

스프레드시트 환경에서 모델링 활동을 통한 수학적 발견과 정당화

손 흥 찬* · 류 희 찬**

스프레드시트는 표, 그래프 기능 그리고 셀 참조 기능을 가지고 있고, 이러한 기능은 모델링 활동에서 중요한 역할을 한다. 이 글에서는 스프레드시트를 활용한 수학적 모델링 활동에서의 수학적 규칙의 발견과 이의 정당화 과정을 알아보고자 한다. 이를 위해 스프레드시트 환경이 특정 문제 상황의 해결에 어떻게 도움을 주는 지 알아보고, 어떻게 특정한 문제 상황을 일반적인 문제 상황으로 바꿀 수 있도록 하는지를 알아본다. 또한 문제 상황 속에 내재하는 수학적 규칙의 발견에 이르는 과정을 알아보고, 발견한 규칙의 정당화 유형과 스프레드시트가 정당화에 어떤 영향을 미치는지를 알아본다.

1. 서 론

수학적 모델링은 일반적으로 현실 세계 문제 상황에서 수학적 모델을 도출하여 문제의 답을 얻어내는 과정으로 현실세계 문제를 이해하고 해석하는데 중요한 역할을 한다.

1960년대의 새수학 운동이 지향한 형식주의에 대한 반성으로부터 1970년대에는 전 세계적으로 수학의 응용과 현실 세계와의 연결성을 강조하는 운동이 일어났고, 고등학교와 대학의 수준에서의 수학교육에서 수학과 현실 세계 사이의 역동적인 상호작용을 중요시하게 되면서 수학적 모델링이 중등 수학교육에 영향을 미치기 시작하였다(Blum, 1989). Freudenthal(1973)은 어린이를 위한 수학교육이 일상적인 현실의 수학화로부터 시작되어야 하고 수학자들이 수세기에 걸쳐 발명한 수학을 학생들이 단

축된 형태로 재발명하는 과정을 경험할 수 있는 기회를 제공할 수 있어야 하며 이를 위해 교수학적 활동들을 개발할 필요가 있다고 보았다. 미국의 NCTM(2000)도 모든 수준의 학생은 그들 수준에 맞게 다양한 현상을 모델링할 수 있는 기회를 가져야만 한다고 보고 있다.

그러나 학생이 모델링 활동을 할 때는 다음과 같은 몇 가지 점에서 인지적 부담을 느낄 수 있다. 모델링 활동은 일반적으로 현실 상황에서 출발하는 것이 많으므로 수학 이외의 타 교과와 연계되어 있고 그 지식을 필요로 하는 경우가 많다. 실제 문제 상황은 일반적으로 교과서에 단순화되어 제시되어 있는 문제 상황보다 복잡한 경우가 많고 따라서 많은 복잡한 계산이 수반된다. 또한 모델링 활동을 통한 학습에서는 실생활의 문제 상황을 이해하고 해석하고 예측하는 것을 중요하게 여기므로 문제 상황 속에 내재한 패턴이나 규칙성을 찾을 필요

* 한국교원대 대학원(hongcson@naver.com)

** 한국교원대(hclew@knu.ac.kr)

가 있고, 이를 위해 모델을 구체적인 것에서 출발하여 추상적인 것으로, 특별한 것에서 일반적인 것으로 구성할 필요가 있다. 이와 같은 부담은 모델링 활동에 공학을 도입함으로써 상당 부분 극복될 수 있다. 모델링 활동에서 공학을 도입하여 활용하면 다음과 같은 몇 가지 측면에서 중요한 이점을 기대할 수 있다. 첫째로는 복잡한 계산을 수행하는데 시간을 덜고 본질적인 개념을 탐구하는데 초점을 맞출 수 있고, 둘째로는 모델링 활동에 필요한 그래프, 수식, 표 등과 같은 다양한 수학적 모델을 비교적 수월하게 만들 수가 있고, 셋째로는 특정한 상황을 일반적인 상황으로 확장하기가 용이하며, 넷째로는 수학적 표상 사이를 연결하고 이들을 역동적으로 변화시켜 가며 사고실험을 할 수 있다는 점이다.

이 글에서는 수학적 모델링 활동을 하는데 유용한 공학의 한 가지로 평가되는 스프레드시트를 활용한 실험을 통하여 수학적 모델링 활동에서의 수학적 규칙의 발견과 이것의 정당화가 어떻게 일어나는지에 대하여 알아보려고 한다.

II. 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용

스프레드시트는 본래 자료 정리나 회계 일을 돕기 위해 고안된 것이었지만 점차 다양한 기능을 갖게 되면서 1980년대 초반부터는 그것이야말로 교수학적 잠재력이 많은 사람에게 알려지기 시작하였고 교수 학습과 관련한 여러 논문에서 그 응용가능성이 폭넓게 논의되어왔다 (Baker & Sugden, 2003). 오늘날의 스프레드시트는 자동계산 기능, 차트 기능, 데이터 관리 기능, 매크로 기능 등을 제공하고 기본적인 사칙 연산 및 다양한 함수 계산과 함께 논리 합

수와 반복되는 계산식의 복사의 기능 등을 제공한다. 이러한 기능들은 다양한 수학적 표현을 가능하게 하고 이들 사이를 연결하고 역동적으로 고찰할 수 있도록 함으로 수학적 모델링 활동에서 중요하게 사용될 수 있다.

스프레드시트를 수학 교수·학습의 목적으로 사용할 수 있는 중요한 이유 중의 한 가지는 쉽게 사용할 수 있다는 점이다. 어떤 작업을 컴퓨터로 수행하고자 할 때 컴퓨터 언어를 배워 프로그래밍을 할 수 있기까지는 시간이 많이 소요되므로 제한된 시간 안에 적절한 결과를 얻는 것이 어렵지만, 스프레드시트에 사용하는 식은 프로그래밍 언어보다 더 시각적이며 쉽게 사용할 수 있고 즉시적으로 수치해석적 시뮬레이션이 가능하다(Steward, 1994; Morishita, Iwata, Yoshida & Yoshida, 2001). 사용의 용이성 외에 Masalski(1990)는 스프레드시트를 활용함으로써 얻게 되는 이점을 다음과 같이 제시하였다. 첫째, 스프레드시트는 반복적, 재귀적인 계산을 요하는 문제나 표가 필요한 문제를 다룰 때에 적합하고, 교사나 학생이 변수의 값, 상수 그리고 구간의 크기 등을 다룰 수 있도록 하며, 문제 해결 과정에서 부딪히는 “만일 ~이라면 (what if)” 유형의 질문을 탐구하도록 도와준다. 둘째, 스프레드시트는 수학적 문제 해결을 위해 알고리즘과 모델을 개발하고 사용하는데 있어서 사용자의 직관을 향상시킨다. 셋째, 스프레드시트는 화면상에 학생이 생성한 계산결과의 과정을 보여줌으로써 변수의 변화가 전체적 계산 결과의 패턴에 어떤 변화를 가져오는지 알 수 있도록 한다. Bialas(2001)도 스프레드시트가 다량의 계산을 빨리 처리하고 그래프와 표로 결과를 보여줄 수 있어 학생이 부분적인 그림보다는 전체적인 그림에 초점을 맞출 수 있도록 해준다고 보았다.

스프레드시트가 가지는 또 다른 특징은 학생

이 문제 상황을 스프레드시트 모델로 만들어 스스로 조작해볼 수 있는 환경을 제공하며, 학생 상호간 또는 학생과 교사 사이의 상호작용을 촉진하는 매개체의 역할을 한다는 점이다. 이에 대한 근래의 몇 가지 연구 결과는 다음과 같다.

첫째, 많은 멀티미디어 교육매체가 교수중심 이어서 학생이 수동적 역할을 하는 것에 반해 스프레드시트는 학생 중심 또는 발견 중심의 학습 유형을 촉진하고 구성주의적 학습 환경을 구성한다(Beare, 1993; Beare & Hewitson, 1996; Baker & Sugden, 2003). 둘째, 스프레드시트를 사용하는 동안 학생 상호간, 교사와 학생, 컴퓨터와 학생의 상호작용이 활발해지고, 문제해결 도구로서 학생에게 산술이나 초기 대수의 영역의 강력한 사고와 전략을 제시한다(Hershkowitz, Dreyfus, Ben-Zvi, Friedlander, Hadas, Resnick & Tabach, 2002). 셋째, 스프레드시트 환경에서 학생은 좀 더 상호작용적이고 시각적인 스프레드시트 모델을 만들 수 있고, 이것을 조작할 수 있어서 현상의 다양한 측면을 탐구할 수 있다(Molyneux-Hodgson, Rojano, Sutherland & Ursini, 1999; Bialas, 2001; Neuwirth & Arganbright, 2004).

스프레드시트가 가지는 위와 같은 특징은 학생이 소집단으로 모델링 활동을 할 때 중요한 요소로 작용한다. 특히 스프레드시트가 가지는 행 삽입 기능과 셀 참조 기능은 문제 상황 속에 내재된 규칙을 찾는 데 유용하게 사용될 수 있다. 스프레드시트에서는 수많은 셀마다 수식 입력 기능이 있고 행과 행 사이에 다른 행들을 삽입하여 새로 생긴 행에 기존의 행에 있는 식을 쉽게 자동복사 할 수 있는 기능이 있다. 또한 특정한 셀이 다른 셀을 참조하는 기능이 있다. 참조되는 셀에 입력된 값을 변화시키면 참조한 셀의 값이 변하게 되고, 참조한 셀을 자

동 복사하여 만든 표나 그래프가 동시에 변하게 된다. 이 때 스크롤바를 이용하면 참조된 셀의 값을 쉽게 변화시킬 수 있다. 스프레드시트의 이러한 기능은 문제 상황에서의 변화를 스프레드시트에서의 수식과 표 그리고 그래프로 반영하여 여러 현상의 특징을 역동적으로 파악하고 문제를 해결할 수 있도록 도우며, 나아가 문제 현상을 보다 일반적인 상황으로 바꾸어 문제 현상을 지배하는 법칙을 발견하게 만들 수도 있다.

지금까지 스프레드시트의 활용에 관한 연구는 통계, 대수, 함수 지도 등 특정 수학 주제에 대하여 스프레드시트가 어떻게 활용될 수 있는지에 초점이 맞춰져 왔다고 볼 수 있다(Baker & Sugden, 2003). 모델링 활동과 관련하여서는 초기 대수에서 스프레드시트의 사용이 산술에서 대수로의 이행에 다리를 놓을 수 있거나 비형식적 개념을 형식화하는데 도움을 준다는 결과들이 있고(Friedlander, 1998, 1999; Sutherland & Rojano, 1993; Wilson, 2004), 전문 학자들에 의해 저술된 스프레드시트를 활용한 모델링에 대한 단행본들이 있다(Neuwirth & Arganbright, 2004; Stephen & Kenneth, 2004). 그러나 학생이 실제 스프레드시트를 이용하여 모델링 활동을 수행한 것을 분석한 것은 적은 형편이며, 위에서 열거한 스프레드시트의 특징이 학생이 실제 모델링 활동을 수행할 때 어떻게 작용하는지를 살펴볼 필요가 있다.

III. 연구 방법

1. 연구 방법 및 대상

이 연구에서는 스프레드시트를 활용한 수학적 모델링 활동을 통하여 학생이 어떻게 주어진

문제 상황을 해결하고 나아가 수학적 발견과 이를 정당화하는지 그 과정을 분석하고자 하므로 정성연구의 사례연구 방법을 사용하였다.

이 연구에 참여한 학생은 고등학교 1학년 6명으로 모두 여학생이며 3명씩 2개조로 나누어 실험수업을 진행하였다. 스프레드시트 사용경험자는 1명이었다. 학업성취도는 상중하를 기준으로 상 2명, 중상 2명, 중 2명으로 구성되었다. 각 조는 출신 반과 학업성취도에 따라 이질집단으로 구성하였다. 학생에게 스프레드시트 사용 경험은 요구하지 않았으나 문제 상황으로부터 간단한 대수적 모델을 얻어 이를 스프레드시트 모델로 변환할 수 있어야 했으므로 몇 가지 기본적인 지식을 요구하였다. 이러한 지식은 고등학교 1학년 학생이면 대개 갖출 수 있는 지식으로 일차방정식을 세울 수 있거나 기본적인 도형의 넓이나 부피 등을 식으로 세우는 것이었다. 실험수업 이전에 간단한 퀴즈를 통하여 학생들이 최소한의 요건에 부합함을 확인하였다. 또한 스프레드시트를 사용하지 않고 문제 상황을 풀 수 있는 강력한 방법인 미적분학은 배우지 않았음을 확인하였다.

교사는 중등 9년차 남자 교사로, 컴퓨터교육을 따로 받은 적은 없지만 책을 보고 스스로 공부하여 기본적인 프로그램들을 사용할 수 있는 정도의 지식을 가지고 있었다. 스프레드시트 프로그램은 주로 성적 처리나 담임 업무 등의 행정 처리용으로 사용해왔으며 수학 수업에서 사용해본 경험은 가지고 있지 않았다.

2. 실험 수업

실험에서 교사는 컴퓨터와 대형 프로젝트 TV를 사용하였고, 학생은 3명으로 된 1개조마다 하나의 컴퓨터를 사용하였다. 실험에 주어진 활동지는 문제 상황을 해결하는 부분과 반

성 및 고찰을 하는 부분으로 나뉘어져 있고 반성 및 고찰의 부분은 전체의 문제 해결 과정을 정리하고 스프레드시트를 사용했을 때 특히 어려운 점이나 느낌 등을 적도록 하여 다음 활동에 참조할 수 있도록 하였다. 실험 수업은 먼저 지필에서 문제 해결을 시도할 수 있도록 하였고 이를 해결하거나 해결하지 못했을 때 스프레드시트 모델을 만들어서 문제 상황을 해결할 수 있도록 구성하였다.

엑셀을 활용한 소그룹 모델링 활동을 본격적으로 시작하기에 앞서 학생들이 기본적인 엑셀의 기능을 익히는 시간을 90분 정도 가졌으며 약 2시간의 예비활동을 하였다. 이 때 학생들은 엑셀의 계산 기능, 표 그리기, 그래프 그리기, 스크롤바 연결하기 등의 기본적인 기능을 익히고 이 기능이 유용하게 쓰일 수 있는 예비활동 문제 상황을 다루어 보았다. 실험수업은 약 2시간에 걸쳐 진행되었고 실험에 사용된 스프레드시트는 Microsoft Excel 2003이었다.

3. 자료 수집과 분석

자료는 면담 자료, 관찰 자료, 오디오 및 비디오 자료, 필드 노트, 그리고 컴퓨터상에서 모델링 활동한 과정을 동영상으로 저장한 파일을 통하여 수집하였다.

면담 자료는 실험 전후로 반 구조화된 면담을 통해서 수집하였다.

관찰 자료는 비디오와 오디오를 이용하여 학생들의 모델링 활동을 녹화·녹음하고 컴퓨터 스크린에 보이는 스프레드시트 조작 활동을 동영상 캡처 프로그램을 이용하여 녹화하였다. 연구자는 실험 기간 중에 필드 노트를 작성하여 모델링 활동 중에 관찰한 학생들의 행동, 언어 등에 대해 기록하고 학생이나 교사와의 대화 그리고 연구자의 느낌 등을 기록하였다.

문서자료는 모델링 활동에서 사용된 활동지와 실험 전후에 교사와 학생에게 실시한 설문 자료로 구성되었다. 실험 전에 학생에게는 수학에 대한 견해, 공부하는 방법과 컴퓨터 사용에 관한 것을 알아보았고 실험 후에는 모델링 활동을 통하여 얻게 된 소감과 스프레드시트의 사용 경험에서 느낀 점, 그리고 학생의 수학에 관한 흥미나 태도의 변화가 있었는지를 알아보았다.

자료의 분석은 조별로 녹화된 동영상 캡처 파일과 녹음된 오디오 파일을 비교하면서 전사하여 분석하는데 참고하였다. 분석은 전사, 동영상 화면, 활동지 그리고 설문 자료 등을 토대로 삼각 검증법을 사용하였다.

주어진 특정 문제 상황을 해결하는 것은 규칙의 발견과 정당화로 가기 위한 기본 단계가 되므로 서론에서 제기한 연구 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 두 가지 사항에 초점을 두어 분석하였다.

첫째, 스프레드시트는 주어진 문제 상황에 해결에 어떻게 도움을 주는가?

둘째, 스프레드시트 환경에서 학생은 어떻게 문제 상황의 일반화, 수학적 규칙 발견 그리고 정당화에 이르게 되는가?

첫째 사항을 분석하기 위해서는 먼저 문제 상황으로부터의 변인을 파악하는지, 기하적 모델 또는 대수적 모델을 구성할 수 있는지, 지필 환경에서 문제를 해결할 수 있는지 그리고 스프레드시트 모델을 구성하여 문제를 해결할 수 있는지를 조사하였다. 둘째 사항에 대해 분석하기 위해서는 스프레드시트 환경에서 특정 문제 상황을 어떻게 일반적인 상황으로 변환하는지, 스프레드시트 환경에서 어떻게 다양한 예를 생성하고 규칙을 발견하게 되는지 그리고 스프레드시트 환경에서 발견한 규칙을 어떻게 정당화하는지를 조사하였다.

4. 문제 상황

주어진 문제 상황은 다음과 같다:

1(올타리 문제). 강이 흐르는 초원에 강을 한 번으로 하여 직사각형 모양으로 240m되는 올타리를 만들고자 한다.

- (1) 최대의 넓이가 되려면 가로와 세로의 길이를 어떻게 해야 하는가?
- (2) 올타리의 길이를 변화시키면서 변하지 않는 규칙을 발견해보세요.

2(오픈 박스 문제). 소현 엄마는 아들의 블록 놀이 장난감 등을 담은 용기를 만들고자 가로 세로 길이가 각각 60cm 되는 플라스틱 골판지를 가지고 뚜껑 없는 박스를 만들고자 하였다.

- (1) 어떻게 하면 최대의 부피를 가지도록 만들 수 있는가?
- (2) 골판지 한 번의 길이를 변화시키면서 변하지 않는 규칙을 발견해보세요.

학생은 위 각 문제 상황의 먼저 (1)을 지필 환경에서 풀어볼 수 있다. 그러나 (2)는 학생 면담에서 확인한 바로는 지필환경에서는 해결하기 어려운 문제이다. (1)을 풀 수 없더라도 문제를 해결하기 위한 대수적 모델을 세울 수는 있으며 이것은 스프레드시트 환경에서 스프레드시트 모델로 바꾸어 수치적으로 문제를 해결하는 기본 바탕이 된다.

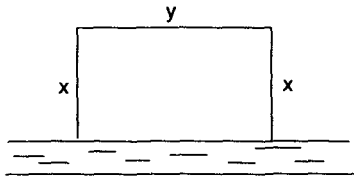
IV. 결과 및 분석

1. 스프레드시트는 주어진 문제 상황 해결에 어떻게 도움을 주는가?

먼저 올타리와 오픈 박스 문제 상황 1, 2의

각 (1)번 문항에 대한 학생들의 활동 사례를 분석하기로 한다. 학생은 주어진 문제 상황을 지필 환경에서 해결할 수 있었을 때 스프레드시트를 활용하여 해를 확인해볼 수 있었고 지필에서 해를 구할 수 없었을 때 스프레드시트를 활용하여 해를 구할 수 있음을 볼 수 있었다.

학생들은 문제 1의 모델링 활동에서 먼저 문제 상황에 맞는 그림을 그리고 그림에 나타나는 직사각형 모양에 문자를 부여하고 식을 세웠다. 학생들은 기하학적 모델을 만든 다음 대수적 식을 세워 해결하고자 하였다. 네 명의 학생은 각자 문제를 해결하였으며 두 학생은 상호작용을 통해서 해결 할 수 있었다. 학생들은 연립방정식을 이용하여 완전제곱식으로 고쳐서 해를 구하거나 산술평균과 기하평균 사이의 관계를 이용하는 등의 방법을 사용하여 (1)의 해를 구할 수 있었다.



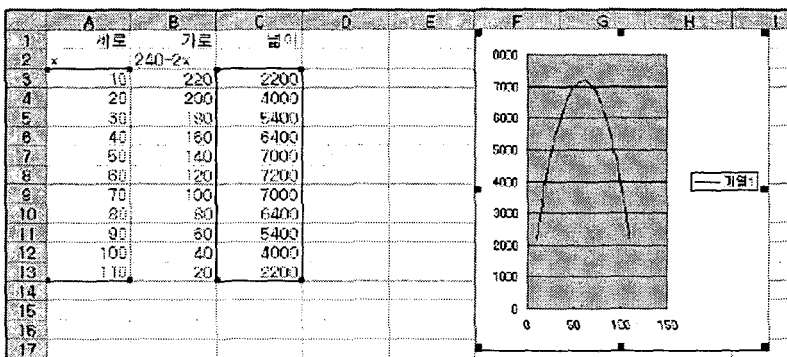
[그림 IV-1] 문제 상황의 기하적 모델

먼저 연립방정식을 이용한 방법은 세로의 길이를 x , 가로 길이를 y 라고 놓고 xy 의 최대값

을 구한 것으로, $2x + y = 240$ 으로부터 $y = 240 - 2x$ 를 얻고 이를 xy 에 대입하여 $xy = x(240 - 2x)$ 를 얻은 다음 완전제곱식으로 고쳐 최대값을 구하였다. 다른 한 가지 방법은 산술평균과 기하평균 사이의 관계를 이용한 것으로, $2x + y \geq 2\sqrt{2xy}$ 에서 $120 \geq \sqrt{2xy}$ 을 얻고, $2\sqrt{2xy}$ 가 최대일 때, 즉 xy 가 최대일 때는 $2x = y$ 일 때이므로 $2x + y = 240$ 에 대입하여, $y = 120$, $x = 60$ 으로 답을 내었다. 그리고 다른 방법으로는 $120 \geq \sqrt{2xy}$ 에서 $120 = \sqrt{2xy}$ 일 때 xy 가 최대임을 이용하여 즉 $2x + y = 240$ 로부터 $y = 240 - 2x$ 를 얻고 $xy = 7200$ 에 대입하여 이차방정식 $x(240 - 2x) = 7200$ 을 풀어 $y = 120$, $x = 60$ 을 얻었다.

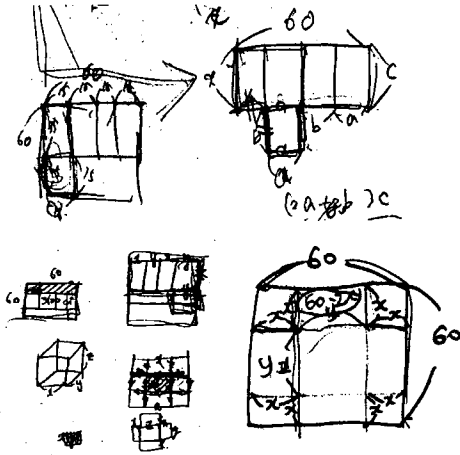
교사와의 면담을 통해서 학생들이 이 문제를 해결할 수 있었던 것은 정규 수업시간에 산술평균과 기하평균의 내용을 다루고 있기 때문이라는 것을 알게 되었다. 교사는 학생들에게 스프레드시트 환경에서 이 풀이를 확인해보도록 하였다. 학생은 아래 [그림 IV-2]에서와 같이 표와 그래프를 그려 지필로 문 해를 확인할 수 있었다. [그림 IV-2]의 셀 A8과 B8에 해가 나타나 있는 것을 볼 수 있다.

학생들은 문제 2의 오픈 박스 문제 상황에 대한 모델링 활동을 시작했을 때 먼저 대수적 식을 도출하기 위한 방편으로 박스의 전개도를



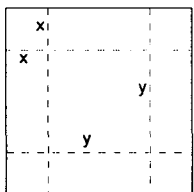
[그림 IV-2] 스프레드시트를 사용하여 해를 확인

구하고자 하였다. 아래의 [그림 IV-3]은 학생이 생각한 오픈 박스의 다양한 전개도를 보여준다. 학생들은 상호 토론을 통하여 가장 우측에 보이는 전개도를 선택하여 언제 최대의 부피를 가질 수 있는지를 탐구하였다.



[그림 IV-3] 학생이 구상한 다양한 기하적 모델

모든 학생은 도형의 모델로부터 오픈 박스의 부피를 구할 수 있는 대수적 모델을 도출할 수 있었다. 현지와 희정은 세 항에 대한 산술평균과 기하평균을 이용하여 앞에서처럼 부피의 최대값을 구하고자 하였으나 구할 수 없었다. 은주와 원진은 부피를 구하는 식 " $(60-2x)^2x$ "를 구하여 최대값을 구하고자 하였으나 앞서 풀었던 이차식에서의 최대값과 달리 부피가 삼차식으로 나타나므로 학생들은 최대값을 구할 수 없었다. 학생이 지필환경에서 더 이상 진전이 없자 교사는 스프레드시트를 활용하여 풀어볼 것을 권유하였다.



[그림 IV-4] 학생이 선택한 오픈박스의 전개도

발췌문 1. 지필로 풀 수 없었던 문제의 해결

- (1.1) 현지: 아 맞다. 높이가 x 다(현지는 높이를 독립변수로 파악하고 높이를 1에서 60까지 나열한 다음 가로와 세로를 계산함).
- (1.2)
- (1.3) 교사: 다했어? 벌써 끝났어? 언제 최대야?
- (1.4) 현지: 40, 40, 10요.
- (1.5) 교사: 40, 40, 10일 때? 그래프도 한번 그려보죠.

	A	B	C	D
1				
2	가로	세로	높이	부피
3	$60-2x$	$60-2x$	x	
4	58	58	1	3364
5	56	56	2	6272
6	54	54	3	8748
7	52	52	4	10816
8	50	50	5	12500
9	48	48	6	13824
10	46	46	7	14812
11	44	44	8	15488
12	42	42	9	15876
13	40	40	10	16000
14	38	38	11	15984
15	36	36	12	15852
16	34	34	13	15628

[표 IV-1] 스프레드시트로 해를 찾음

학생은 스프레드시트 환경에서 높이를 x 로 놓고, 가로, 세로의 길이를 모두 $y=60-2x$ 로 입력하여 (1.4)에서 볼 수 있는 것처럼 높이가 10이고 가로와 세로가 40일 때 박스의 부피가 최대인 것을 알아낼 수 있었다.

문제 2의 (1)을 해결한 후 활동지에서 지필로 해결하기 어려웠던 단계와 Excel이 어려운 단계를 해결하는데 중요한 역할을 하였는지에 대해 묻는 난에서 현지와 은주는 다음과 같이 답하였다.

현지: 거의 다 어려웠다. 결국에 답도 틀렸다. Excel로 거의 다 풀었다. Excel이 귀찮은 듯 보이지만 의외로 간단하고 그래프까지 그릴 수 있었다.

은주: 식 " $x(60-2x)^2$ "까지는 나왔는데 그 뒤론 해결이 안 되었다. Excel에서 답이 쉽게

나왔다.

위에서 살펴본 것에 따르면 학생들은 스스로 지필 환경에서 해결한 문제를 스프레드시트를 사용하여 확인할 수 있었고, 지필 환경에서 부분적으로 대수식을 세울 수 있었으나 실제로 해를 구하지 못했을 때 스프레드시트를 사용하여 해를 구할 수 있었다. 여기에서 중요한 사실은 스프레드시트에서 구하고자 하는 해를 구할 수는 없었지만 해를 구하는데 필요한 수식을 부분적으로 구할 수 있었고 그 수식을 이해하고 있다는 것이다. 따라서 스프레드시트가 나타내는 결과를 이해하는 것은 어려운 일이 아님을 알 수 있다. 이와 같이 스프레드시트는 지필 환경에서 해결한 결과를 확인하거나 해결하기 곤란한 문제를 해결하는 역할을 할 수 있음을 볼 수 있다.

지금부터는 스프레드시트 환경이 문제 상황의 일반화와 수학적 규칙을 발견하는데 어떤 기여를 할 수 있는지를 살펴본다. 이를 위해 두 번째 질문으로부터 시작한다.

2. 스프레드시트 환경에서 학생은 어떻게 문제 상황의 일반화, 수학적 규칙 발견 그리고 정당화에 이르게 되는가?

[문제 상황] 1과 2의 각 (2)는 주어진 상황 속에 내재한 규칙을 발견하는 문제이다. 문제 상황에서 학생이 어떤 과정을 통해 스프레드시트를 사용하여 규칙을 발견할 수 있는지를 살펴본다. 먼저 울타리 문제의 (2)를 분석한다.

발췌문 2. 스프레드시트를 이용한 다양한 예의 생성과 규칙의 발견(1)

(2.1) 교사: 다했어? 그러면. 이제, 만약에 울타리가 길이가 240이 아니고 다른 숫자면 어떻게 돼?

(2.2) ……………

(2.3) 현지: 이거를 바꾸자. 240을 바꾸자(처음에 만든 표 밑에 새로운 표를 만들다가 다시 처음 만든 표로 돌아가 스크롤바를 만들려고 하면서).

(2.4) ……………

(2.5) 현지: 그거 지정하는 거 있지 않아? 범위 바꾸자. 240이상으로(스크롤바의 컨트롤 서식에서 최소값을 240으로 놓으면서). 240부터 해야지.

(2.6) 교사: 언제 최대가 되나? 넓이가?

(2.7) (이 때 현지는 스크롤바를 움직이고 있다. 스크롤바가 260에 멈췄다).

(2.8) 교사: 최대가 어디야? 지금? 그 두개가 최대값? 과연? (현지가 x가 60과 70일 때 넓이가 최대로 8400이 나오는 것을 가리키자)

(2.9) 현지: 아 가운데에 또 뭐 있나? 10단위 말고.

(2.10) 은주: 1단위.

(2.11) 교사: 귀찮아? 한 번 마우스만 끌면 금방 그렇게 되는데(젊은 표정을 하는 은주를 보며).

(2.12) 은주: 어떻게요?

(2.13) 현지: 쪽이요? 계속하면 되잖아.(세로의 길이를 1단위로 입력함)

(2.14) 현지: 여기. 여기.(8450을 가리키며)

(2.15) 현지: 아 두 배!

(2.16) 교사: 뭐가 최대야? 최대값 구했어?

(2.17) 현지: 네.

(2.18) 교사: 8450. 얼마일 때야? 가로 세로가?

(2.19) 현지: 1 대 2일 때.

울타리 문제의 (2)에서 교사는 학생이 스프레드시트 환경에서 주어진 문제 상황에 맞는 해를 구하자 문제 상황 속의 울타리의 길이가 변화할 때 어떻게 되는지를 묻는 질문으로부터 규칙을 구하는 첫 단계로 삼고 있다(2.1). 현지와 은주는 처음에 만든 표 아래에 동일한 변수들, 즉 세로, 가로 그리고 넓이 등을 입력하여 새로운 표를 만들려다 스크롤바를 만들 수 있음을 상기하고 스크롤바를 만들기로 하였다.

스크롤바의 기능은 적당한 셀을 연결하여 그 셀의 값을 연속적으로 변화시킬 수 있기 때문에 울타리의 길이가 변할 때마다 표를 새로 그리는 것이 아니라 기존의 표를 사용하면서 울타리의 길이가 변화될 때의 세로, 가로 그리고 넓이를 계산할 수 있는 환경을 제공한다. 이것은 다양한 울타리의 길이에 대한 예를 생성하는 것이 되며, 울타리의 길이가 주어진 특정한 상황을 울타리의 길이가 변하는 일반적인 상황으로 바꾸는 것이 된다.

(2.7)에서 볼 수 있는 것처럼 울타리의 길이를 나타내는 스크롤바의 값이 260에 멈추자 두 번째 값에 대한 가로와 세로를 조사하기 시작하였다. (2.8)은 학생들이 표를 바라보며 넓이가 8400일 때 최대가 되는 것으로 생각하자 교사가 다른 값을 구해보도록 독려하는 모습을 보여준다(그림 IV-5) 참조).

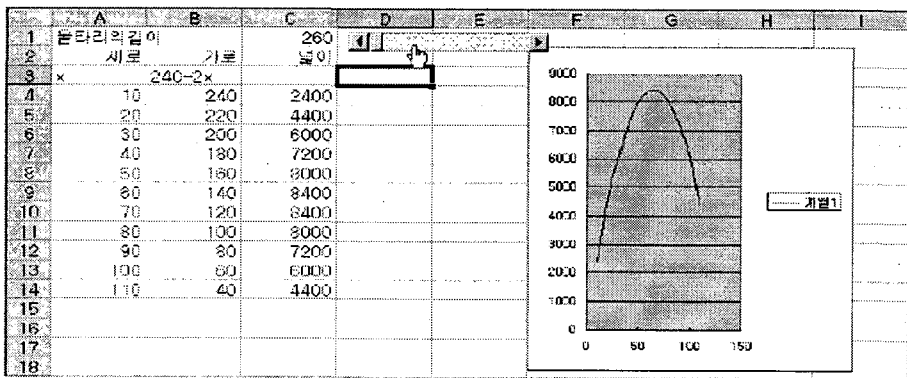
(2.9)에서 (2.10)은 학생들이 세로의 단위를 1 단위로 낮추어 다시 계산한 것을 보여준다. 학생들은 60과 70 사이에 열 개의 행을 삽입하여 자동복사 기능을 이용하여 계산하였다. (2.14)에서 학생들은 넓이가 8450일 때 최대가 되고 이때 세로의 길이는 65라는 것을 알게 되었다(표 IV-2) 참조. 즉 직사각형의 넓이는 두 개의 세로값에서가 아니라 한 개의 값에서 최대가 됨

을 알게 된 것이다. 그리고 (2.15)와 (2.19)로부터 현지가 최대의 넓이를 가지는 세로와 가로의 비가 1:2 임을 알게 된 것을 볼 수 있다.

[그림 IV-5]에서 셀 B3의 '가로'에 보이는 식 '240-2x'은 맨 처음 식을 세울 때 입력했던 것으로 '260-2x'이어야 맞다. 그러나 셀 B3에는 '수식'이 아닌 문자로 입력되어 있어 스크롤바를 움직여 셀 C1의 골판지의 길이를 변화시켜도 그대로 남아있는 모습이다. 이러한 현상은 학생들이 스크롤바를 만들어 변화시킬 때 고치지 않아서 일어나는 흔한 오류이다. 그러나 학생들은 이미 B4셀에 '= \$C\$1-2*A4'로 입력하여 다른 수치들을 얻을 수 있었으며 이에 대해 혼란을 일으키지는 않았다. 시간이 흐르면서 제목으로서 문자식을 입력할 때도 주의를 기울이게 되었으며 다른 조는 '240-2x' 대신 '울타리의 길이-2x'와 같이 적는 경우도 있었다.

63	60	140	8400
64	61	138	8418
65	62	136	8432
66	63	134	8442
67	64	132	8448
68	65	130	8450
69	66	128	8448
70	67	126	8442
71	68	124	8432
72	69	122	8418
73	70	120	8400

표 IV-2 행을 삽입하여 최대값이 한 개임을 확인



[그림 IV-5] 스프레드시트 상에 최대값이 두 개가 나온 장면

학생들은 울타리의 길이가 240과 260일 경우에도 세로 대 가로의 길이의 비가 1:2일 때 직사각형의 면적이 최대가 됨을 알 수 있었다. 이어서 교사는 270의 경우에 대해서도 성립하는지를 살펴보도록 하였고 학생들은 스크롤바를 움직여 울타리의 길이가 270일 경우를 탐구해 보았다. 이번에는 세로 대 가로의 비를 쉽게 찾기 위해 교사의 권유에 따라 그 비율을 나타내는 열을 하나 추가하였다.

	A	B	C	D
1	울타리의 길이		270	
2	세로	가로	넓이	비율
3	x	울타리의 길이 - 2x		
4	1	268	268	268
5	2	266	532	133
6	3	264	792	98
7	4	262	1048	85.5

[표 IV-3] 비율을 나타내는 난을 추가

이 경우에도 세로의 길이가 67과 68일 때 최대인 것처럼 보이자 앞에서와 같은 방법으로 세로 길이의 단위를 0.1까지 줄여 세로가 67.5일 때 직사각형이 최대가 되며 이 때 세로 대 가로의 비도 1: 2가 됨을 확인할 수 있었다.

70	67	136	9112	2.029850746
71	67.1	135.8	9112.18	2.023945007
72	67.2	135.6	9112.32	2.017957149
73	67.3	135.4	9112.42	2.011887073
74	67.4	135.2	9112.48	2.005834719
75	67.5	135	9112.5	2
76	67.6	134.8	9112.48	1.999782384
77	67.7	134.6	9112.42	1.99383161
78	67.8	134.4	9112.32	1.987900885
79	67.9	134.2	9112.18	1.981993935
80	68	134	9112	1.976108235

[표 IV-4] 최대값과 세로 대 가로의 비 확인

울타리 문제의 (2)를 해결한 후 활동지에서 지필로 해결하기 어려웠던 단계와 Excel이 어려운 단계를 해결하는데 중요한 역할을 하였는지에 대해 묻는 난에서 학생들의 반응은 다음과 같았다.

희정: 울타리의 길이를 바꾸면서 세로: 가로

가 1:2의 비율이 맞는지 봤는데 최대값이 2개가 나와서 당황했지만 더 숫자를 세분화시켜보니 알 수 있었다.

현지: 울타리의 길이가 바뀌어도 문제를 풀 수 있었는데, 이 때 구하는 길이가 자연수가 아니라 복잡한 수일 때 Excel을 이용해서 빨리 찾을 수 있었다. 그리고 몇 번 문제를 풀고 난 후 1:2라는 비율을 찾았을 때 Excel을 이용해서 복잡한 수라도 빨리 찾아낼 수 있었다.

이것으로 보아 학생들도 Excel의 활용이 문제 상황 속에 숨겨진 규칙을 찾는 데 유용하다는 것에 동의하고 있음을 알 수 있다.

지금부터는 오픈 박스 문제 (2)에서 나타난 일반화와 규칙의 발견에 대해 알아본다. 앞에서와 마찬가지로 교사는 학생들이 오픈 박스가 최대가 될 때 어떤 특징을 갖는지를 발견할 수 있도록 학생들을 격려했다. 학생들은 그래프를 그림과 동시에 골판지 한 번의 길이를 변화시켜 가며 박스의 부피를 관찰할 수 있도록 스크롤바에 연결하였다.

발췌문 3. 스프레드시트를 이용한 다양한 예의 생성과 규칙의 발견(2)

- (3.1) 교사: 아까 그 울타리는 가로 세로의 비율이 얼마였냐면.
- (3.2) 은주: 1:2.
- (3.3) 교사: 1:2일 때 최대가 됐었지?
- (3.4) 은주, 현지: 네
- (3.5) 교사: 그렇지요? 이때 부피는 어떤 특징이 없을까?
- (3.6) 은주, 현지: 특징이요?
- (3.7) 교사: 응. 특징. 항상 어떤 이것도 어떤 비율이 있어가지고, 그 때 최대가 나오고 그렇지 않을까?
- (3.8) 은주: 1:1:4?
- (3.9) 현지: 1:4요. 어. 그렇겠다.
- (3.10) 교사: 항상? 최대일 때?

- (3.11) 현지: 아마도
- (3.12) 교사: 아마도?
- (3.13) 은주: 가로 세로 (높이)가. 어. 4:4:1.
- (3.14) 교사: 부피가 최대일 때. 그걸 좀 하나만 가지고 하면 확신이 안 되지? 그럼 몇 개를 한번 검사를 해볼까? 계산을?
- (3.15) ……………
- (3.16) 현지: 야! 여겼다(골판지의 길이가 78일 때 '세로/높이' 비가 정확히 4가 나오는 것을 보고).
- (3.17) 은주: 우와.
- (3.18) 현지: 음허허.
- (3.19) 은주: 너무 좋아한다. 구했어요(선생님을 바라보며).
- (3.20) 교사: 구했어요?
- (3.21) 은주: 비율이 4일 때 최대값(이 때 비율은 '세로/높이'를 의미).
- (3.22) 교사: 확실해?
- (3.23) 은주, 현지: 네.
- (3.24) 교사: 그거를 값을 한 3,4개 정도에 대해서 구해보죠. 아니 거기 식에다가 예를 들어서 뭐 100일 때, 한 번 최대 한 번 구해보고.

(3.1)에서 (3.5)까지는 교사가 울타리 문제에 서처럼 오픈 박스 문제의 경우에도 어떤 특징이 있음을 암시하며 규칙을 발견할 수 있도록 안내하였다. 말하자면 2차원에서 성립했던 성질이 유사하게 3차원에서도 성립하지 않을까 유추해보도록 격려한 것이다. 좀 더 구체적으로 박스의 부피를 최대로 만드는 특징이 가로, 세로 대 높이의 비라는 것을 시사하자 (3.8)부터 (3.13)에서 볼 수 있는 것처럼 학생들은 자신들이 이전에 구했던 답을 상기하여 4:4:1이라고 추측하였다. 그리고 교사의 지시에 따라 골판지의 한 변의 길이를 연결한 스크롤바를 이용하여 여러 가지 값을 조사하기 시작하였다. 이 경우에도 울타리 문제의 상황에서 사용했던 것처럼 행과 행 사이에 다른 행을 삽입하는 전략을 사용하기도 하였다. 그러나 이전과는 달

리 주로 스크롤바를 움직여가며 부피가 최대가 되는 점을 조사하였다. 행 사이에 다른 행들을 삽입하여 조사하는 것은 정해진 값에 대해 구하고자 하는 값을 정밀하게 조사하는데 유익하고 스크롤바를 움직여가며 조사하는 것은 보다 많은 값에 대해 조사할 수 있다는 이점을 가지고 있다. 추측을 하기 위해서는 스크롤바를 움직여가며 다양한 예를 조사하는 것이 도움이 되고, 추측을 확인하기 위해서는 스크롤바를 특정한 값에 고정시키고 행 삽입을 통해 보다 근사한 값을 추측해나갈 수 있다.

(3.16)부터는 골판지 한 변의 길이를 변화시키면서 최대 부피가 되는 '세로/높이'의 비가 4와 근사한 값을 여러 개 찾아본 후 처음으로 정확히 4가 되는 점을 찾았을 때의 장면이다. (3.24)에서 교사는 몇 가지 경우에 대해 더 조사하여 일반적으로 규칙이 성립함을 살펴보도록 하였다. 학생들은 세로 대 높이의 비율이 4:1로 변하지 않는다는 것을 발견하고 이어서 스크롤바를 움직여 가면서 이 사실을 확인해 보았다. 학생들은 한 변의 길이가 24일 때 가로와 세로가 16, 높이가 4로 최대가 됨을 확인하였다.

[그림 IV-6]에서 그래프는 높이를 가로축으로 하고 부피를 세로축으로 하여 그린 것이다. 그림에서 '가로'와 '세로' 항목 아래에 보이는 식 ' $60 - 2x$ '은 앞 [그림 IV-5]에서 설명한 것과 같은 유형의 오류로 혼란을 야기하지는 않았다.

오픈 박스 문제의 (2)을 해결한 후 활동지에서 지필로 해결하기 어려웠던 단계와 Excel이 어려운 단계를 해결하는데 어떤 역할을 하였는지에 대해 묻는 난에서 학생들의 반응은 다음과 같았다.

아영: Excel을 이용함으로써 가로와 세로의 길이를 지정함에 따라 높이의 값이 나오고 그것을 이용해 부피의 값을 구해 여러 가지 값에

서 쉽게 최대값을 찾을 수 있었다.

희정: (지필환경에서는) 계산이 잘 되지 않았다. Excel을 사용하니 답이 쉽게 나왔다.

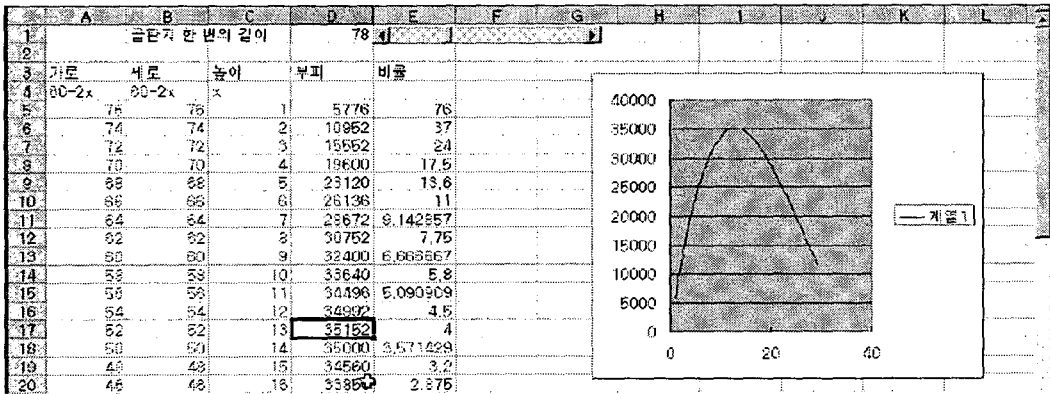
원진: (Excel 환경이 아니었다면) 아직 배우지 않은 삼차함수를 이용하여 푸는 문제이므로 풀 수 없었고 또한 식이 복잡해서 풀기 어려웠을 것이다.

지금까지는 학생들이 스프레드시트를 활용하여 지필로 풀어본 해를 확인하거나 지필로 풀 수 없었던 해를 찾고, 나아가 특정한 상황을 일반적인 상황으로 바꾸면서 다양한 예들을 만들어 주어진 상황 속에 내재하는 규칙을 찾을 수 있었음을 보았다. 지금부터는 찾은 규칙을 어떻게 정당화하는지 살펴보고자 한다. 다음은 울타리 문제에서 얻게 된 규칙을 정당화하는 것을 보여준다.

발췌문 4. 발견한 규칙을 지필환경에서 정당화하기

- (4.1) 교사: 이제 240 숫자가 아니고 문자일 때 임의의 길이일 때, a일 때 어떻게 될까? 한번 써보세요.
- (4.2)

- (4.3) 은주: 그걸 어떻게 해요?
- (4.4) 교사: 240일 때는 했잖아.
- (4.5) 은주: 그거는 숫자니까 풀었던 거죠.
- (4.6) 교사: 문자일 때도 똑같이 풀 수 있지 않을까?
- (4.7) 은주: 못할 것 같은데.
- (4.8) 교사: 한번시도는 해볼 수 있죠?
- (4.9) 교사: 우리 그 240을 바꿔가면서도 계산해 봤었잖아. 그지? 기억나?
- (4.10) 현지: 선생님 근데요, 이거 울타리 길이가 a 일 때 세로랑 가로랑 1대2인지 모르는 거잖아요.
- (4.11) 교사: 그렇지 모르지.
- (4.12) 현지: 그러면 문자가 벌써 3개나 되버렸는데 어떻게 풀어요?
- (4.13)
- (4.14) 교사: 숫자일 땐 잘 계산했었잖아. a가 일단 상수라고 생각하고 하면 되잖아. a는 상수야.
- (4.15) 은주: 계산이 안 되잖아요. 연립방정식 같은 게 안 되잖아요.
- (4.16) 현지: 어... 답이 그냥 문자로 나오잖아. 그 문자에 대한 식으로 나오겠지. 답은 알고 있잖아. 우리가 그지? 답을 알고 있잖아. 답을 알면서 풀면 더 쉽지.
- (4.17)
- (4.18) 교사: 은주는 그러면 240 아니고 300이다.
- (4.19) 은주: 300이면 풀 수 있어요.



[그림 IV-6] 골판지의 길이를 변화시키면서 세로 대 높이의 비를 찾음

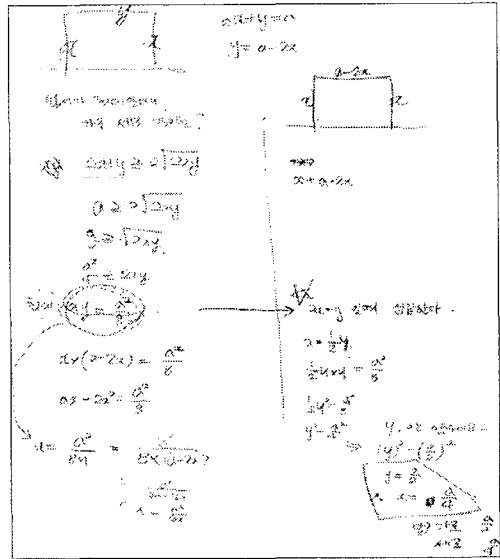
- (4.20) ……………
- (4.21) 은주: 그래서 비가 1:2야?
- (4.22) 현지: 음.
- (4.23) 은주: 으음~.
- (4.24) 현지: 신기하다!

위 발췌문에 나타난 정당화의 유형은 두 가지이다. 한 가지는 현지가 푼 방법으로 일반적으로 울타리의 길이를 a 로 놓았을 때 이를 산술 기하 평균을 이용하여 증명하는 방법이다. 다른 한 가지는 은주가 본래 문제에서 제시된 수와는 다른 특정한 수 300에 대해 그 규칙이 성립하는지를 조사한 방법이다. 이 발췌문에서 볼 수 있는 것은 학생들이 찾은 규칙을 잘 이해하고 그것이 다양한 경우에 성립함을 이미 살펴보았음에도 불구하고 증명하는 것을 생소하고 어렵게 느끼고 있다는 점이다. 학업 성취도가 상인 현지는 (4.10)과 (4.12)에서 일반적인 경우에 모르는 변수가 세 개라고 생각하고 이것을 증명할 수 있는지에 대해 의문을 가지고 있음을 볼 수 있다. 그리고 울타리의 길이가 240으로 주어졌을 때 어렵지 않게 산술평균과 기하평균 사이의 관계를 사용하여 해결했음에도 불구하고 교사가 산술평균과 기하평균의 특징을 상기시켜 도중에 막혔던 증명을 다시 시도하였었다. (4.24)에서 보여준 현지의 ‘신기하다’는 반응은 자신이 발견했던 규칙을 이와 같은 식으로 증명할 수 있다는 것을 예측하지 못했음을 보여주는 것이다.

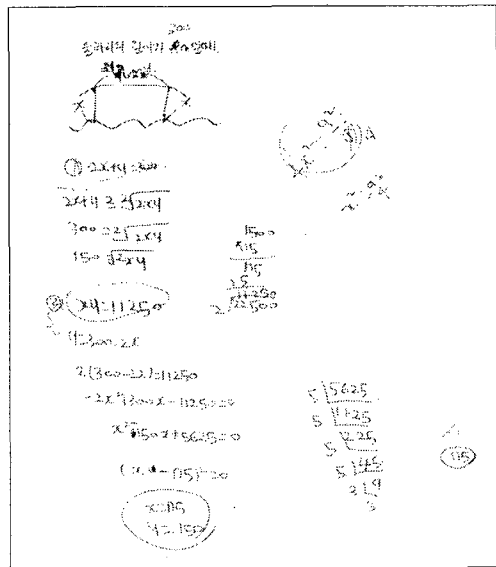
(4.4), (4.9)에서 교사는 규칙을 발견했던 스프레드시트 환경에서 활동을 연상시켜 일반적인 문자에도 적용할 수 있을 것이라고 격려했었다. 현지는 이와 같은 교사의 개입으로 일반적인 문자를 사용하여 이를 증명할 수 있었다.

(4.18)에서 교사는 은주가 문자로는 증명하기 어렵다고 판단하고 다른 특정한 수에 대해서

발견한 규칙이 성립하는지를 증명하도록 하였다. 은주는 문자 대신 숫자 300을 대입하여 자신이 발견한 규칙을 확인하였다([그림 IV-7], [그림 IV-8] 참조).



[그림 IV-7] 울타리의 길이를 a 로 놓은 현지의 증명



[그림 IV-8] 울타리의 길이를 다른 수 300으로 놓고 확인한 은주의 풀이

학생들은 실험 전 면담에서 정규 수업 시간에 어떤 문제 상황으로부터 수학적 사실을 발견하고 이를 증명해보는 수업을 한 적이 없다고 답하였다. 학생이 스스로 발견한 규칙을 다시 정당화하는 것은 위 현지와 은주의 경우에서 볼 수 있는 것처럼 간단하거나 자연스러운 일이 아니었다. 은주는 자신의 풀이를 현지의 증명과 마찬가지로의 증명으로 간주하는 것을 볼 수 있었다. 은주의 풀이는 울타리의 길이를 어떤 수로 주어도 해결할 수 있다는 것을 보여주고, 스프레드시트 환경에서의 알 수 없는 계산 과정보다는 지필로 계산 과정을 보여줄 수 있다는 점에서 현지의 증명과 스프레드시트 환경 속에서의 귀납적 정당화 사이에 위치한다고 볼 수 있다. 다른 조인 아영과 정운의 대화에서도 자신이 발견한 규칙을 형식적으로 정당화하는 일이 그들에게 생소하다는 것을 확인할 수 있었다. 아영과 정운은 현지와 마찬가지로 산술 평균과 기하 평균 사이의 관계식을 이용하여 증명하였으나 증명 과정은 중간에 교사의 개입이 필요하였다. 특히 증명 도중의 정운의 “선생님 이거 너무 이상한 방향으로 가는 거 같아요.”와 같은 발언이나 세로 대 가로가 1: 2일 때 넓이가 최대임을 증명하고도 “선생님 너무 어거져 같아서 푼 느낌이 안나요.”라고 하는 발언에서 울타리의 길이를 문자로 놓고 증명한다는 것이 그들에게 몹시 생소한 것임을 알 수 있다. 이것은 규칙의 발견에 이은 발견의 수학적 증명을 문자로 표현하여 일반적으로 증명한다는 것이 생소하며 익숙하지 않은 경험이라는 것을 말해준다.

형식적인 수학의 전개보다는 실험으로부터 얻은 결과인 규칙을 형식화해나가는 것은 수학이 발전해온 과정으로 수학자들과 유사한 경험을 갖게 해줄 수 있다는 데서 그 의의를 찾을 수 있다. 그리고 스프레드시트 환경에서 풍부

하고 구체적인 수치를 통하여 문제 상황 속에서의 규칙을 찾는 경험에서 특정한 변수의 변화는 학생이 발견한 규칙을 형식화하는데 중요한 도움을 제공한다고 볼 수 있다. 실제 교사는 스프레드시트 환경에서의 특정한 변수의 역할을 연상시키도록 노력하였고 현지를 비롯한 다른 학생들의 증명은 교사의 개입과 동시에 진전이 있음을 볼 수 있었다.

다음은 오픈 박스 문제의 2에서 나타난 정당화의 유형이다. 교사는 학생이 발견한 규칙을 지필 환경에서 증명해보도록 하였으나 별 진전이 없자 스프레드시트 환경에서 다른 경우들을 더 조사하여 학생이 발견한 규칙이 사실임을 귀납적으로 정당화해보기를 권유하였다.

발췌문 5. 발견한 규칙을 스프레드시트 환경에서 정당화하기

- (4.1) 교사: 그거를 값을 한 3,4개 정도에 대해서 구해보죠. 아니 거기 식에다가 예를 들어서 뭐 100일 때, 한번 최대한번 구해보고.
- (4.2)
- (4.3) 은주: 6. 뭐야 36일 때도 있겠다.(골판지의 길이가 30일 때 가로 대 높이 비가 자연수 4임을 확인하면서)
- (4.4) 현지: 어 여겼다.(골판지 길이가 36일 때도 비가 자연수 4가 됨을 확인하며)
- (4.5) 현지: 뭐야 왜 6의 배수만 되는 거야? 어 아까 36아니었는데... 6차이가 아니었잖아. 어 6차이 맞네.
- (4.6) 은주: 왜 6차이가 뭔 상관이지?
- (4.7) 현지: 6나누면 되겠네. 그럼 생각할 것 없이 6만큼씩 계속. 250-10(스크롤바는 최소 10에서 최대 250으로 입력되었었다. 이때 스크롤바를 10에서 250까지 움직이며 그 차이를 계산하면서). 나누기 6. 40개 있겠다. 그치?(자연수 비인 4:1로 되는 골판지

의 길이가 40개 있다고 추측)

(4.8) ……………

(4.9) 은주: 근데 이게 왜 1대 4예요?

(4.10) 현지: 맞아.

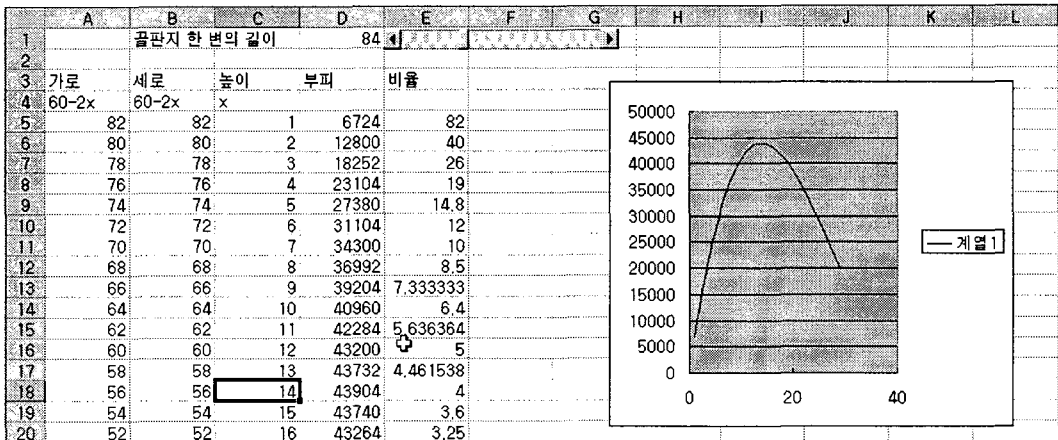
(4.11) ……………

(4.12) 교사: …, 3차식이면 이제 나중에 미분을 배워야 될 꺼야.

(4.1)에서 교사는 학생에게 구체적으로 골판지 한 변의 길이가 다른 서너 가지의 경우에 대해 골판지 가로 대 높이의 비가 4 : 1이 되는지를 스프레드시트 환경에서 조사해보도록 하였다. 이 때 학생들은 비가 4의 근사값이 나오는 경우에 행을 삽입하여 보다 근사한 비를 추적하기보다는 스크롤바를 움직여 정확히 4가 나온 경우를 조사하였다. 이것은 이미 학생들이 비가 4:1이 된다는 것을 인정하고 그 값이 사실인 경우를 보다 많이 확보하기 위한 것으로 판단되었다. 스크롤바를 움직이면서 비를 조사하다가 은주는 (4.3)에서처럼 비가 자연수가 되는 것을 찾아보라고 제안하였다. 이후 (4.7)까지는 6의 배수에서 자연수의 비가 됨을 확인하는 과정을 보여준다. 이러한 것은 빠른 자동계산과 스크롤바의 기능을 사용하여 많은

예를 용이하게 관찰할 수 있는 것에 기인하며 컴퓨터 환경에서 예기치 못한 새로운 규칙을 발견할 수 있다는 것을 보여준다. 그러나 현지와 은주는 형식적으로 왜 그렇게 되는지에 대해 증명하지는 않았다. 은주와 현지는 골판지의 한 변의 길이가 36, 42, 48, 54 등을 스크롤바를 사용하여 확인하였다. 아래 그림은 골판지의 한 변의 길이가 84일 때 비가 자연수임을 확인한 것이다.

(4.9)와 (4.10)에서 은주와 현지는 다양한 예를 통하여 오픈 박스의 부피가 최대일 때는 가로 대 세로의 비가 4: 1임을 확인하고서도 여전히 의문이 남아있음을 보여준다. 이것은 학생이 지필 환경에서의 형식적 증명을 다양한 예를 통한 귀납적 정당화보다 우위에 놓고 있음을 시사한다. 이에 교사는 (4.12)에서처럼 형식적 정당화는 더 많은 수학적 필요함을 지적하는 데서 학생의 의문을 잠재울 수밖에 없었다. 모델링 활동을 통하여 발견한 수학적 규칙을 정당화하는 것은 학생의 기존 지식과 그 지식의 활용 정도에 따라 영향을 크게 받으므로 교사는 이에 비추어 형식적 증명을 시도해야 하는지에 대한 판단을 내려야만 한다.



[그림 IV-9] 골판지 한 변의 길이가 84인 경우 가로 대 높이의 비가 4:1임을 확인

V. 논의 및 결론

수학 수업에서 모델링 활동은 학생이 주어진 실세계 문제 상황을 이해하고 그 속에 내재한 법칙을 찾아내어 그 상황을 예측할 수 있도록 도우며, 수학의 필요성과 응용가능성을 일깨워 준다는 점에서 중요한 의미를 지니고 있다. 모델링 활동에서는 문제 상황을 이해하고 설명할 수 있는 개념적 체계를 개발하는 것을 중시하므로 문제 상황 속에 내재한 수학적 규칙을 찾고 이를 정당화하는 경험은 매우 중요하다. 우리는 지금까지 스프레드시트 환경이 이러한 경험을 제공할 수 한 방법이 될 수 있음을 보였다.

주어진 특정 문제 상황의 해결은 수학적 규칙을 찾는 첫 단계에 해당한다. 스프레드시트를 활용은 문제 해결의 측면에서 크게 두 가지로 나타났다. 한 가지는 학생이 지필 환경에서 해결한 문제의 해를 스프레드시트 환경에서 확인하는 경우이고, 다른 한 가지는 지필 환경에서 문제를 해결하지 못했을 때 스프레드시트 모델을 만들어 이를 해결하는 경우이다. 후자의 경우 학생이 지필 환경에서 문제 해결에 필요한 대수적 모델을 만들 수 있었지만 이를 분석할 수 없는 경우로 스프레드시트를 활용하여 얻은 해의 의미를 이해하는 데는 지장이 없었다.

문제를 해결한 후 학생은 지필 환경에서 찾을 수 없었던 규칙을 스프레드시트 환경에서 다양한 예를 만들어서 표와 그래프를 활용하여 찾을 수 있었다. 규칙을 찾는데 학생이 사용한 전략은 추측과 확인 전략으로 두 가지 형태로 나타남을 볼 수 있었다. 한 가지는 스프레드시트의 행과 행 사이에 다른 행을 삽입하여 구하고자 하는 값을 조사하는 방법이고, 다른 한 가지는 스크롤바를 만들어 변화시키고자 하는

값에 연결하여 스크롤바를 이동시키며 조사하는 방법이다. 행을 삽입하는 것은 특정한 값에 대해 어떤 규칙이 성립하는 지를 면밀히 조사하는 데 유리하다면 스크롤바를 이용하는 것은 짧은 시간 안에 보다 많은 값에서 규칙이 성립함을 확인할 수 있는 이점을 가지고 있다. 이 두 가지 방법은 곧잘 혼용되었으며, 처음에 행과 행 사이의 다른 행에 의한 삽입이 주가 되었다면 시간이 흐르며 스크롤바를 주로 많이 이용하는 것이 관찰되었다.

학생이 찾은 규칙의 정당화는 지필 환경에서 문자를 사용한 연역적 정당화, 특정한 숫자에 대해 다시 풀어보게 하는 풀이 그리고 스프레드시트 환경에서 많은 예를 조사하여 규칙이 성립함을 확신하게 하는 귀납적 정당화가 나타났다. 모델링 활동에서 학생은 자신이 찾은 규칙에 애착을 가지고 즉각적으로 그 이유를 탐구하는 경향이 있으므로 학생이 규칙을 발견한 이후 자연스럽게 정당화로 이어지는 기회를 제공한다. 그리고 다양한 예와 절대 참되진 특정 셀의 역할에 대한 관찰은 학생이 연역적 정당화로 이행하는데 도움을 줄 수 있음을 볼 수 있다. 귀납적 정당화보다는 연역적 정당화를 할 수 있는 것이 바람직하고 학생들 또한 연역적 정당화를 귀납적 정당화보다 우위에 두고 있음을 관찰할 수 있었다. 그러나 모델링 활동은 관찰, 추측, 규칙의 발견, 증명의 구상 등을 수반하는 형성 과정에 있는 수학의 모습을 지니므로 학생이 활동을 통하여 발견한 규칙을 기존의 학생의 지식에서 항상 증명 가능한 것은 아니다.

그러므로 각각 학생의 지식수준과 활용 수준에 따라 다양한 유형의 정당화가 필요하다고 생각되며 교사는 항상 이것을 결정할 갈등 상황에 봉착할 수 있음에 유의할 필요가 있다.

참고문헌

- Baker J. E. & Sugden S. J. (2003). Spreadsheets in education—the first 25 Years, *eJSiE 1*(1), 18-43.
- Beare, R. (1993). How spreadsheets can aid a variety of mathematical learning activities from primary to tertiary level. *Technology in mathematics teaching: A bridge between teaching and learning*. B. Jaworski. Birmingham, U.K.: 117-124.
- Beare, R. & Hewitson, J. (1996). Asking and answering all sorts of scientific questions using spreadsheets. *School Science Review 77*(281), 43-53.
- Bialas, Piotr. (2001). *Spreadsheet use in an elementary statistics course*. Doctoral Dissertation, Columbia University Teachers College.
- Blum, W. (1989). *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, Ellis Horwood Limited.
- Friedlander, A. (1998). An excellent bridge to algebra, *Mathematics teacher, 91*(50), 382-383.
- _____ (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2. 337-344.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.
- Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T. & Tabach, M. (2002). Mathematics curriculum development for computerized environments: A designer-researcher-teacher-learner activity. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. (pp. 657-694). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Masalski, W. J. (1990). *How to use the spreadsheet as a tool in the secondary school mathematics classroom*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., & Ursini, S. (1999). Mathematical modelling: The interaction of culture and practice. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 167-183.
- Morishita, E., Iwata, Y., Yoshida K. Y., & Yoshida H. (2001). Spreadsheet fluid dynamics for aeronautical course problems. *International Journal of Engineering Education 17*(3), 294-311.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Neuwirth, E., & Arganbright, D. (2004). *The active modeler: Mathematical modeling with Microsoft Excel*. Belmont, California, Brooks Cole publishing company.
- Stephen G. P. & Kenneth R. B. (2004). *The Art of Modeling with Spreadsheets*, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, NJ.
- Steward, A. (1994). Spreadsheets in Mathematical Education. *International Journal Mathematical Education in Science & Technology, 25*(2).
- Sutherland, R., & Rojano, T. (1993).

- spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical behavior*, 12, 353-383.
- Wilson, K. Ainley, J., & Bills L. (2004). Spreadsheet generalizing and paper and pencil generalizing, In Høines, M. J. & Fuglestad, A. B. (Ed.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4, 441-448.

Mathematical Discovery and Justification through Modeling Activity in Spreadsheet Environment

Son, Hong Chan (KNUE, graduate school)

Lew, Hee Chan (KNUE)

The purpose of this study is to explore the mathematical discovery and justification of six 10th grade students through mathematical modeling activities in spreadsheet environments. The students investigated problem situations with a spreadsheet, which seem to be difficult to solve in paper and pencil environment.

In spreadsheet environments, it is easy for students to form a data table and graph by inputting and copying spreadsheet formulas, and to make change specific variable by making a scroll bar. In this study those functions of spreadsheet play an important role in discovery and justification of mathe-

tical rules which underlie in the problem situations. In modeling activities, the students could solve the problem situations and find the mathematical rules by using those functions of spreadsheets. They used two types of trial and error strategies to find the rules. The first type was to insert rows between two adjacent rows and the second was to make scroll bars connecting specific variable and change the variable by moving the scroll bars. The spreadsheet environments also help students to justify their findings deductively and convince them that their findings are true by checking various cases of the problem situations.

* key words : spreadsheet(스프레드시트), modeling activity(모델링 활동), problem solving(문제 해결), discovery(발견), justification(정당화)

논문접수 : 2005. 11. 3

심사완료 : 2005. 12. 2