대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.4, 403-425. Dec 2005

네덜란드의 초등 수학 교육과정에 대한 개관 - 자연수와 연산 영역을 중심으로 -

정 영 옥*

본 연구는 네덜란드의 초등 교육과정에 대한 문헌 연구를 통해 RME에 기초한 초등 수학교육의 실제를 자연수와 연산 영역을 중심으로 구체적으로 알아보고 우리나라 교육과정과 교과서 개발을 위한 시사점을 도출하는 데 그 목적이 있다. 이러한 목적을 달성하기 위해 네덜란드의 초등 교육과정에 결정적인 영향을 미치는 요소인 핵심 목표, 네덜란드의 교과서, TAL 프로젝트의 결과물인 초등학교 학생들의 거시적인 교수 학습 경로를 살펴보았다. 그 결과 RME에 기초한 초등 수학교육은 현실 상황의 주제 중심의 통합형 교육과정이며, 자연수와 연산 영역 지도의 특징으로는 수세기, 상황화, 위치화, 구조화, 수준에 기초한 점진적 알고리즘화, 어림의 강조와 계산기의 적절한 사용을 강조하고 있음을 알 수 있었다. 이를 바탕으로 앞으로의 교육과정과 교과서 개발을 위해 논의할 문제로 수 개념 지도에서 농도수와 순서수 지도의 균형, 수의 상대적 크기의 지도, 다양한 연산 전략의 지도, 다양한 교수학적 모델의 사용을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

네덜란드의 수학교육은 Freudenthal의 '인간 활동으로서의 수학'이라는 수학교육 철학을 기초로 하는 현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education, RME로 약칭)으로 잘 알려져 있다. Treffers(1987)는 이러한 이상적인 수학교육 철학을 뒷받침할 만한 영역-특수 수업 이론(domain-specific instruction theory)으로 안내된 재발명과 점진적 수학화, 교수학적 현상학, 수준 이론 등을 제시하였고, 구체적인 수업 원리로 구체적인 현상의 탐구 원리, 수직적 도구에 의한 수준 상승의 원리, 학생의 창작 활동을 통한 반성적 사고의 촉진 원리, 상호작용 수업 원리, 학습 영역의 연결을 통한 구조화 원리등을 제안하였다. 지난 30여 년 간 네덜란드의 많은 연구자들은 이러한 이상적인 수학교육 철학과 이를 뒷받침하는 영역-특수 수업 이론을 바탕으로 학생들에게 가르쳐야 할 수학의 여러 주제, 예를 들면 분수, 소수, 자연수, 초기 대수, 넓이와 둘레, 통계, 미적분 등에 대한 교과과정 개발과 국소 수업 이론(local instruction theory)을 계속 발전시켜 왔고, 이러한 과정에서 네덜란드 수학교육의 실제는 계속 변화해 왔다. 이와 같이 RME는 이상적인 수학교육 철학을 실현하려는 초기의 다소 이상적인 구체화 단계, 네덜란드의 수학교육 실제에 좀더 접근하려는 현실적인 구체화 단계를 거쳐 이제는 세계적인 수학교육의 동향을 고려한 세계화의 단계에 접어들고 있다. 따라서 RME는 완성된 이론이 아니라 앞으로도 계속 연구되고 갱신되어야 하며, 고립된 이론이 아니라 세계적인 변화와 발맞추어 계속 발전해가는 이론이라 할

* 경인교육대학교(yochong@gin.ac.kr)

수 있을 것이다.

국내에도 이러한 RME에 대해서는 잘 알려져 있는 듯하지만, 겉보기와는 달리 'RME에 기초한 초등 수학교육의 실제는 무엇인가?' 라는 질문에 충실하게 답하기는 어려운 것 같다. 중등교육의 경우에는 1987년부터 1992년까지 새로운 중등 교육과정의 배경을 제공한 W12-16 프로젝트(Abels et al., 1992)를 기초로 네덜란드의 중등 교육을 위한 교과서들이 집필되었고, 이것이 미국의 NCTM이 요구하는 규준과 RME에 기초한 수학교육을 접목해 보려는 목적으로 미국의 University of Wisconsin-Madison의 National Center for Research in Mathematical Sciences Education과 네덜란드의 University of Utrecht의 Freudenthal Institute가 공동으로 개발한 Mathematics in Context 교과서 시리즈를 통해 간접적이기는 하지만 대략적인 모습을 어느 정도는 상상해 볼 수 있다. 초등교육의 경우에는 1970년대의 Wiskobas 프로젝트를 통해 알려진 고전적인 예, '수중나라', 'Ahoy 선', '우리의 지구', '방갈로 짓기', 'OHP', '비', '운동장과 연못', '비와 일차함수', '운에 대해 알아보기', '걸리버 여행기' '주근깨마을', '장기판 위의 곡식', '8의 나라' 등(Freudenthal, Janssen & Sweers, 1976; Treffers, 1987)에 대해서는 알려져 있지만, 초등 수학교육의 실제에 대한 전반적인 개관을 하기에는 어려움이 있다.

일반적으로 한 나라의 수학교육의 실제를 알아보기 위한 가장 우선적이고 보편적인 방법은 교육과정 문헌을 살펴보는 일이다. 그러나 세계의 여러 나라와는 달리 네덜란드의 경우에는 초등 교육과정을 위한 문헌이 존재하지 않는다. van den Heuvel-Panhuizen(2001b)에 의하면 일반적으로 네덜란드의 초등 수학 교육과정을 결정하는 요소는 초등학교의 핵심 목표, 교과서 시리즈, 초등학교에서 지도되는 내용의 방향을 제시한 「Proeve van een National Programma voor het Reken/Wiskundeonderwijs op de Basisschool(초등학교의 산술/수학교육을 위한 국가 프로그램 초안)」[1]등이다. 네덜란드에서 교과서는 저자들에 의해 독립적으로 개발되지만, Freudenthal 연구소와 SLO의 공동 연구에서 제시하는 교수 활동을 위한 아이디어를 활용할 수 있는데, 대표적인 것이 바로 Proeve이다. 초등학교의 핵심 목표는 1993년 이전까지는 존재하지 않았었고, 1993년 교육부에서 처음 발표하였으며, 1998년에 개정된 핵심 목표를 발표하였다. 이에 따라 초등학교 학생들의 성취 목표 및 이를 실제적인 수업개선으로 구체화하기 위해 1997년부터 2001년까지 Treffers, van den Heuvel-Panhuizen, Buys 등 다수가 참여한 TAL[2] Project를 실행하였고, 그 결과물이 출판되었으며, 이것이 RME의 수학교육 실제에 영향을 미치고 있다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001b: 1-4).

따라서 본 연구에서는 RME에 기초한 네덜란드의 초등 수학교육의 실제는 무엇인지를 살펴보기 위해, 초등 수학 교육과정을 결정하는 가장 기본적인 요소인 초등학교 핵심 목표, TAL 프로젝트의 결과, RME에 기초한 Pluspunt 교과서[3]를 바탕으로 네덜란드에서 RME에 기초한 초등 교육과정에 대해 자연수와 연산 영역을 중심으로 개관함으로써 네덜란드의 수학

1) Proeve는 1989년에 출판된 것으로 Treffers 등이 주요 저자로 참여하여 초등학교 수학을 위한 다양한 예들과 더불어 기초적인 수 기능, 지필 알고리즘, 비와 백분율, 분수와 소수, 측정, 기하학의 일부 영역의 지도에 대한 상세한 기술이 되어 있으며, 지금도 이러한 연구가 계속되고 있다(Van den Heuvel-Panhuizen, 2001b: 4).

2) TAL은 Tussen Annex Leerlijnen라는 네덜란드어의 약자로 학습 교수 경로에서 중간 성취 목표라는 의미이다.

교육의 실제에 대한 상을 조금 더 명확히 하고[4], 이를 기초로 우리나라의 교육과정과 교과서 개발을 위해 논의할 문제를 생각해 보고자 한다.

II. 네덜란드의 초등 수학 교육과정에 대한 개관

이 장에서는 네덜란드의 초등학교에서 강조하는 일반적인 목표와 도달해야 할 핵심목표가 무엇인지 알아보고, 이에 따른 네덜란드 교과서 Pluspunt의 내용에 대한 개관을 제시하고자 한다.

1. 네덜란드 초등 수학 교육과정의 핵심 목표

네덜란드의 교육부(Ministry of Education, Culture and Sciences)에서는 1998년 수학교육이 지향해야 할 일반적인 목표를 다음과 같이 제시하고 있다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001a: 249-250).

산술/수학교육은 학생들에게 다음과 같은 것을 가르치는 것을 목표로 한다.

- 산술과 수학을 일상 경험과 연결하기
- 기초기능을 획득하고, 간단한 수학 언어를 이해하며, 이를 실제 상황에 응용하기
- 자기 자신의 수학적 활동을 반성하고 이러한 활동의 결과의 정확성을 점검하기
- 간단한 관계, 규칙, 구조를 인식하고 발견하기
- 탐구 전략과 추론 전략을 자기 자신의 언어로 기술하고 사용하기

위에 제시된 일반적인 목표는 문제해결, 연결성, 추론, 의사소통, 표현 등의 수학적 소양을 강조하는 세계적인 동향을 반영할 것일 뿐만 아니라 네덜란드의 대다수의 초등학교에서 적용되고 있는 RME의 철학을 반영한 것이라 할 수 있다.

이러한 일반적인 목표 외에 각 내용 영역별로 도달해야 할 성취 목표를 제시하고 있는데, 이를 살펴보면 <표 II-1>과 같다.

위에 제시한 핵심 목표는 너무 간단하기 때문에 교사들에게는 별다른 영향을 미치지는 않지만, van den Heuvel-Panhuizen(2001b: 5-6)에 따르면 개정된 핵심 목표는 최근의 네덜란드 수학교육의 변화를 잘 드러내 주는데, 그 중의 하나가 암산과 어림의 강조, 형식적 분수 계산의 삭제, 기하의 공식적인 도입, 계산기의 통찰력 있는 사용이라고 할 수 있다.

2. 네덜란드의 초등 수학 교과서 내용과 체제에 대한 개관

앞 절에서 제시한 초등 교육과정의 핵심목표와 관련하여 초등학생을 위한 Pluspunt 교과서에서는 지도해야 할 내용을 몇 가지의 영역으로 구분하고, 학년별 학습 내용을 구성하고 있다.

---

3) 네덜란드에서 RME의 영향을 받은 교과서는 여러 가지가 있는데, 최근에 가장 중요한 교과서 시리즈는 Pluspunt, De wereld in getallen, Wis ed Reken, Rekenrij, Alles Telt, Talrijk 등이 있다(van den Heuvel-Panhuizen: 2001b: 2).

4) 본 연구에서는 초등학교 핵심목표와 TAL 프로젝트 결과를 기초로 네덜란드에서 RME에 기초한 초등 수학 교육과정의 개략적인 방향을 살펴보고, Pluspunt 교과서 분석을 통해 이러한 방향의 구체화의 한 예를 제시하고자 한다.

<표 Ⅱ-1> 네덜란드의 초등학교 수학 성취 목표

영역		성취 목표
A	기능	1. 학생들은 단위를 바꾸어 가며 앞뒤로 셀 수 있다. 2. 학생들은 덧셈과 곱셈의 산술 과정을 위한 10까지의 주요 구구표를 알아야 한다. 3. 학생들은 다양한 연산에 대한 그들의 지식을 효율적으로 사용해서 간단한 암산 과제를 수행할 수 있어야 한다. 4. 학생들은 산술 연산 또한 분수와 소수에 대해서 대략적으로 그 연산의 결과를 어림할 수 있어야 한다. 5. 학생들은 범자연수의 구조를 이해하고 십진기수법을 이해해야 한다. 6. 학생들은 통찰력 있게 계산기를 사용할 수 있어야 한다. 7. 학생들은 수학적 언어로 기술되지 않은 간단한 문제를 수학적 용어만으로 전환할 수 있어야 한다.
B	산술	8. 학생들은 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 표준 절차 또는 대안적인 절차로 계산할 수 있어야 하고, 그것들을 간단한 상황들에 적용할 수 있어야 한다.
C	비와 퍼센트	9. 학생들은 비를 비교할 수 있어야 한다. 10. 학생들은 간단한 비 문제를 해결할 수 있어야 한다. 11. 학생들은 '백분율' 개념을 이해하고 간단한 상황에서 실제적인 백분율 계산을 할 수 있어야 한다. 12. 학생들은 비, 분수, 소수 사이의 관계를 이해할 수 있어야 한다.
D	분수와 소수	13. 학생들은 분수와 소수는 그 의미에 차이가 있음을 알아야 한다. 14. 학생들은 분수와 소수를 수직선 위의 알맞은 위치에 나타낼 수 있어야 하고 분수를 소수로 또한 계산기를 사용해서도 바꿀 수 있어야 한다. 15. 학생들은 모델을 이용하여 간단한 실제적인 상황에서 간단한 분수와 소수의 비교, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 할 수 있어야 한다.
E	측정	16. 학생들은 시각을 말하고 시간을 계산할 수 있어야 한다. 또한 달력을 사용할 수도 있어야 한다. 17. 학생들은 일상생활 상황에서 화폐 계산을 할 수 있어야 한다. 18. 학생들은 가장 중요한 양과 관련된 측정 단위 사이의 관계를 이해할 수 있어야 한다. 19. 학생들은 일반적으로 길이, 넓이, 들이, 시간, 속도, 무게, 온도 개념을 일반적으로 적용할 수 있는 측정 단위들을 알고 이것들을 간단한 실제 상황에 적용할 수 있어야 한다. 20. 학생들은 간단한 표와 그래프를 읽을 수 있어야 하고 그들 자신의 측정에 기초한 간단한 상황에서 이러한 것들을 스스로 만들 수 있어야 한다.
F	기하	21. 학생들은 공간을 기하학적으로 조직하고 기술할 수 있는 간단한 개념과 관념을 마음대로 다룰 수 있어야 한다. 22. 학생들은 공간적 논증을 사용할 수 있어야 한다. 이와 더불어 건설 모델, 청사진, 지도, 사진, 위치에 대한 정보, 방향, 거리와 척도를 사용할 수 있어야 한다. 23. 학생들은 그림자를 설명하고 여러 가지 모양들을 구성하고 규칙적인 대상들의 구성 모델을 인식할 수 있어야 한다.

Pluspunt 교과서의 내용 영역을 살펴보면, 수 개념(Getalbegrip), 기본 계산 능력: 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈(Basisvaadigheden: optellen en aftrekken, vermenigvuldigen ed delen), 측정(Meten), 기하학과 공간 방향(Meetkunde en ruimtelijke oriëntie), 비, 백분율, 분수(Verhoudingen, procenten en breuken)의 5개 영역으로 구분되어 있다(Pap, Janssen, & Pap, 2003c; Munsterman & de Weerd-Fourdraine, 2003c; van Gool, Janssen, & Munsterman, 2003c; Groen, Rouvroye, van de Straaten, & van de Weerd-Fourdraine, 2003c; Janssen, Munsterman, & Rouvroye, 2003b; Boersma, van Gool, Groen, & van der Straaten, 2003b). 이에 따른 학년별 지도 영역을 살펴보면 <표 Ⅱ-2>와 같다.

Pluspunt 학생용 교과서 시리즈의 구성 체제를 살펴보면, 1년이 4학기로 구성되어 있고, 교과서는 1년에 3종류의 교과서와 2종류의 연습책, 즉 수업 교재(Lesboek), 필수 교재(Opdrachtenboek), 심화 교재(Plusboek), 연습 교재(Werkboek), 심화 연습 교재(Pluswerkboek)로 구성되어 있다. 또한 수업 교재는 한 학기에 3단원씩 1년에 12단원으로 이루어져 있으며, 한 학기는 9주, 1년에 36주이며, 한 주에 수학 시간은 5차시, 한 차시는 55분으로 배정되어 있고, 3주에 한 단원씩 진도를 나가는 것으로 계획되어 있다. 각 주의 첫 번째, 세 번째 시간에는 교사 주도 학습(leerkrachtgebonden werken), 두 번째 시간, 네 번째, 다섯 번째 시간에는 학생 스스로 학습(zelbstandig werken)을 하도록 되어 있다. 교사 주도 학습은 학생 스스로 활동하는 시간이 10분 정도, 필요할 때는 각자 활동을 하면서 상호작용하는 시간이 35분 정도, 스스로 학습하는 시간이 10분 정도로 이루어지는 반면, 학생 스스로 학습은 교사의 지침 전달이 10분 정도, 필요할 때는 도움을 받으며 스스로

<표 Ⅱ-2> Pluspunt 교과서의 학년별 지도 영역

학년5)		수 개념	기본 계산 능력	측정	기하학과 공간 방향	비, 백분율, 분수
1/2		■		■	■	
3	3A	■	■	■	■	
	3B	■	■	■	■	
4	4A	■	■	■		
	4B	■	■	■	■	
5	5A	■	■	■		■
	5B	■	■	■		
6	6A	■	■	■	■	■
	6B	■	■	■	■	■
7	7A		■	■		■
	7B	■	■	■		■
8	8A	■	■	■	■	■
	8B	■	■	■	■	■

5) Pluspunt 교과서 시리즈에는 유치원 1, 2학년이 초등학교 1, 2학년으로 포함되어 있기 때문에, 우리나라의 초등학교 1-6학년은 Groep3-Groep8(3학년-8학년)에 해당된다. 또한 각 학년별로 지도서가 1,2학기, 3,4학기를 하나로 묶어서 A, B로 제시되기 때문에, <표 Ⅱ-2>의 학년 구분이 3A, 3B 등으로 되어 있는 것은 지도서의 구분에 따른 것이다.

학습하는 시간이 35분 정도, 교사를 중심으로 둘러 앉아 정리하는 시간이 10분 정도로 이루어진다. 각 단원의 1차시에서 11차시에 걸쳐 교사 주도 학습을 할 때는 수업 교재를 중심으로 수업을 진행하고, 학생 스스로 학습 시간에는 필수 교재, 연습 교재를 적절히 활용하며, 12차시에는 단원평가를 실시하며, 13차시에서 15차시까지는 심화 교재를 학생들의 개인차를 고려하여 적절히 활용하면서 단원의 학습 내용을 확장하며, 개별 수업과 소집단 수업을 병행한다. 또한 수업 교재와 필수 교재, 연습 교재는 Pluspunt 교과서에서 규정하고 있는 최소 기본 내용을 담고 있으며, 심화 교재는 심화 내용을 담고 있으며, 학생들의 수준에 따라 심화 교재와 심화 연습 교재를 활용할 수 있도록 되어 있다. 한편 교과서에는 언어적 기술이 많지 않은 반면, 지도서에는 각 차시별로 시작하는 활동은 어떤 것으로 하는지, 어떤 발문을 해야 하는지, 어떻게 정리해야 하는지에 대한 설명이 상세하게 기술되어 있다.

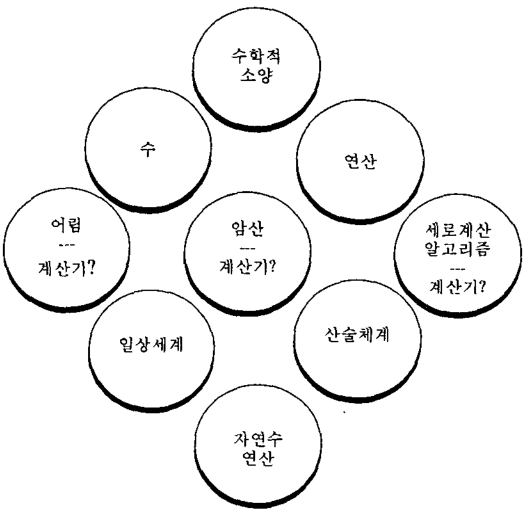
교과서의 각 단원은 하나의 영역이 아니라 현실 상황의 주제들을 중심으로 다양한 영역으로 구성되어 있다. 이러한 주제는 장난감과 놀이, 시장과 슈퍼마켓, 여행과 휴가, 교통수단, 요리, 학교에서의 생활, 캠프, 건축, 예술, 책과 출판사, 스포츠, 화원과 온실, 섬이나 도시 등 다양하며, 각각의 장면에서 여러 영역에 걸친 다양한 활동을 경험할 수 있게 되어 있다. 예를 들면, 4학년의 3단원(Groen et al., 2003a: 26-37)은 단원명이 '건축 현장에서(In de steigers)'인데, 건축과 관련해서 집 모양과 평면도가 소개되고, 집을 짓는데 필요한 벽돌의 개수, 목욕탕에 필요한 타일의 개수와 넓이 계산, 나사, 판넬, 문, 블라인더, 전구, 환풍기, 필요한 자재를 구입하는 데 드는 비용 계산, 거실에 마루를 까는 방법과 관련된 공간 감각, 판넬을 잘라 쓸 때의 분수 계산, 지붕에 필요한 기와의 수를 구하는 곱셈 계산 등 수 개념, 기본 계산, 측정, 기하학과 공간 방향, 비, 백분율, 분수 영역을 모두 포함하고 있다.

III. 네덜란드의 자연수와 연산 영역에 대한 개관

네덜란드의 자연수와 연산 영역은 앞 장에서 제시한 핵심 목표를 성취하는 것을 포함하여 다양한 내용으로 이루어지는데, 이 장에서는 자연수와 연산 영역의 지도 내용에 대한 전반적인 개관과 더불어 지도 방법에 대해 살펴보고자 한다.

1. 자연수와 연산 영역의 지도 내용에 대한 개관

자연수와 연산 영역에서는 자연수 범위에서 수개념, 수세기, 계산을 다룬다. 이 영역의 핵심 주제를 살펴보면 [그림 III-1]과 같다.



[그림 III-1] 자연수와 연산 영역의 핵심 주제
van den Heuvel-Panhuizen(2001a: 21)

[그림 Ⅲ-1]에서 알 수 있듯이 이러한 과정에서 궁극적인 목표로 삼는 것은 수학적 소양(numeracy)의 개발이다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001a: 21). 자연수와 연산 영역에 관련된 수학적 소양은 학생들이 일상생활에서 수와 계산의 의미를 이해하고 이를 적절히 다루는 능력을 개발할 뿐만 아니라 수 감각을 개발하고 수와 연산에 관련된 활동을 즐기는 것을 의미한다.

이러한 목표에 도달하기 위해서는 암산, 어림, 세로 계산, 알고리즘, 계산기 등 여러 가지 유형의 계산을 할 수 있어야 하고 제시된 문제에 적합한 방법을 선택하여 일상 세계의 문제를 해결할 뿐만 아니라 산술 체계 내에서 수와 연산의 여러 관계를 탐색할 수 있어야 한다. 특히 계산기의 경우는 계산기를 사용할 것인지 아닌지를 판단할 수 있어야 한다.

이러한 핵심 주제를 바탕으로 Pluspunt 교과서의 유치원 1, 2학년과 초등학교 1학년에서 6학년까지 자연수와 연산 영역에서 다루는 내용에 대한 각 학년별 최소 목표를 살펴보면 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> Pluspunt 교과서의 자연수와 연산 영역 지도 내용 개관

학년		최소 목표(Minimumdoel)	
		수 개념	기본 계산 능력
1/2		· 10까지의 수세기와 기초적인 수 감각	
3	A	· '더 많은, 더 적은, 똑같은'이라는 개념을 정확히 사용하기 · 12까지의 빈 수직선 위에 비어 있는 수를 채우기 · 20까지의 셀 수 있는 양을 5개씩 묶기 · 5부터 20까지의 양으로서의 수에서 5의 구조를 명백하게 인식하기 · 양이나 수를 비교하고 어떤 양이 많은지 어떤 수가 큰지 설명하기 · 30까지의 양을 비구조적인 방법으로 세기 · 20까지의 양을 정확한 기호를 사용하여 나타내기 · 5의 구조를 사용하여 20까지의 수를 즉각적으로 인식하기: 5씩 뛰어 세기, 점 카드, 주판 사용	· 셀 수 있는 대상으로 5를 분해하기 · 버스 모델을 이용하여 12까지의 수의 범위에서 10으로의 받아올림이 있는 덧셈과 뺄셈하기 · 계산과 관련된 이야기를 버스 모델로 제시한 기호법을 이해하고, 이 이야기에 필요한 계산에 대해 설명하기 · 합이 10이 되는 두 수의 쌍을 찾기 · 버스 모델과 관련된 상황에서 20까지의 수의 범위에서 계산하기 · 구체적인 상황(셀 수 있는 대상)에서 20까지의 양을 분해하기 · 6까지의 수와 8을 즉각적으로 분해하기 · 버스 모델뿐만 아니라 화살표 기호로 제시된 덧셈과 뺄셈을 하고 기호로 표현하기
	B	· 20까지의 수를 세고, 10이상의 수부터 거꾸로 세기 · 40까지의 수직선 위에 비어 있는 수를 채우기 · 10의 구조(달걀판, 10씩 묶거나 풀기)를 사용하여 30까지의 양을 정하기 · 50까지의 수를 암기하고 수직선 위에 비어 있는 수를 채우기	· 10까지의 수를 분해하기 · 화살표를 이용하여 15까지 수 범위의 덧셈과 뺄셈하기 · 12까지의 수를 합성하기 · 20 주판을 이용하여 20까지의 수를 계산하기 · 계산에 대한 간단한 이야기를 화살표 기호로 나타내기 · 주판 위에 표현된 것을 보고 덧셈과 뺄셈하기 · 간단한 덧셈과 뺄셈: $3+2=\ldots/9-5=\ldots$에서 = 기호를 이해하고 사용하기 · 덧셈 구구표에 있는 20까지의 덧셈을 사용하는 것에 숙달하기 · 상황 문제에서 형식적 덧셈·뺄셈 기호를 사용하기 · 상황 문제에서 20까지의 수에 대해 형식적 덧셈·뺄셈 기호를 사용하여 계산하기

4	A	· 50까지의 수를 암기하기 · 50까지의 양을 비구조적인 방법으로 세기 · 70까지의 양을 구조적인 방법으로 능숙하게 세기 · 수직선 위의 임의의 점으로부터 2씩, 5씩, 10씩, 20씩 앞뒤로 뛰어 세기 · 100까지의 양을 수직선 위에 나타내기 · 구체물을 이용하여 십의 자리의 수와 일의 자리의 수로 양을 정하기 · 준거점 50이 제시된 100까지의 수직선 위에서 양을 어림하기 · 100까지의 양을 비교하기(많은, 적은)	· 10까지의 수의 범위에서 1 많거나 1 적은 덧셈과 뺄셈 결과를 즉각적으로 계산하기: 5+1, 7-1 · 20까지의 수에 대한 유연한 계산하기: 8+8, 8+9 · 십의 자리의 수의 덧셈과 뺄셈하기: 50+10, 60-20 · 연산 감각을 즉각적으로 사용하기: 덧셈과 뺄셈에 대한 형식적 계산 · 곱셈 개념을 도입하기 · 곱셈 개념과 곱셈에서 교환 성질에 대해 다루기 · 임의의 수와 십의 자리의 수의 덧셈과 뺄셈하기 · 여러 가지 상황 상황에서 스스로 선택한 표현 방법으로 100까지의 수 범위의 덧셈과 뺄셈하기
	B	· 구체물을 사용하여 100까지의 양을 십의 자리의 수와 일의 자리의 수로 나타내고 수직선 위에 그 위치를 나타내기 · 100까지의 양을 수직선 위에 정확하게 나타내기 · 수직선 위에서 2씩, 10씩, 20씩 앞뒤로 세기 · 십의 자리의 수와 일의 자리의 수를 수직선 위에 나타내기	· 두 배 전략과 교환법칙을 인지하고 구체물로 계산하기 · 주어진 상황에서 스스로 선택한 전략과 구체물 표현을 이용하여 덧셈과 뺄셈하기 · 20까지의 수 범위에서 자신의 방법대로 덧셈과 뺄셈하기 · 상황 문제의 계산에서 목적이 무엇인지 표현하기 · 수직선 위에서 십의 자리로의 받아올림이 있는 일의 자리의 덧셈과 뺄셈하기 · 다음의 기본 계산 능력을 표현하기: 상황 문제에서 십의 자리로의 받아올림이 있는 덧셈과 뺄셈하기 · 빈 수직선 위에서 유연한 계산과 어림 계산하기, 수직선 위에서의 풀이 전략을 설명하기 · 2단, 5단, 10단의 구구표를 만들기 · 곱셈 구구표를 완성하는 데 중요한 전략을 설명하기 · 자신의 전략에 따라 수직선 위에서 덧셈과 뺄셈하기 · 상황 문제에서 곱셈하기: 이 때 필요한 조작을 설명하고, 구체물로 수행하기 · 100까지의 수 범위에서 (빈) 수직선 위에서 십의 자리로의 받아올림이 있는 덧셈과 뺄셈하기 · 상황 문제에서 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈할 때 필요한 조작을 설명하기 · 1단, 2단, 3단, 4단, 5단, 10단의 구구표를 순서대로 외우기
5	A	· 1000까지의 수를 암기하고, 임의의 수부터 앞뒤로 암송하기 · 1000까지의 수에서 임의의 수로부터 100씩, 10씩 앞으로, 거꾸로 뛰어 세기 · 수직선 위에서 수의 위치를 어림하기 · 1000까지의 수에서 임의의 수로부터 100씩, 10씩, 1씩 유연하게 뛰어 세기 · 1000까지의 수들 사이의 관계를 통찰하기 · 수의 구조를 통찰하기 · 수에서 숫자들의 자리값에 대해 통찰하기	· 20까지의 수 범위에서 덧셈과 뺄셈하기 · 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수의 덧셈하기: 500+40+7 · 100까지의 수 범위에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 인지하고 활용하기 · 1000까지의 수 범위에서 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수의 덧셈과 뺄셈 · 곱셈에서 다양한 풀이 전략을 사용하기: 하나 더 · 하나 덜 전략, 두 배 전략, 이등분 전략 · 100까지의 수 범위에서 덧셈과 뺄셈하기 · 여러 가지 상황 상황에서 곱셈을 인지하고 유연한 전략을 사용하여 해결하기 · 여러 가지 상황 상황에서 나눗셈을 해결하기 · 1단에서 6단, 10단에 숙달하기
	B	· 1000까지의 수를 암기하기 · 1000 이상의 수의 구조에 대해 통찰하기	· 올림이나 반올림으로 어림한 수의 덧셈하기 · 100까지의 수 범위에서 덧셈과 뺄셈, 덧셈과 뺄셈 사이의 관계 인지하기 · 1000까지의 수 범위에서 자신의 방법으로 덧셈하기 · 나머지가 있는 나눗셈을 형식적인 덧셈 기호로 계산하기 · 1000까지의 수 범위에서 수직선 위에서의 연속 전략을 사용하여 덧셈하기 · 10으로 곱셈: 26×10 · 십의 자리의 수로 곱셈: 4×70 · 자신의 수준에서 상황 문제들을 해결하기 · 1단에서 10단까지 숙달하기

6	A	· 10000까지의 수를 인접한 기준점을 이용하여 수직선 위에 나타내기 · 10000까지의 수를 읽기 · 어림에서 올림할 때 수직선 위에서 10000까지의 어림수(십의 자리의 수, 백의 자리의 수, 천의 자리의 수)들을 사용하기 · 10000까지의 수에서 각 숫자의 자리값을 알기 · 어림에서 내림한 결과가 적절한지 적절하지 않은지 판단하기	· 1000까지의 수 범위에서 자신의 방법으로 유연하고 능숙하게 덧셈과 뺄셈하기 · 10000까지의 수 범위에서 덧셈과 뺄셈을 위한 자신의 좋은 풀이 방법을 선택하고 표현하기 · 10까지의 표를 유연하게 계산하기 · 10까지의 나눗셈표를 유연하게 계산하기 · 십의 자리의 수와 백의 자리의 수가 있는 곱셈표와 나눗셈표의 유사점을 인지하기 · 곱셈에서 자신의 우수한 전략을 사용하기: 분해 전략 등 · 양을 '나누기 쉬운' 10으로 나눗셈 · 여러 가지 다른 상황에서 '나머지'의 의미를 이해하기 · 곱셈이나 나눗셈의 결과가 주어졌을 때 적합한 상황을 생각하기 · 10보다 큰 몫을 가진 나눗셈을 계산하기: 72 : 6 · 십의 자리의 수로 나눗셈하기
	B	· 10000까지의 수를 나타내는 수직선 위에서 인접한 큰 수로 반올림하기 · 10000까지의 수의 위치를 순서대로 나타내기 · 10000까지의 수를 읽고 쓰기 · 10000까지의 수에서 각 숫자의 자리값을 알기 · 10000까지의 수를 수직선 위에서 100씩 뛰어세기 · 기준점을 가진 수직선 위에서 수를 유연하고 능숙하게 어림하고, 그 위치를 나타내기 · 12까지의 로마 숫자를 인지하기 · 계산기에 수를 잘 입력하기	· 10000까지의 수 범위에서 자신의 방법으로 능숙하게 덧셈과 뺄셈하기 · 자신의 풀이 전략을 설명하기 · 1000까지의 수 범위에서 덧셈과 뺄셈 기호를 사용하기 · 올림이나 버림으로 유연하게 수를 어림하기 · 445×4와 같은 유형의 곱셈을 400×4, 40×4, 5×4로부터 유도하기 · 자신의 방법을 점점 단축하여 곱셈과 나눗셈하기 · 언제 어림 곱셈과 정확한 곱셈이 적절한지에 대해 설명하기 · 유연하고 능숙하게 0이 있는 곱셈과 나눗셈 계산하기 · 계산기에서 여러 가지 기초 기능을 사용하기: 켜짐, 꺼짐, 지움, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈
7	A		· 10000까지의 수 범위에서 자신의 방법으로 덧셈과 뺄셈하기 · 여러 가지 전략을 사용하여 유연한 곱셈하기: 두 배 전략, 이등분 전략, 하나 더·하나 덜 전략, 유추 전략 등 · 세로 나눗셈 방법을 단축하여 사용하기 · 유추 전략에 의한 큰 수의 나눗셈과 곱셈하기 · 큰 수의 나눗셈에서 유연한 전략의 사용: 분배법칙, 유추 전략 등
	B		· 곱셈의 두 배 전략과 이등분 전략 · 중간 결과를 기억하면서 나눗셈하기 · 여러 가지 상황에서 곱셈을 유도하고 유연한 세로 곱셈으로 풀이하기
8	A	· 1000000까지의 수를 숫자로 쓰는 방법을 알기	· 적절한 상황에서 곱셈과 나눗셈하기 · 자연수를 자신의 방법으로 어림해서 나눗셈하기: 74520: 115 · 자신의 방법으로 곱셈하기: 3720×18
	B	· 큰 수에서 숫자들의 자리값을 알기 · (세 숫자끼리 묶어서) 수를 읽기 · 1000000까지의 수를 어림하기 · 1000000의 크기를 양으로 표현하기 · 다양한 수 체계를 이해하기	· 자신의 방법으로 유연하게 곱셈하기 · 자연수로 모든 연산을 유연한 방법으로 계산하기 · 자신의 방법을 사용하여 지필 곱셈과 지필 덧셈하기

2. 자연수와 연산 영역의 지도 방법에 대한 개관

앞 절의 내용을 바탕으로 Pluspunt 교과서의 자연수와 연산 영역의 두드러진 지도 방법을 살펴보면, 대략적으로 수세기, 상황화, 위치화, 구조화[6], 수준에 기초한 점진적 알고리즘화의 강조, 어림과 계산기의 적절한 사용을 생각해 볼 수 있다. 이 절에서는 지도 방법의 특징을 교과서의 구체적인 예와 더불어 알아보고자 한다.

가. 수 감각과 계산의 기초로서의 수세기

수세기는 수 감각의 발달에 결정적인 역할을 하며, 다양한 상황에서 양을 세는 유연한 능력은 특히 계산 능력을 발달시키는 데 중요한 기초가 된다. Pluspunt 교과서에서는 이미 유치원 1, 2학년 과정에서 10까지의 수를 다루면서 유연한 수세기를 강조하며, 이는 초등학교에서도 계속 강조된다.

Van den Heuvel-Panhuizen(2001a: 33-38)에 따르면 어린 학생들의 수세기는 세 개의 수준으로 구분할 수 있는데, 이는 상황과 관련된 수세기가 가능한 상황 수준, 대상과 관련된 수세기가 가능한 대상 수준, 순수 수세기와 계산이 가능한 순수 수준이다

이러한 수준은 어린 학생들에게 '몇 개인가?'라는 질문을 던졌을 때 학생들이 이 질문을 어떤 방식으로 이해하고 반응하는가에 따라 구분된 것이라 할 수 있다. 학생들은 나이가 어릴수록 자신의 경험 세계, 즉 자연스러운 상황과 관련하여 이런 질문을 해야 한다. 상황 수준에서는 '몇 개인가?'라는 질문을 직접 제시하는 것이 아니라 의미 있는 문제 상황에서 적절한 형태의 질문으로 제시해야 한다. 예를 들면 학생들에게 원 모양으로 초를 배열해 놓은 상태에서 '초가 몇 개인가?'를 질문한다면, 이 수준에 해당하는 학생들은 이를 이해하기 어려울 것이다. 그러나 케이크 위에 있는 초에 하나씩 불을 붙이는 생일 파티 상황에서 '몇 살인가?'와 같은 질문을 한다면 이는 의미 있는 일일 것이며, 학생들은 올바른 대답을 하게 될 것이다. 대상 수준에서는 첫 번째 수준과는 대조적으로 직접 '몇 개인가?'라는 질문을 이해할 수 있지만, 아직은 구체적인 대상이 존재할 때만 가능하다. 순수 수준에서는 구체적 대상을 세거나 계산하는 것 대신에 이러한 대상의 물리적 표현 또는 정신적 표상에 의해서 세거나 계산한다.

예를 들면 학생들은 손가락으로 5를 나타내거나 주사위에 있는 5의 눈을 보이거나, 블록 5개를 쌓거나, 숫자 5를 가리키거나 하는 등의 상징화 과정을 통해 수를 세거나 계산한다. 이러한 수세기 수준은 이후의 계산을 위한 기초가 된다.

초등학교 1학년 과정에서는 유치원 과정에 이어 음운 세기(Akoestisch tellen), 개수 세기(Resultaten tellen), 유연한 세기(Verkort en flexible tellen), 구조화에 기초한 세기(Structurerend tellen)를 강조한다(van de Heuvel-Panhuizen, 2001a: 32; Pap, et al., 2003b: 6). 음운 세기는 박수 소리나 말소리 등에 의한 리듬을 강조하며 수를 세는 것이고, 개수 세기는 구슬, 새, 사람 등의 사물이 몇 개인지를 알기 위해서 그 수를 세는 것이며, 유연한 세기는 유연하게 적절한 묶음을 이용하여 수를 세는 것이고, 구조화된 세기는 5나 10, 100, 1000 등의 관계를 이용하여 수를 세는 것을 말한다. 이러한 다양한 수세기

5) 상황화, 위치화, 구조화라는 말은 van den Heuvel-Panhuizen(2001a)이 사용한 용어이다.

활동을 통해 순수 수준의 수세기 능력이 더욱 발달된다.

이러한 수세기 활동은 2학년 이후로도 계속되는데, 임의의 수에서 시작하여 앞뒤로 세기, 10씩 뛰어 세기, 수직선 위에서 뛰어 세기를 통해 유연한 세기를 다루며 수모형 등을 활용하여 구조화에 기초한 세기를 강조하는데, 이는 뒤에서 살펴볼 구조화로 연결된다.

이러한 두 가지 측면의 수세기의 강조는 농도수와 순서수 개념을 기초로 하는 것으로 수 개념을 더욱 강화할 뿐만 아니라 연산 과정에서도 농도수와 순서수를 바탕으로 한 연산이 이루어지기 위한 기초 단계로 중요하다고 할 수 있다.

나. 수와 연산의 의미를 강조하는 상황화

수는 일상 세계에서나 수학적 세계에서 다양한 형태로 나타나며, 학생들에게 수는 자신이 접하는 상황만큼이나 다양한 의미를 가지게 된다. 일반적으로 이러한 수의 의미를 농도수, 순서수, 측정수, 명명수, 계산수(Freudenthal, 1983)로 구분하지만, 학생들에게 이러한 의미를 충분히 경험시키기 위해서는 학생들이 성장하면서 더 많은 상황에 접하게 할 필요가 있다. 상황화(contextualization)는 수 개념, 수 관계, 연산을 현실 상황과 관련하여 다루는 것을 의미한다.

Pluspunt 교과서에서는 앞에서 기술한 바와 같이 다양한 현실 상황의 주제를 중심으로 단원이 구성되므로, 각 상황에서 수나 연산이 사용되는 다양한 상황을 제공함으로써 1학년에서 6학년에 이르기까지 수와 연산의 의미가 지속적으로 다루어진다. [그림 Ⅲ-2]에서는 1학년과 2학년 교과서의 현실 상황에서 사용되는 농도수, 순서수, 측정수, 명명수, 계산수 등을 살펴볼 수 있다.

[그림 Ⅲ-2] 1, 2학년 교과서에 제시된 수의 상황화의 예 (Pap, et al., 2003a: 6, 9; Munsterman & de Weerd-Fourdraine, 2003a: 2)

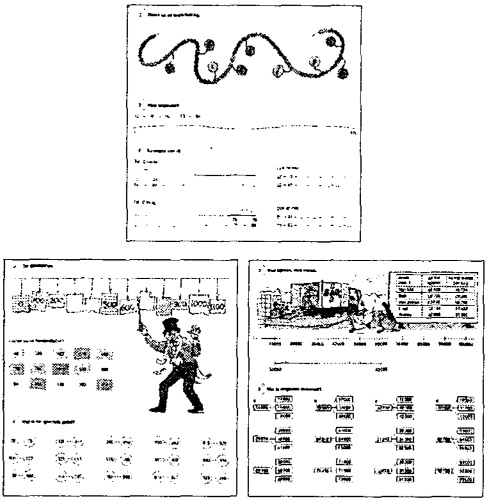
이러한 상황화는 수 개념뿐만 아니라 연산에서도 중요한 역할을 하는데, 주어진 상황에 적절한 전략을 생각해 내고 이를 단축해서 표준 알고리즘에 접근하는 데 결정적인 역할을 한다. 이에 대해서는 수준에 기초한 점진적인 알고리즘화 부분에서 살펴보고자 한다.

다. 수의 상대적 크기를 강조하는 위치화

위치화(positioning)는 수열이나 수직선 위에 어떤 수가 대응되는 위치를 나타내는 것을 의미한다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001a: 101). 이는 수를 세거나, 배열하고, 비교하는 기초 활동과 관련되며, 이를 통해 학생들은 위치를 나타내어야 할 수의 상대적인 크기를 파악할 수 있다.

Pluspunt 교과서에서는 초등학교 1학년부터 초등학교 6학년까지 위치화를 강조하고 있는데, [그림 Ⅲ-3]은 2학년에서 100까지의 수를 구슬줄 위에서 찾는 활동과 100까지의 빈 수직선 위에 50, 98, 10, 53, 90을 대략적으로 나타

내는 활동, 3학년에서 1000까지의 수를 다루면서 세 자리의 수들을 수직선 위에 걸린 카드 중간에 대략적으로 나타내는 활동, 4학년에서 100000만까지의 수직선 위에 다양한 수들을 나타내는 활동의 예이다.



[그림 Ⅲ-3] 2, 3, 4학년 교과서에 제시된 위치화의 예 (Munsterman & de Weerd-Fourdraine, 2003a: 55; van Gool et al., 2003a: 5; Groen, et al. 2003a: 39)

이러한 위치화 활동은 학생들에게 수의 상대적인 크기를 인식하게 함으로써, 수의 중요한 측면인 비의 개념을 준비하기 위한 단계로 볼 수 있다.

라. 수의 구조를 강조하는 구조화

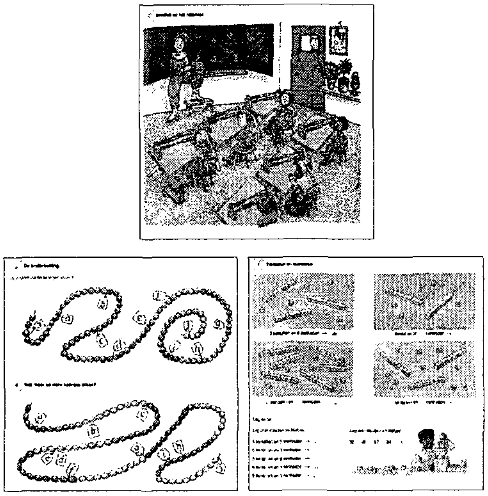
구조화(structuring)는 십진기수법, 다른 수들과의 관계, 수의 시각화, 특별한 구조적 특징을 바탕으로 수를 분석하는 것을 의미한다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001a: 109-117). 초등학교에서 다룰 수 있는 구조화의 예로 십진법 분해, 다양한 방법의 분해, 다른 진법으로의 분해, 인수분해 등을 생각해 볼 수 있다. 예를 들면 24를 십진법으로 분해하면 십 모형 두 개와 낱개 모형 4개로 표현하거나 수직선 위에서 10씩 두 번, 4를 한 번 뛰어 세거나 20씩 한 번 4를 한 번 뛰어 세거나 할 수 있는데, 이를 식으로 나타내면 $(2\times10)+4$ 또는 $20+4$와 같이 분해할 수 있고, 24의 인수분해를 구구단과 관련하여 생각해 보면 $24=1\times24=2\times12=3\times8=4\times6$이므로 여러 구구단에서 찾아볼 수 있으며, 23, 24, 25는 구구단과 관련해 보면 서로 다른 특성들을 가지는데, 23은 구구단에 없고, 24는 여러 구구단에 있고 25는 하나의 구구단에서만 찾아볼 수 있다. 이러한 구조화는 기초적인 수론, 즉 약수와 배수, 소수, 합성수, 제곱수 등으로 확장될 수 있다.

Pluspunt 교과서에서는 이러한 수의 구조적 측면을 강조하고 있는데, 1학년에서 5학년까지 십진법 구조의 강조와 더불어 6학년에서는 이집트 기수법을 다루고 있고, 수와 수관계와 관련하여 연산을 지도할 때 다양한 성질과 전략을 지도하는 과정에서 수의 분해나 인수분해와 관련된 내용을 다룸으로써 수의 구조적 측면은 더욱 강화된다.

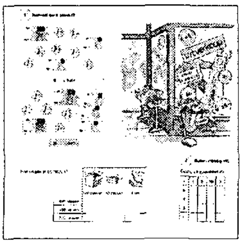
십진법 구조와 관련해서는 수모형, 산가지, 화폐 등의 묶음 모델, 구슬줄, 수직선 등의 직선 모델, 20주판, 100주판, 백 수열표 등의 복합 모델을 이용한 수의 표현, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 관련된 수의 분해와 합성, 이후로 2, 5, 10, 20, 100 등을 기본 단위로 묶음을 만들거나 두 배 또는 일반적으로 몇 배의 구조를 파악하는 것 등이 이에 해당된다.

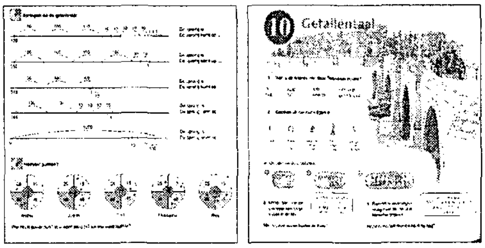
이를 구체적으로 살펴보면 [그림 Ⅲ-4]와 같이 1학년에서는 20주판 등의 복합 모델 위에 수를 표현하며, 2학년에서는 수모형, 구슬줄, 주판 등의 묶음 모델, 직선 모델, 복합 모델을 도입하여 수를 표현하며, 3학년에서는 [그림 Ⅲ-5]와 같이 100단위, 10단위 등의 상품포장을 활용하여 수를 나타내거나 화폐를 이용하여 자리값을 강조하며, 수직선 위에서 100, 10, 1씩 뛰어

세기를 강조하며, 2, 5, 10씩 뛰어 세기 등을 강조한다. 4학년에서는 $8436 = 8000 + 400 + 30 + 6$과 같이 수를 1000, 100, 10, 1을 단위로 분해하거나 93864, 40308, 89215, 78532, 57823에서 각각 8의 값이 얼마인가?(Groen, et al., 2003a: 45)를 물어봄으로써 자리값의 의미를 강조하며, 312422를 100000, 10000, 1000, 100, 10, 1씩 뛰어 세어 수직선 위에 나타내도록 하는 등의 활동을 제시하며, 5학년과 6학년에서는 소수와 분수를 수직선 위에 나타내는 활동 등을 통해 십진기수법의 구조화가 계속 이루어지며, 6학년에서는 [그림 Ⅲ-5]와 같이 이집트의 기수법과 이진법을 다루면서, 지금까지 학습한 십진기수법의 구조에 대한 전반적인 반성이 이루어진다.



[그림 Ⅲ-4] 1, 2학년 교과서에 제시된 구조화의 예 (Pap, et al., 2003: 75; Munsterman & de Weerd-Fourdraine, 2003; 33, 44)





[그림 Ⅲ-5] 3, 6학년 교과서에 제시된 구조화의 예 (van Gool, et al., 2003a: 48, 2003d: 20; Boersma, et al., 2003a: 110)

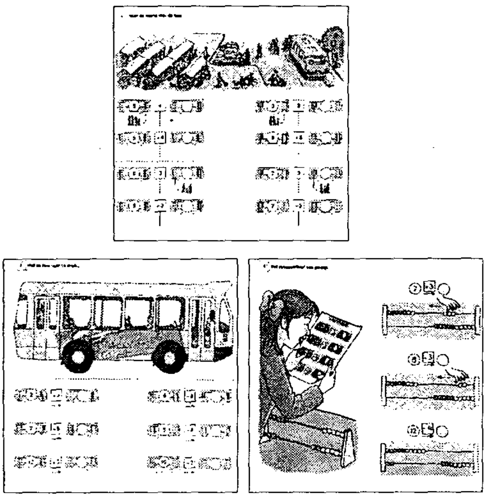
마. 수준에 기초한 점진적인 알고리즘화

네덜란드의 초등 교육과정에서는 핵심 목표에서도 나타났듯이 표준 알고리즘뿐만 아니라 대안적인 연산을 중시하고 있는데, Pluspunt 교과서의 자연수와 연산 영역의 지도 과정은 학생들의 비형식적인 다양한 암산 전략을 시작으로 세로 계산을 거쳐 표준 알고리즘에 접근하고 있다. 이에 대해 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈으로 구분하여 살펴보고자 한다.

1) 덧셈과 뺄셈

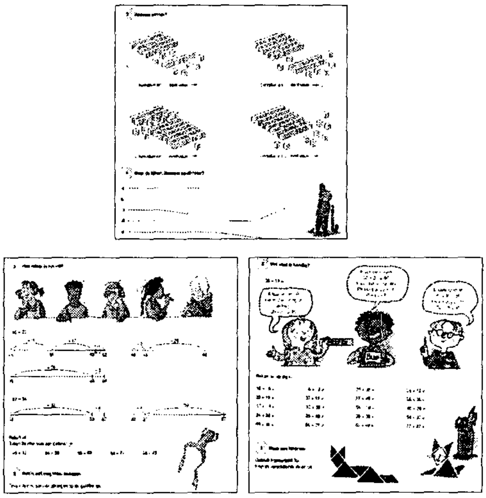
덧셈과 뺄셈 지도에 있어서는 유치원 1, 2학년과 초등학교 1학년에서 다루어지는 수세기가 중요한 기초 활동이 되며, 학생들의 암산 과정은 수세기 수준의 마지막 수준인 순수 수준을 출발점으로 세기 수준, 구조 수준, 형식 수준으로 이루어지는 것이 특징이다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001a: 47-51, 66-72). 세기 수준은 수를 일일이 세어 답을 구하는 수준이고, 구조 수준은 묶음 모델, 직선 모델, 복합 모델 등을 이용하여 수에 대한 시각적 이미지를 구성하여 답을 구하는 수준이며, 형식 수준은 시각적 이미지의 도움 없이 수와 수관계를 이용하여 계산하면서 필요한 중간 단계를 적는 수준이라 할 수 있다. 이 때 구조화 수준에서는 분해 전략과 연속 전략이 중요하며, 형식적 수준에서는 더 다양한 전략을 생각할 수 있다.

1학년에서는 수의 분해와 합성을 먼저 다룬 후에 세기 수준과 구조 수준에서 덧셈과 뺄셈을 지도하는데, 버스에 승객이 승하차하는 상황에서 버스 모델, 화살표 기호 등을 사용하다가 등호는 조금 나중에 도입한다. 세기 수준에서는 [그림 Ⅲ-6]과 같이 버스 상황에서 덧셈과 뺄셈을 시작하는데 처음에는 사람들이 타고 내리는 모습을 보고, 그 다음은 타고 내린 사람의 그림 없이 버스 모델만으로, 그 다음은 구조 수준으로 버스 모델을 주판 위로 옮겨서 화살표 기호를 같이 사용하고, 그 다음은 등호를 사용하여 식을 나타내도록 지도한다. 또한 20 주판 등을 이용하여 계산하면서 10보다 작은 수를 분해하기, 10을 채우기, 10과 20 사이의 수를 10을 기준으로 분해하고, 5와 10 사이의 수를 5를 기준으로 분해하는 등의 전략을 사용한다. 그 외에도 6+6과 같은 두 배 전략, 7+7=14를 이용해서 7+8이나 6+7을 계산하는 하나 더·하나 덜 전략, 교환 법칙의 사용, 알고 있는 결과를 사용하기, 10의 구조나 5의 구조를 사용하기 전략 등 다양한 전략을 지도한다(Pap, et al., 2003a; 2003b: 9-15).



[그림 Ⅲ-6] 1학년 교과서에 제시된 덧셈과 뺄셈을 위한 버스 모델
(Pap, et al., 2003a: 53, 54, 70)

2학년에서는 다양한 상황을 통해 100까지의 계산을 세기 수준, 구조 수준, 형식 수준에 따라 지도하며, 구조 수준에서는 연속 전략, 분해 전략, 형식 수준에서는 변화 전략, 교환법칙, 결합법칙 등 다양한 전략과 자신의 방법대로 계산하도록 한다. [그림 Ⅲ-7]과 같이 연속 전략은 두 수를 더하거나 뺄 때 처음 수는 그대로 두고 두 번째 수를 몇 번에 나누어 계속 더하거나 빼는 것을 말하며, 분해 전략은 두 수를 각각 십의 자리와 일의 자리로 나눈 다음 십의 자리끼리 일의 자리끼리 더한 다음 마지막에 이 두 결과들을 더하거나 빼는 것을 말하고, 변화 전략은 계산하기 쉬운 수로 바꾸어 더하거나 빼는 것을 말한다(Munsterman & de Weerd-Fourdraine, 2003a; 2003b: 9-14).

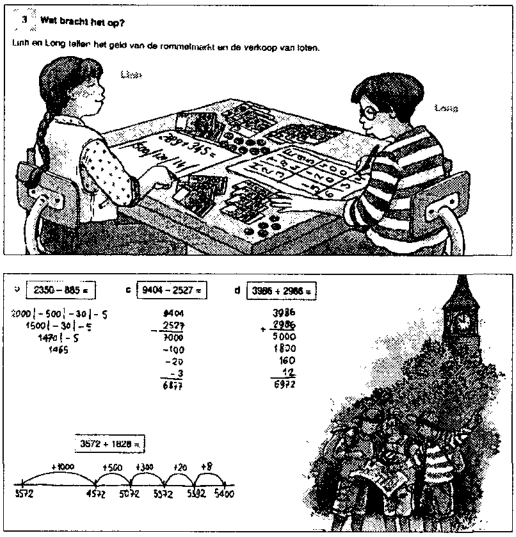


[그림 Ⅲ-7] 2학년 교과서의 분해 전략, 연속 전략, 변화 전략의 예
(Munsterman & de Weerd-Fourdraine, 2003a: 61, 69, 127)

3학년에서는 화폐 상황이 중요한 역할을 하면서 2학년과 마찬가지로 구조 수준에서 연속 전략, 분해 전략, 형식 수준에서는 변화 전략 등 다양한 전략이 다루어지며, 특히 세로 계산이 처음 도입된다. 세로 덧셈과 세로 뺄셈은 [그림 Ⅲ-8]과 같이 백의 자리, 십의 자리, 일

의 자리의 순으로 자리값을 고려해서 세로로 계산하는 것을 의미하며, 이 때 분해 전략을 이용하여 중간에 줄을 그어 나타내는 방법과 자리값판을 이용한 세로 계산 방법을 비교하게 하고 있다(van Gool, et al., 2003a, 2003b: 9-14).

4학년에서도 [그림 Ⅲ-8]과 같이 형식 수준에서 다양한 전략으로 계산하게 하며, 세로 덧셈과 세로 뺄셈을 더욱 강조하면서, 3학년에 도입한 세로 계산을 4학년에서는 더욱 단축하여 점진적으로 중간의 줄들을 쓰지 않게 함으로써 표준 알고리즘에 가까이 가게 지도하고 있다. 또한 이 때 자리값을 중시하는 왼쪽에서 오른쪽으로 계산하는 방법과 단축을 가능하게 하는 오른쪽에서 왼쪽으로 계산하는 방법을 선택하게 할 것을 권장하고 있다(Groen, et al., 2003a, 2003b: 11-15).



[그림 Ⅲ-8] 3, 4학년의 세로 덧셈, 세로 뺄셈의 도입 (van Gool, et al., 2003a: 117; Groen, et al., 2003a: 73)

5학년과 6학년에서는 다양한 상황에서 자신의 전략을 선택해서 계산하도록 하며, 범자연수와 연산에 관련된 내용을 소수와 분수로 연결한다.

2) 곱셈과 나눗셈

곱셈과 나눗셈 지도는 학생들의 다양한 전략을 출발점으로 세로 계산으로 접근하고 있다. 또한 학생들의 다양한 전략 지도는 덧셈, 뺄셈과 마찬가지로 수세기 수준, 구조화 수준, 형식적 수준으로 나눌 수 있다. 수세기 수준은 곱셈의 경우는 반복 덧셈, 나눗셈의 경우는 반복 뺄셈을 의미하고, 구조화 수준은 여러 가지 시각적 모델을 사용하여 반복 덧셈이 아니라 기준이 되는 묶음을 기초로 계산하는 것을 의미하며, 형식적 수준은 시각적 모델이 사라지고 수와 연산의 여러 가지 성질을 활용하여 계산하는 수준을 말한다. 예를 들면 8×6을 계산할 때 수세기에 기초한 수준은 8을 여섯 번 더하는 것이고, 구조화에 기초한 수준은 8×5를 이용하여 8을 한 번 더 더하거나 직사각형 모델을 기초로 교환법칙을 사용하거나 배열을 적절히 분해하여 $5\times6+3\times6$과 같이 분배법칙을 사용하는 것을 생각해볼 수 있고, $8\times6=4\times12=4\times6+4\times6=4\times10+4\times2$와 같이 수와 수관계를 적절히 활용하는 유연한 계산을 의미한다.

이러한 곱셈과 나눗셈의 수준을 수세기, 덧셈과 뺄셈 수준과 연결해서 생각하면 [그림 Ⅲ-9]와 같이 나타낼 수 있다.

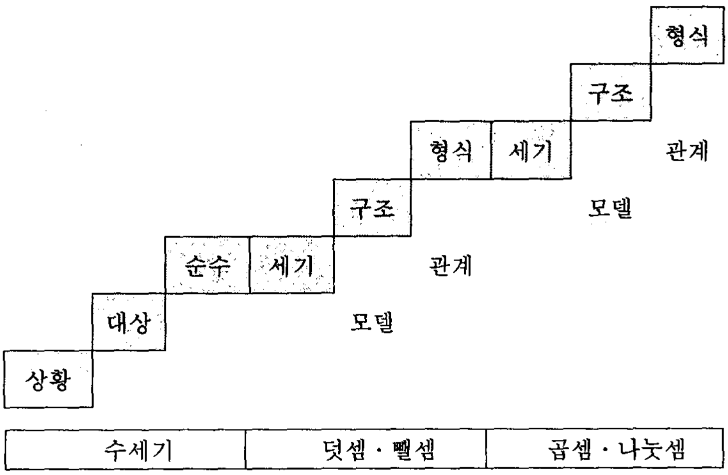
곱셈은 1학년에서 물체의 배열을 통한 준비단계를 거쳐 2학년에 본격적으로 도입된다. 곱셈과 관련해서 지도되는 전략은 교환법칙, 두 배 전략, 이등분 전략, 하나 더 · 하나 덜 전략이며, 학생들은 이러한 전략을 이용해서 새로운 곱셈을 빠르고 유연하게 계산한다. 이 때 사용되는 모델은 묶음 모델, 직선 모델, 복합 모델이다. 이러한 전략들을 이용하여 1, 2, 10, 5, 3, 4와 나머지 구구단을 도입한다. 나눗셈의

경우는 그 개념만 가볍게 도입된다(Munsterman & de Weerd-Fourdraine, 2003a, 2003b: 15-18).

3학년에서는 2학년에 이어서 6, 9, 8, 7단을 다루는데, 이는 이미 배운 전략과 구구단을 이용하여 구성해 나간다. 예를 들면 9단은 10단에 하나 더 하나 덜 전략을 사용하여 만들며, 8단은 4단에 두 배 전략 등을 사용하여 만들며, 7단은 [그림 Ⅲ-10]과 같이 7×5를 5×7을 이용하거나 7×10을 이등분 전략을 적용하여 찾아나가고, 그 외에는 교환법칙이나 여러 가지 전략을 사용하여 지도하도록 지도서에 제시하고 있다(van Gool, et al., 2003c: 274). 그 외에 큰 수로 곱하는 경우는 분배법칙, 10의 곱셈, 두 배나 이등분 전략을 사용하도록 하고 있다. 또한 곱셈의 한 예로 몇 가지의 종류로 옷을 입을 수 있는지를 구하는 조합 문제를 제시하고 있다. 3학년에서는 나눗셈이 공식적으로 도입되는데, [그림 Ⅲ-10]과 같이 포함제, 등분제, 곱셈의 역으로서의 의미를 지도한다(van Gool, et al., 2003a, 2003b: 15-21).

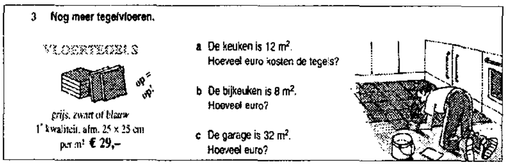
[그림 Ⅲ-10] 3학년 교과서의 구구단 지도와 나눗셈 개념 도입
(van Gool, et al., 2003a: 68, 8, 95)

4학년에서는 3학년에 이어 더 다양한 곱셈 전략을 사용할 기회를 제공하는데, 구구단, 4×3=12를 이용하여 4×300을 계산하는 유추 전략, 교환법칙, 두 배 전략, 이등분 전략, 하나 더·하나 덜 전략, 분배법칙, 6×48을 6×50=300과 6×2=12를 이용하여 300-12=288로 계산하는 보상 전략 등 다양한 전략이



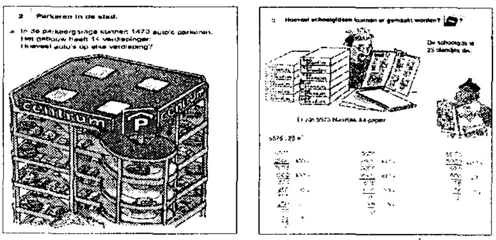
[그림 Ⅲ-9] 초등학교에서 수세기, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 수준

있다. 또한 3학년과 마찬가지로 조합 문제도 제시된다. 특히 4학년에서는 [그림 Ⅲ-11]에 제시된 부엌에 까는데 필요한 타일의 개수를 구하는 문제 상황에서 반복 덧셈을 이용한 세로 곱셈을 도입하도록 하고 있다. 이와 더불어 두 배 전략, 분배법칙 등 다양한 전략과 학생들 마음대로 단계를 단축, 10과 100을 이용하여 단축, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리를 각각 한 번에 곱하는 방법 등을 생각하도록 하고 있다. 나눗셈의 경우도 곱셈과 대응되는 다양한 전략과 곱셈과 나눗셈의 역 관계를 활용하게 하며, 나머지가 있는 나눗셈 문제의 해석을 강조하고 있다. 또한 [그림 Ⅲ-12]에 제시된 주차장 문제 상황에서 세로 나눗셈을 도입하도록 하고 있다(Groen, et al., 2003a, 2003b: 17-23).



[그림 Ⅲ-11] 4학년 교과서의 세로 곱셈의 도입(Groen, et al., 2003a: 57)

5학년에서는 4학년에 이어 유연한 계산과 어림을 강조하면서 다양한 곱셈, 나눗셈 전략을 사용하게 하며, 4학년에 도입된 세로 곱셈과 세로 나눗셈을 단축하도록 하고 있다. [그림 Ⅲ-12]는 학교 안내서를 만드는 상황에서 세로 나눗셈을 단축하는 예이다.

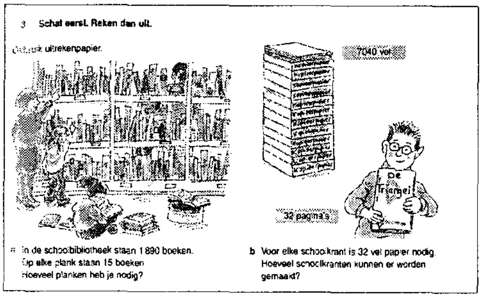


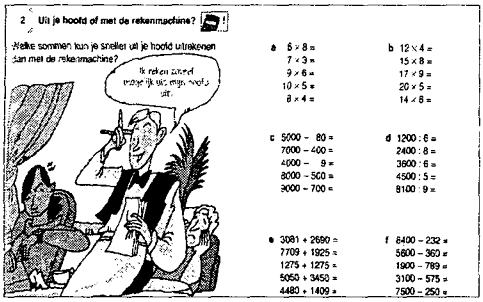
[그림 Ⅲ-12] 4학년 교과서의 세로 나눗셈의 도입과 5학년 교과서의 세로 나눗셈의 단축 (Groen, et al., 2003a: 105; Janssen, et al., 2003a: 15)

지금까지 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 지도 과정에 대해 살펴보았다. 이러한 연산 과정에서 상황의 역할은 다양한 전략을 생각하게 하는 근원이 되는 것인데, 세로 곱셈과 세로 나눗셈의 경우는 이전의 전략으로는 효과적이지 못하기 때문에 좀더 새로운 방법이 필요하다는 것을 인식시킴으로써 세로 계산의 필요성을 알게 할 뿐만 아니라 이를 단축하는 과정을 가능하게 한다. 또한 앞에서 설명한 것 외에도 연산에서 강조되고 있는 것은 자신의 풀이 과정을 설명하게 하는 것과 반복적인 연습과 생산적인 연습을 통해 기본적인 구구단과 계산을 자동화하고 암기하는 것이다.

바. 어림과 계산기의 적절한 사용

핵심 목표에서 살펴보았듯이 네덜란드 교육과정에서는 어림과 적절한 계산기의 사용을 강조하고 있다. Pluspunt 교과서에서 어림은 수 개념을 지도할 때나 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에서 모두 강조되고 있다. [그림 Ⅲ-13]은 나눗셈을 이용한 어림의 예이다. 계산기는 4학년에 도입하여 기초적인 기능을 습득한 후에 5학년과 6학년에서는 네 자리의 수나 다섯 자리의 수 이상을 계산할 때나 여러 다양한 문제를 해결할 때 사용하도록 하고 있다. [그림 Ⅲ-13]은 '어떤 문제를 해결하는 데 계산기를 사용하는 것이 좋을까?'를 묻는 문제이다.





[그림 Ⅲ-13] 5학년 교과서의 곱셈의 어림 문제와 6학년 교과서의 계산기 사용 문제
(Janssen, et al., 2003a: 25; Groen, et al., 2003a: 89)

지금까지 네덜란드 초등 교육과정의 자연수와 연산 영역의 지도 방법에 대해 살펴보았다. 이를 요약하면 수세기를 기초로 다양한 상황 속에서 수 개념과 연산의 의미를 강조할 뿐만 아니라 묶음 모델, 복합 모델, 직선 모델의 적절한 활용을 통하여 수의 구조적 측면과 상대적 크기를 강조하며 학생들의 비형식적인 전략에서 출발하여 단축 과정을 겪으면서 표준 알고리즘으로 점진적으로 이행한다는 것이다. 또한 표준 알고리즘에 접근하더라도 다양한 대안적인 전략들을 계속해서 사용할 수 있도록 반복적인 기회를 많이 제공한다고 할 수 있다.

Ⅳ. 초등 수학 교육과정과 교과서 개발을 위한 논의

이 장에서는 앞에서 살펴본 네덜란드 교육과정의 특징을 바탕으로 우리나라 초등 교육과정과 교과서 개발과 관련하여 몇 가지 논의할 문제에 대해 생각해 보고자 한다.

첫째, 수개념 지도와 관련해서 농도수와 순서수의 적절한 균형에 대해 생각해 볼 필요가 있다. 네덜란드의 교과서에서는 다양한 상황을 통해 수개념의 다양한 의미를 제공해줄 뿐 아니라 빈 수직선을 통해 수세기를 강조함으로써 농도수 뿐만 아니라 순서수를 특히 강조하고 있다. 우리나라의 경우 1학년에서 100까지의 수를 지도하면서 물건의 개수와 수의 순서에 대해 지도하지만, 2학년에는 세 자리 수를 도입하면서 농도수의 측면은 강조되는 반면 100씩, 10씩, 1씩 뛰어 세기 활동을 통해 수의 계열을 지도하는 활동만이 한 차시 지도되며, 3학년에는 10000까지의 수를 도입하면서 1씩 차이가 나는 몇 개의 수의 차례를 구하고 화폐 모형을 통해 뛰어 세기 활동이 한 차시 지도되며, 4학년에는 다섯 자리 이상의 수에 대해 뛰어 세기 활동이 한 차시 지도된다(교육 인적자원부, 2002a, 2002b, 2002c, 2002d, 2002e). 이를 보면 전반적으로 농도수의 지도에 비해 순서수의 지도는 미미한 편이다. 한편 뛰어 세기에 주로 사용되는 화폐 모형은 순서수의 측면을 드러내 주기에는 적합한 모델이 아니다. 즉, 화폐 모형은 묶음 모델로 순서수를 지도하기에는 효과적이지 않다는 것이다. 이에 대해 Treffers(1991: 137), Gravemeijer(1994: 120-127), Klein(1998: 8), Beishuizen(1999: 160-161), Sundermann과 Selter(2000: 122-125) 등은 수의 여러 가지 측면 중 서수는 묶음 모델과는 잘 맞지 않으며, 실제로 여행 거리와 같은 상황에는 묶음 모델이 적합하지 않고, 이는 직선 모델이 더 적합하며 빈 수직선은 이러한 기능을 충분히 갖추고 있음을 주장하고 있다. 한편, 화폐 모형을 활용하여 100씩, 10씩, 1씩 뛰어 세는 활동은 오히려 농도수의 개념을 강조하는 것이라 할 수 있다. 따라서 순서수의 지도를 위해서는 제 7차 교육과정에서 사용이 미미한 직선 모델을 좀더 적극적으로 활용하는 문제를 고려해볼 필요가 있다고 생각한다.

둘째, 수의 상대적 크기를 지도하는 것에 대해 생각해 볼 필요가 있다. 네덜란드 교과서에서는 어떤 수가 수직선 위에서 어디에 위치하

는지, 수열의 어디에 들어가는지와 관련된 활동을 통해 수의 위치화를 강조한다. 이 때 수직선은 고정된 단위를 갖는 것이 아니라 수의 범위가 커질수록 적절하게 변화하며, 이러한 단위의 변화에 따라 수의 상대적인 위치를 나타내는 것이다. 그러나 우리나라 교과서의 경우는 수학 1-나(교육 인적 자원부, 2002b)의 10이 되는 더하기와 빼기와 세 수의 계산에서 잠깐 수직선을 사용하는 정도일 뿐 수직선 위에 자연수의 위치를 나타내는 활동은 없다. Dewey와 McLellan(1895)은 수개념의 본질을 비로 보고 고정된 단위에 의한 수의 지도를 비판하면서, 측정에 의한 수의 지도를 주장하였지만, 측정에 의한 수개념의 본질적인 측면이 단위에 대한 수의 상대적인 크기라는 점을 고려한다면, 작은 범위의 수이든, 큰 범위의 수이든 수직선의 단위를 자유롭게 변화시키면서 그 위에 수를 나타내는 활동은 수의 중요한 측면의 하나인 비의 개념을 지도하기 위한 기초 활동이 될 것이라 생각한다.

셋째, 다양한 연산 전략의 지도에 관해 생각해 볼 필요가 있다. 제 7차 교육과정의 경우 '여러 가지 방법'이라는 이름으로 1-나 단계부터 3-가 단계까지 덧셈과 뺄셈에 대해서는 표준 알고리즘 외에 다양한 전략을 제공하고 있다. 반면 네덜란드의 경우에는 전반적으로 수세기와 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 대한 유연성을 강조하면서, 덧셈과 뺄셈뿐만 아니라 곱셈과 나눗셈에 대해서도 다양한 암산 전략을 강조하고 있다. Verschaffel과 De Corte(1996: 104)가 1990년대 이후로 자연수와 연산 영역에서 "가장 현저한 변화는 표준 알고리즘의 완전하고 자동화된 숙달을 덜 강조하고, 암산, 어림, 계산기, 컴퓨터 사용과 같은 다른 계산 절차에 관심이 증가하고 있다."고 말한 바와 같이 대안적인 절차와 더불어 다양한 전략의 지도를 강조하는 것은 세계적인 동향이라 할 수 있다. 따라서 현재 우리나라에서 지도되고 있는 덧셈과 뺄셈에 대한 여러 가지 방법의 효율성에 대한 검증과 더불어 곱셈과 나눗셈에 대한 다양한 전략의 도입을 고려해볼 필요가 있다.

넷째, 자연수와 연산 지도를 위한 교수학적 모델의 활용에 관한 문제를 생각해 볼 필요가 있다. 앞에서도 언급한 바와 같이 자연수와 연산 지도를 위한 교수학적 모델은 묶음 모델, 직선 모델, 복합 모델로 구분할 수 있는데, 이는 각각 농도수, 순서수, 농도수와 순서수를 기초로 하는 모델들이다. 물론 이러한 모델을 어떻게 활용하는지에 따라 모델의 효과는 달라질 수 있겠지만, 여러 연구자들은 한 가지 모델로는 자연수와 연산 영역을 지도하는 데 여러 가지 제한점이 있을 수 있음을 주장하고 있다. 예를 들면 Beishuizen(1999: 157)에 의하면 수모형은 딘즈의 산술 블록을 사용하는 데서 비롯되었는데, 교사들은 학생들이 이 모델에 너무나 오래 동안 매달려 있을 뿐만 아니라 계산할 때 수 모형들을 보고 수동적으로 답을 읽어 내는 것을 관찰하였으며, 이러한 수 모형들은 추상적인 수의 구조, 즉 위치기수법을 표현하는 데는 도움이 되지만, 수가 복잡해지면 학생들의 암산 전략을 나타내는 데는 어려운 점이 많다고 주장한다. 반면 Hötker와 Selter(2000: 123-124)는 특히 저학년의 경우 수직선은 양과 관련된 상황에서 사용된다면 학생들에게 상당히 어려움이 많은데, 학생들의 일상적인 상황이 추상적인 표현을 통해서 시각화되기 어렵기 때문이라고 주장한다. 예를 들면, '구슬 5개와 구슬 3개를 합하면 몇 개인가?'와 같은 문제에서 수직선 모델을 사용한다면, 학생들은 구슬이 양이라는 것에서 벗어날 수 없기 때문에, 직선 형태로 표시된 추상적인 직선 위에 표시

된 눈금에 대응시켜서 생각하기가 쉽지 않다는 것이다. 우리나라의 경우 자연수와 연산 영역에서 사용되는 교수학적 모델은 산가지, 수모형, 화폐모형, 자리값판 등의 묶음 모델이 대부분이고 수배열표가 사용되기는 하지만 많지는 않으며, 앞에서도 언급하였지만 수직선은 거의 사용하지 않는다(교육 인적 자원부, 2002b, 2002c, 2002d, 2002e). 또한 화폐 모형의 경우는 수를 표현하는 데는 사용되지만, 연산을 하는 경우에는 거의 사용되지 않는다. 실제로 화폐 모형은 학생들에게 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수와 같이 큰 자리의 수부터 계산할 수 있는 방법을 쉽게 생각해내는 데 도움을 줄 수 있는 좋은 모델임에도 불구하고, 우리나라의 경우에는 연산을 위한 모델로는 사용되지 않는다, 또한 수배열표를 포함한 복합 모델도 규칙 찾기나 수의 순서를 학습하는 데 사용될 뿐 연산을 지도하는 데는 거의 사용되지 않는다. 앞에서 언급한 다양한 전략의 지도를 위해서는 지금처럼 묶음 모델에만 치중할 것이 아니라 좀더 다양한 모델을 효과적으로 사용하는 방법에 대한 논의가 필요하다고 생각한다.

본 논문에서는 최근 국내외의 관심의 대상이 되고 있는 RME에 기초한 초등 수학교육의 모습은 어떤지에 대해 핵심 목표, 네덜란드의 교과서, TAL이 제안하는 학습 교수 경로를 중심으로 살펴보고, 이에 따라 논의해야 할 문제들을 제기하였다. 한 나라의 교육과정과 교과서를 개정하는 일은 여러 가지 변수를 포함한 매우 복잡한 일이다. 앞에서 살펴본 바와 같이 초등 수학 교육과정에서 가장 기초적으로 보이는 자연수와 연산 영역에 대해서도 고려해야 할 측면이 매우 많다. 따라서 본 논문에서 살펴본 내용들이 앞으로의 교육과정과 교과서 개발을 위한 참고 자료가 되기를 기대한다.

참고문헌

교육 인적 자원부(2002a). **수학 1-가**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

________(2002b). **수학 1-나**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

________(2002c). **수학 2-가**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

________(2002d). **수학 3-가**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

________(2002e). **수학 4-가**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

Abels, M. et al. (1992). *Achtergronden van the nieuwe leerplan Wiskunde 12-16 Band 1*. Utrecht: Freudenthal Instituut/SLO.

Beishuizen, M. (1999). The empty number line as a new model. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 157-168). Buckingham: University Press.

Boersma, G., van Gool, A., Groen, J., van der Straaten, H., & de Weerd-Fourdraine, A. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 8*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 8A*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.

Dewey, J. & McLellan, J. A. (1895). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. New York: D. Appleton Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H., Janssen, G. M., & Sweers,

W. J. (Eds.) (1976). Five Years IOWO. *Educational Studies in Mathematics, 7*(3), 187-367.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD β Press.

Groen, J., Rouvroye, R., van de Straaten, H., & de Weerd-Fourdraine, A. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 6.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 6.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 6A.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

Höhtker, B. & Selter, Ch. (2000). Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl -Orientierungsübungen im Hunderterraum. In G. H. Müller, & E. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen*(pp. 122-137). Frankfurt am Main: Arbeits Grundschule-Der Grundschulverband-e.V.

Janssen, D., Munsterman, B., & Rouvroye, R. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 7.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 7A.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

Klein, T. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base: The empty line in a realistic versus gradual program design.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Munsterman, B., & de Weerd-Fourdraine, A. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 4.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 4.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 4A.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

Pap, W., Janssen, D., & Pap, L. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 3.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 3.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 3A.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

Sundermann, B., und Selter, Ch. (2000). Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen. In Müller, G. H., & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen*(pp. 165-178). Frankfurt am Main: Arbeiskreis Grundschule-Der Grundschulverband-e.V.

Treffers, A. (1987). *Three dimension, a model of goal and theory description in mathematics instruction-The Wiskobas Project.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

________(1991). Didactical background of a mathematics program for primary education, In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 21-57). Utrecht: CD β Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001a). *Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school.* Utrecht/ Enschede: Freudenthal Institute/SLO.

________(2001b). A learning-teaching trajectory description as a hold for mathematics teaching in primary schools in the Netherlands. In M. Tzekaki(Ed.), *Didactics of Mathematics and Informatics in Education. 5th Panhellenic Conference with International Participation* (pp. 21-39). Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki/ University of Macedonia/ Pedagogical Institute.

Van Gool, A., Janssen, D., & Munsterman, B. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 5.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 5.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

________(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 5A.* 's-Heterogenbosch: Malmberg.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. In A. J. Bishop (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 99-137). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Reflections on the Primary School Mathematics Curriculum in the Netherlands
- Focused on Number and Operations Strand -

Chong, Yeong Ok (Gyeongin National University of Education)

The study aims to get real picture of primary mathematics education based on RME in the Netherlands focusing on number and operations strand by reflecting and analyzing the documents in relation to the primary school mathematics curriculum.

In order to attain these purposes, the present paper describes the core goals for mathematics education, Dutch Pluspunt text-book series for the primary school, and a learning-teaching trajectory by TAL project which are determinants of the Dutch primary school mathematics curriculum.

Under these reflections on the documents, it is analyzed what is the characteristics of number and operations strand in the Nether-lands as follows: counting numbers, con-textualization, positioning, structuring, pro-gressive algoritmization based on levels, estimation and insightful use of a calculator.

Finally, discussing points for improving our primary mathematics curriculum and textbook series development are described.

* key words : realistic mathematics education(현실적 수학교육), counting numbers(수세기), contextualization(상황화), positioning(위치화), structuring(구조화), progressive algoritmization(점진적 알고리즘화), mathematics curriculum(수학 교육과정), didactic model(교수학적 모델)

논문접수 : 2005. 11. 1
심사완료 : 2005. 12. 2