건에서 좌표축을 입자의 변위로 설정하였다. 이 그림에서 입자 변위가 바뀌더라도 시간 간격이 다르므로 측정하고자 하는 속도는 동일하다. Fig. 5(a)에 나타

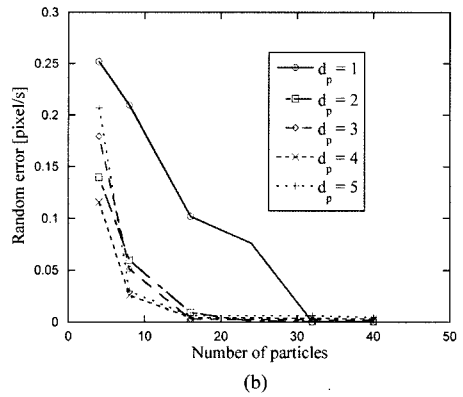
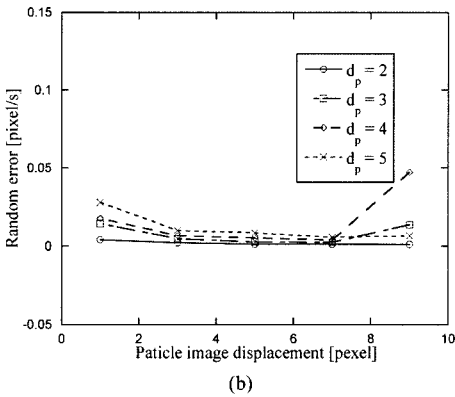
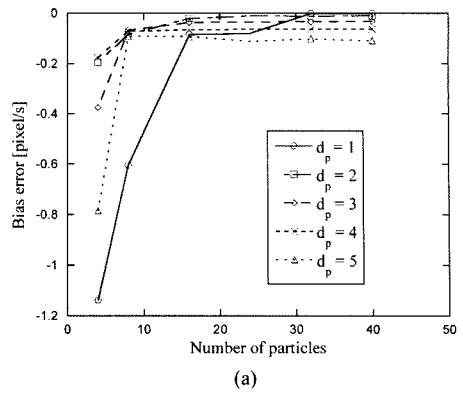
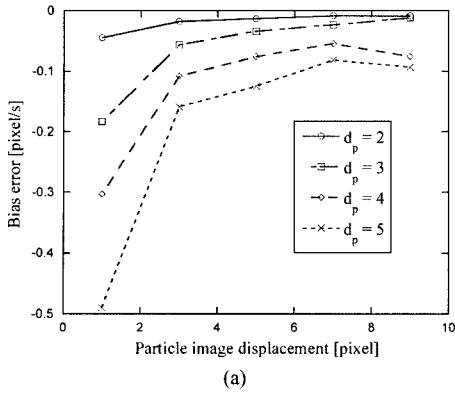


Fig. 5. Effect of the particle displacement at $N_p = 16$; (a) bias error, (b) random error.

Fig. 6. Effect of the number of particles and particle diameter at $\Delta x = 5$; (a) bias error, (b) random error.

난 계통적오차와 Fig. 5(b)에 표시한 우연오차는 모두 입자의 변위가 증가할수록 감소하는 것으로 나타났다. 그러나 입자의 변위는 무조건 크게 할 수 없으며, 미소조사구간의 크기의 1/4 이상에서는 에러벡터의 발생률이 높아 일반적으로 사용되지 않는다.

Fig. 6에서는 입자의 변위를 $\Delta x = 5$ pixel로 고정하고 입자 직경과 입자수를 변경하여 그 상관도를 분석하였다. Fig. 6(a)의 그림에서 알 수 있듯이 입자 직경이 작고, 입자수가 많아지면 계통적오차와 우연오차는 크게 감소하나 입자의 직경이 커지고 입자수가 충분하지 않으면 속도벡터의 추출 정확도가 현저하게 떨어짐을 확인할 수 있다. Fig. 6(b)는 동일한 상황에서의 우연오차의 분포를 보여주고 있다. 앞에서 살펴본 바와 같이 입자수가 충분한 경우는 입자 직경이 커질수록 오차가 약간 증가하나 입자수가 충분하지 않으면 입자수가 적음으로 해서 불확도가 급격히 증가한다. 입자수가 많으면 두 번째 영상에서 매칭되는 입

자 쌍이 상대적으로 많이 존재하므로 신호대잡음비가 커져 오차가 줄게 된다.

4.2 불확도 요소 평가

PIV 시스템이 유체 속도장을 측정하는 기법 중 하나로서 표준화 되기 위해서는 주어진 조건에서 그 시스템이 가지고 있는 불확도를 정량화하여 제시하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 영상획득 과정 및 유동장 특성에 따른 오차 요소를 배제하고 순수 알고리즘에서만 발생하는 오차를 평가하고자 한다. 따라서 표준영상(Standard Image)을 통한 상호상관 PIV 알고리즘이 가지고 있는 계통적오차 및 우연오차를 정량화하기 위해서 시스템의 평가조건을 $N_p = 16$ 개, $\Delta x = 5$ pixel, $d_p = 2$ pixel로 설정하였다. 이를 표준조건으로 하였을 때, 식 (6)과 식 (7)에서 계산된 상호상관 알고리즘에서 발생하는 속도측정 오차는 계통적오차가 -1.32×10^{-2} pixel/s였으며, 우연오차는 1.26×10^{-3}

pixel/s였다. 기준 속도 5 pixel/s에 대해서 95%의 신뢰도로 평가하면 상호상관 알고리즘에 의한 오차는 $-0.264 \pm 0.0504\%$ 로 나타났다.

실제 실험에서 획득된 영상에서는 입자 주입이 균일하지 못함으로 인해 상관영역 내 입자 수가 일정하지 않고 입자의 크기도 많은 편차를 가지고 있다. 또한 속도가 모든 영역에서 일정하지 않기 때문에 동일한 시간 간격에서 얻어진 입자의 변위도 다양하게 나타난다. 사용자가 한 장의 영상을 획득함에 있어 평균적으로 앞에서 제시된 표준조건 하에서 얻었다고 가정하자. 이 때, 입자수, 입자의 직경 및 변위가 표준조건에서 벗어남에 따라 발생하는 오차와 그 오차에 각 요소들이 얼마나 영향을 미치는 지 알아보고자 한다. 이를 위해 속도 측정값에 영향을 미치는 입력량(input variable)을 다음 식과 같이 입자수, 입자 직경, 변위로 설정하였다.

$$V = f(N_p, d_p, \Delta x) \quad (8)$$

각 입력량은 Table 1에서 주어진 바와 같이 입자수를 6가지, 입자 직경 및 변위를 각각 5가지로 변화시켰고, 속도값 V 는 각 경우에 대해 계산된 평균속도이다. 여기서 사용된 입력량들의 변화는 실제 실험영상에서 나타날 수 있는 범위라고 가정하였다. 각 입력량들의 표준불확도를 합성하여 속도값 결정의 합성표준불확도(combined standard uncertainty)와 유효자유도(effective degree of freedom)를 다음 식에 의해 산출한다.

$$u_c^2(V) = c_{N_p}^2 u^2(N_p) + c_{d_p}^2 u^2(d_p) + c_{\Delta x}^2 u^2(\Delta x) \quad (9)$$

$$v_{eff}(V) = \frac{u_c^4(V)}{\sum \frac{(c_{x_i} u(x_i))^4}{v_{x_i}}}$$

여기서, u_c 는 합성표준불확도이고, $u(x_i)$ 입력량 x_i 의 표준불확도이다. $v_{x_i} = n - 1$ 는 각 입력량의 자유도를 의미하며, 각 입력량의 변화수 n 으로부터 구한다. v_{eff} 는 유효자유도로서 Welch-Satterth-waite 식⁽⁹⁾을 사용하여 구한다. c_{x_i} 는 각 입력량에 대한 감도계수(sensitivity coefficient)로서 각 입력량의 변화에 따른 측정값의 변화를 나타낸다. 감도계수는 다음 식과 같이 입력량과 측정값 사이의 관계곡선을 미분하여 얻어진다.

$$c_{x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (10)$$

감도 계수를 구하기 위해 나머지 입력량이 표준조건으로 고정된 상태에서 한 개의 입력량을 변화시켜 계산된 속도와 입력량과의 관계 곡선을 취득하고, 그 곡선의 곡선보정식(curve-fit function)을 미분하여 구하였다.

Table 2는 각 입력량에 대하여 표준불확도, 감도계수 및 자유도를 정리하여 나타내었다. 이에 따라 계산된 합성표준불확도는 $u_c(V) = 2.38 \times 10^{-1}$ pixel/s이고, 각 입력량의 자유도로부터 얻은 유효자유도는 $v_{eff}(V) = 5$ 이다. 합성표준불확도의 계산에 있어 각 입력량의 표준불확도가 미치는 영향의 정도를 Table 2에 나타내었는데, 이 중 입자수가 미치는 영향이 93.5%로서 대부분을 차지했다. 다음으로 입자 직경과 입자 변위의 불확도가 영향을 미친 것으로 나타났다. 상호상관 PIV 알고리즘의 확장불확도(expanded uncertainty) U 는 합성표준불확도와 포함인자(coverage factor) k 로부터 다음 식으로 구할 수 있다.

$$U = k_{95} \times u_c(V) \quad (11)$$

포함인자는 student t-table의 95%신뢰구간에서 유효자유도로부터 구할 수 있으며 $k_{95} = 2.57$ 이다. 따라서 최종적인 확장불확도는 $U = 6.11 \times 10^{-1}$ pixel/s로서 주

Table 2. Uncertainty budget of Standard Image

Input Variable x_i	Source of Uncertainty	Type	Standard Uncertainty $u(x_i)$	Sensitive Coefficient $ c_{x_i} $	$ c_{x_i} u(x_i)$ (pixel/s)	Percent %	Degree Of Freedom
N_p	Number of Particles	A	32.44	7.32×10^{-3} (pixel/s)	2.38×10^{-1}	93.5	5
Δx	Displacement of Particles	A	2 (pixel)	4.03×10^{-3} (s^{-1})	8.06×10^{-3}	3.2	4
d_p	Diameter of Particles	A	0.5 (pixel)	1.67×10^{-2} (s^{-1})	8.37×10^{-3}	3.3	4

어진 속도에 대해서 12.2%에 해당된다. 이 값은 실제 실험을 통한 영상 획득에 있어 유동장의 속도가 위치에 따라 다르게 입자 주입이 불균일하기 때문에 영상 내에서도 입자수, 입자변위, 입자직경이 상관영역의 위치에 따라 다르게 나타난다는 것을 고려한 불확도를 의미한다. 본 연구에서는 Table 1에 주어진 바와 같이 실제 실험에서 획득된 영상 내에서 입자수는 4~40 개, 입자변위는 1~9 pixel, 입자직경은 1~5 pixel의 범위에서 변한다고 가정하였다.

5. 결 론

본 연구에서는 일반적으로 가장 많이 사용되는 상호상관 PIV 속도장 추출 알고리즘에 있어서의 오차를 해석하기 위하여 Monte Carlo 모사법에 근거한 표준영상을 제작하였으며, 입자수, 입자의 직경, 변위에 따른 계통적오차와 우연오차를 분석하였다. 오차를 평가함에 있어 입자 변위와 관계없이 속도값이 일정하도록 시간 간격을 조절하였으며 다음과 같은 결과를 얻었다.

미소조사구간 내 입자의 수가 많을수록, 오류벡터가 나타나지 않는 범위에서 입자 변위가 클수록 두 오차는 모두 감소한다. 입자의 직경은 대략 2 pixel 크기에서 최소 오차를 보였다. 표준조건을 설정하여 평가한 알고리즘만의 오차는 약 0.26%이다. 실제 실험 영상에서 나타날 수 있는 세 가지 변수에 변화에 의한 불확도의 요소평가를 실시한 결과 속도장 계산 시 전체 불확도에 지배적인 영향을 미치는 요소는 미소조사구간 내 입자수의 변화로 평가되었으며, 95%의 신뢰도에 의한 확장불확도는 주어진 속도의 약 12.2

%로 나타났다.

참고문헌

- 1) Keane, R. D. and Adrian, R. J., 1992, "Theory of Cross-Correlation Analysis of PIV Images," *Applied Sci. Res.*, Vol. 49, pp. 191-21.
- 2) Hart, D. P., 1999, "Super-Resolution PIV by Recursive Local-Correlation," *J. Visualization*, Vol. 10, pp. 1-10.
- 3) Scarano, F. and Riethmuller, M. L., 1999, "Iterative Multigrid Approach in PIV Image Processing with Discrete Window Offset," *Exp. Fluids*, Vol. 26, pp. 513-52.
- 4) Hu, H., Saga, T., Kobayashi, T., Taniguchi, N. and Segawa, S., 2000, "Improve the Spatial Resolution of PIV Results by Using Hierarchical Recursive Operation," *Proc. 9th Int. Symp. Flow Visualization, Edinburgh, U. K.*, 9ISFV137, pp. 1-12.
- 5) Hart, D. P., 2000, "PIV Error Correction," *Exp. Fluids*, Vol. 29, pp. 13-2.
- 6) Willert, C. E. and Gharib, M., 1991, "Digital Particle Image Velocimetry," *Exp. Fluids*, Vol. 10, pp. 181-193.
- 7) Okamoto, K., Nishio, S., Saga, T. and Kabayashi, T., 2000, "Standard Images for Particle-Image Velocimetry," *Meas. Sci. Technol.*, Vol. 11, pp. 685-691.
- 8) Raffel, M., Willert, C. and Kompenhans, J., 1998, *Particle Image Velocimetry*, Springer-Verlag, New York.
- 9) ISO/IEC, 1993, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (First edition)*.