대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.4, 319-336. Dec 2005

디피 활동에서의 수학적 추측과 발견

강 문 봉*

이 연구는 디피가 가지는 여러 가지 성질을 확인하고 디피 활동에서 제기될 수 있는 문제와 추측을 탐구하려는 것이다. 디피는 간단한 뺄셈 활동이지만 여러 가지 수학적 사고가 일어날 수 있는 장이 된다고 생각한다.

연구자는 디피 활동에서 제기될 수 있는 여러 가지 문제와 추측을 제시하고, 엑셀과 연구자가 직접 개발한 디피 프로그램을 활용하여 관련 문제를 해결하고 추측을 검사하였으며 관련 자료를 제시하였다. 이 연구에서 제시된 탐구 문제와 자료 및 결과는 초등학교의 일반 학생은 물론 영재 학생에게 수학적 사고 활동을 위한 좋은 자료로 역할을 하리라 기대한다.

Ⅰ. 서 론

세상은 변하고 있다. 최근의 변화 속도는 과거와 비교할 수 없을 정도로 빨라서, 학교에서 가르치는 수학 내용이 배우는 학생들이 성장한 미래 사회에서 유용할지 어떨지는 아무도 장담할 수 없다. 그러나 미래 사회에서는 새로운 변화에 적응하는 능력이 필요하며 그러한 능력 중의 하나가 수학적 사고 능력이라는 점은 대부분 공감할 것이다.

전통적인 교육과정에 포함되어 있는 수학적 지식이나 기능이 가치 있고 중요하다는 점은 교육의 오랜 역사가 입증한다. 수학의 계통성 역시 그러한 지식이나 기능의 가치를 지지한다고 할 수 있다. 그러나, 공학이 발달하고 정보화 시대가 된 현재는 물론 미래에는 그러한 지식이나 기능 못지않게, 어쩌면 그 이상으로 수학적 사고 능력이 더 요구된다고 할 것이다.

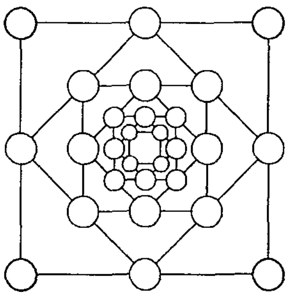
암기했던 지식은 도서관이 대신하고 인터넷이 검색해 주며, 기능은 계산기나 컴퓨터와 같은 공학이 상당 부분 대신해 줄 수 있는 반면, 수학적 사고 능력은 인간이 해야 할 몫이기 때문이다. 그러므로 현재와 미래의 수학교육은 수학적 지식이나 기능보다 수학적 사고와 태도를 더 강조하게 마련이다.

지금까지 수학적 사고에 대한 연구가 많았으며, 많은 교사들이 점점 수학적 사고 능력의 중요성을 인식하고 있다. 그럼에도 불구하고 교육 현장에서는 언제 무엇을 소재로 하여 어떻게 수학적 사고를 가르칠 것인가 하는 것이 문제가 되고 있다.

연구자는 2001년 인천교대 영재교육센터에서 디피(diffy) 활동을 지도한 후, 영재교육 지도교사들로부터 여러 번 디피 활동에 대한 자료를 요청받았다. 디피 활동은 간단하지만 재미있으면서도 수학적 사고 활동을 풍부하게 할 수 있는 소재가 될 수 있기 때문이다.

* 경인교육대학교(mbkang@ginue.ac.kr)

디피는 Herbert Wills가 1971년에 만든, 규칙이나 과정이 아주 간단한 게임이다. Willis가 만든 디피의 규칙은 [그림 Ⅰ-1]과 같은 정사각형의 각 꼭지점에 4개의 자연수를 쓰고, 각 변의 중간에 이웃한 두 수의 차를 쓰는데, 모두 0이 되기 전에 안의 6개의 정사각형을 채우면 이기는 것이다.



[그림 Ⅰ-1] 디피 판

Willis의 일차적인 목적은 뺄셈 연습을 시키려는 것이었던 것처럼, 디피는 많은 뺄셈 문제로 이루어져 있다. 디피(diffy)라는 이름 역시 차(difference)에서 나온 것이다.[1] 그러나 디피는 그가 지적하고 있듯이, 여러 가지 놀라운 성질과 탐구할 많은 문제를 가지고 있다. 학생들은 뺄셈을 해 나가는 과정에서 점차 무언가 있다는 느낌을 가지게 되고, 그래서 어떤 공통 성질을 찾기 위해 귀납하기도 하고 디피의 조건을 변경하면 어떤 결과가 될 것인지도 생각해 보게 되며 거꾸로 풀기 전략도 구사하고 연역적 사고도 하게 된다. 이와 같이 디피 활동은 여러 측면에서 수학교육적으로 가치가 있어 보인다. 그러나 디피에 대한 연구는 그리 많아 보이지 않는다. 사실, 웹에서 'diffy'를 검색어로 하여 많은 디피 자료를 얻을 수 있다. 그러나 그 대부분은 디피 결과를 확인하는 프로그램이거나 디피 프로그램의 소스들이며, 디피 활동에서 제기될 수 있는 추측이나 디피의 변형 활동에 대한 연구는 많지 않다.

이 연구는 디피 활동을 교실 수업에 적용하기에 앞서 디피가 가지는 여러 가지 성질을 탐구하고 디피에서 제기될 수 있는 몇 가지 문제를 해결하며 디피의 규칙을 변형한 새로운 활동에 대해서 탐구하는 것이다.

디피에서는 자연수뿐만 아니라 실수까지 사용할 수 있다.[2] 그러나 이 연구에서는 초등학생을 위한 디피 활동을 고려하고 있기 때문에 0 또는 자연수 범위에서 생각하기로 한다. 사실, 음의 정수가 사용된다고 하더라도 네 개의 수에 똑같은 수를 더하여 모두 자연수로 만들 수 있고 이 경우 똑같은 디피 활동이 이루어지게 된다. 또 분수일 경우 분모의 공배수를 곱해 유리수를 정수 또는 자연수로 변환할 수 있으므로, 0과 자연수 범위에서의 결과는 유리수 범위까지 일반화할 수 있다.

디피의 성질을 파악하기 위해 먼저 몇 가지 용어를 정의할 필요가 있다. 따라서 이 연구에서는 몇 가지 용어를 다음과 같이 정의하고 사용할 것이다.

1. 디피 발과 디피 머리

네 개의 수의 순서쌍 (a, b, c, d)가 있을 때 다음 네 수의 쌍 ($|a-b|$, $|b-c|$, $|c-d|$, $|d-a|$)를 순서쌍 (a, b, c, d)의 '디피 발'이라고 하고 F(a, b, c, d)라고 하자. (0, 0, 0, 0)이 될 때까지 디피 발을 계속 구하는 과정을 디피 활동이라고 하며, 디피 발이 (0, 0, 0, 0)이 되면

1) "diffy"는 "difficult", "differential", "different" 등에서 비롯된 속어이다. 실제로 웹에서 diffy를 검색어로 하여 검색하면 미분방정식에 관한 결과가 많이 검색된다. 이 연구에서의 diffy는 difference에서 나온 용어이다.
2) Clausing, McLean 등은 실수 범위에서 디피가 끝나는지에 대한 연구를 하였다.

'디피가 끝났다'고 말하기로 한다. 또 순서쌍 (a, b, c, d)를 $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$의 '디피 머리'라고 하고 $H(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$라고 하자. 예를 들어 F(1, 2, 5, 9)=(1, 3, 4, 8)이고, (1, 2, 5, 9)=H(1, 3, 4, 8)이다. 그러므로 어떤 순서쌍은 많은 다른 '디피 머리'를 가질 수 있다.

2. 디피 수

순서쌍 (a, b, c, d)가 $F^{n}(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$이고 $F^{n-1}(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$일 때 n을 (a, b, c, d)의 '디피 수'라고 정의하고 N(a, b, c, d)=n이라고 나타내자. 예를 들어

F(1, 2, 3, 4)=(1, 1, 1, 3), F(1, 1, 1, 3)=(0, 0, 2, 2), F(0, 0, 2, 2)=(0, 2, 0, 2)

F(0, 2, 0, 2)=(2, 2, 2, 2), F(2, 2, 2, 2)=(0, 0, 0, 0)

이므로 (1, 2, 3, 4)의 디피 수 N(1, 2, 3, 4)=5이다.

3. 디피적으로 동치

예를 들어, (1, 2, 4, 7)과 (3, 4, 6, 9)는 디피 발이 같다. 또, (1, 2, 4, 7)과 (2, 4, 7, 1)은 원소를 회전시킨 것 외에는 동일하며, (1, 2, 4, 7)과 (2, 4, 8, 14)는 각 원소를 두 배한 점을 제외하면 디피를 구하는 결과는 동일하다. 그러므로 다음과 같은 것을 모두 디피적으로 동치라고 하고 ≈로 나타내자. 즉,

① 이동 (a, b, c, d)≈(a+p, b+p, c+p, d+p)

② 확대 또는 축소 (a, b, c, d)≈(na, nb, nc, nd) ≈(a/n, b/n, c/n, d/n)

③ 회전 (a, b, c, d)≈(b, c, d, a)

④ 반사 (a, b, c, d)≈(d, c, b, a)

디피적으로 동치인 경우에 그 디피 수는 모두 같다는 사실은 쉽게 발견할 수 있다.

4. n수 디피

디피의 변형 활동으로 순서가 주어진 3쌍, 순서가 주어진 5쌍 등을 생각할 수 있다. 그러므로 순서 3쌍으로 된 디피를 3수 디피, 순서 4쌍으로 된 디피를 4수 디피와 같이 나타낸다. 그러나 4수 디피는 가장 일반적인 것이므로 4수 디피를 간단히 디피라고 하자.

II. 디피 활동에서의 문제 제기와 추측

디피 활동을 하면서 두 수의 차를 구하는 동안 학생들은 자연스럽게 여러 가지 문제를 제기하게 되고 추측을 하게 된다. 여기서는 그 중 대표적인 문제 또는 추측에 대해서 검토해 보자.

1. 디피는 항상 끝나는가?

몇 개의 순서쌍으로 디피 활동을 하다 보면 보통 4번이나 6번 이내로 끝나는 것을 보면서 놀라움과 함께 큰 수를 사용하면 디피 수가 더 클 것이라고 생각하게 된다. 그러나 막상 해보면 큰 수의 경우도 의외로 디피 수가 작음을 발견하게 된다. 그러면서 자연스럽게, 어떤 수를 사용하든 디피는 항상 끝날 것이라는 추측을 하거나 '디피는 항상 끝나는가?' 하는 의문을 가지게 된다. 이러한 의문을 해결해 보자.

0 또는 자연수의 순서쌍 (a, b, c, d)에서 a, b, c, d가 모두 0이 아닐 때 이 순서쌍의 디피 발 F(a, b, c, d)의 가장 큰 원소는 이 순서쌍의 가장 큰 원소보다 작다. 가장 큰 원소와 이웃한 수가 0일 때만 그 값이 같게 되며 디피 발의 가장 큰 수가 처음 순서쌍의 가장 큰 수보다 커지는 경우는 없다.

이제 가장 큰 수를 a라고 하고 이웃한 수 b=0이라고 하자. 그러면 F(a, b, c, d)=F(a, 0, c, d)=(a, c, $|c-d|$, a-d)이고 여기서 가장 큰 원소는 a이다. 이때 c가 0이 아니라면 이 순서쌍의 디피 발에서 가장 큰 원소는 더 작아지게 되고, 만약 c=0이라면 $F^2(a,b,c,d) = F^2(a,0,0,d)$ =F(a, 0, d, a-d)=(a, d, $|a-2d|$, d)이다. 이제 d가 0이 아니라고 하면 그 다음 디피 발에서의 가장 큰 원소는 더 작아지게 되며, d=0이라고 하면 F^3(a, b, c, d)=F(a, 0, a, 0)=(a, a, a, a)가 되고 이 디피 발 F(a, a, a, a)=(0, 0, 0, 0)이 된다.

그러므로 많아야 4회의 단계 후에는 가장 큰 원소가 작아지든가 디피가 끝나게 된다. 이렇게 해서 생긴 가장 큰 원소들의 수열 a_1, a_2, a_3, ...는 $a_1 > a_2 > a_3$의 관계가 있으므로 유한번의 과정을 거치게 되면 이 값은 0이 되게 된다. 그러므로 0 또는 자연수로 이루어진 순서쌍의 경우 디피는 항상 끝나게 됨을 알 수 있다.[3)]

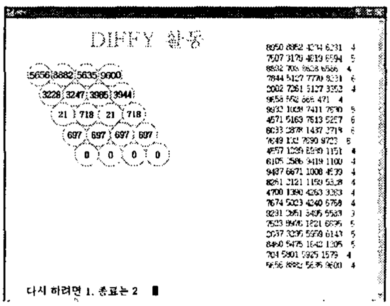
디피가 끝난다는 사실을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

자연수의 순서쌍 (a, b, c, d)의 디피 발을 적어도 4번 구하게 되면 그 원소는 모두 짝수가 된다는 사실은 쉽게 보일 수 있다. 그러므로 $4n$번째의 디피 발은 $2^n(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$가 되고 (a, b, c, d)의 가장 큰 원소를 a라고 할 때 2^n>a이면 $2^n(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$=(0, 0, 0, 0)가 되어야 한다. 그러므로 디피는 끝나게 된다.[4)]

2. 가장 큰 디피 수는 얼마인가?

4개의 유리수의 순서쌍의 디피 결과는 항상 끝난다는 사실을 알게 되었다. 그러면 디피 수는 많아야 얼마일까? 대부분의 경우 디피 수는 6 이하이다. 그러나 그 이상의 경우도 종종 발견된다. 앞의 증명에서 네 수의 순서쌍 A=(a, b, c, d)는 많아야 4× |A|회(단 |A|는 순서쌍에서 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 차) 만에 디피가 끝남을 알 수 있다.[5)] 그렇다고 해서 디피 수는 유한일까?

연구자는 가장 큰 디피 수를 찾기 위해 인터넷 자료를 조사해 보았으나 20 이상의 예를 찾을 수 없었다. 그래서 한국교육학술정보원에서 개발한 저작도구 PASS2000을 이용하여 디피 프로그램을 만들어서 디피 수를 조사하였다.[6)] [그림 Ⅱ-1]은 그 프로그램을 실행한 결과의 한 화면이다.



[그림 Ⅱ-1] 연구자가 개발한 디피 프로그램의 한 화면

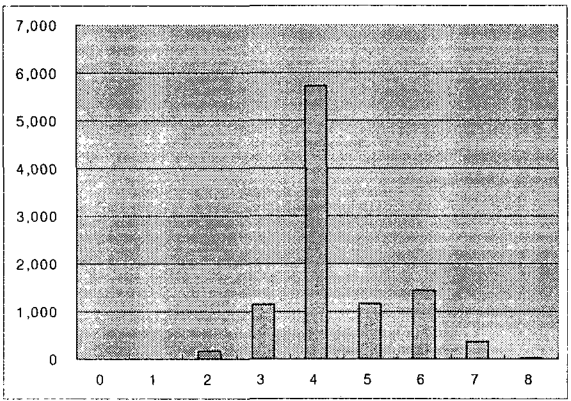
3) 이러한 증명은 Greenwell(1989), Clausing(2005)에 제시되어 있다.
4) 이 증명의 개요는 Clausing(2005)에 제시되어 있다.
5) Behn, A., Kribs-Zaleta, C., and Ponomarenko, V.는 디피 수는 |A|+3 이하이며, 더 엄격히 말하면 4(1+ $\log_2|A|$) 이하라고 말한다.
6) 이 프로그램은 사용자가 입력한 순서쌍의 디피 수를 구하고, 컴퓨터가 임의로 순서쌍을 출력하여 그 디피 수를 구하며, 주어진 순서쌍의 디피 머리를 구하는 기능과 주어진 수 범위에서 연구자가 원하는 디피 수를 가진 순서쌍을 출력하는 기능을 가지고 있다. 또한 지정된 수 범위에서 디피 수의 분포를 구할 수도 있다.
연구자는 이 프로그램에 오류가 있는지를 확인하기 위해 웹에 있는 A Mondo Spiffy Diffy Tester와 엑셀을 병행하여 많은 순서쌍을 비교 검사하였으며, 그 결과 연구자가 개발한 프로그램에 연산 오류가 없다는 점을 확신하였다.

0에서 9까지의 수를 사용한 4 수의 순서쌍의 경우 <표 Ⅱ-1>에서 알 수 있는 것과 같이 디피 수 8이 가장 큰 것으로 조사되었으며, 디피 수 8을 가지는 순서쌍은 16개였다. 그러므로 최고 디피 수의 빈도는 0.16%이다. 또, 디피 수의 평균은 4.36이었다. 한편 각 디피 수의 분포는 다음 [그림 Ⅱ-2]와 같다.

0에서 99까지의 수를 사용한 순서쌍의 경우에는 다음 <표 Ⅱ-2>에서 알 수 있는 것처럼 13이 가장 큰 디피 수인 것으로 조사되었고, 디피 수 13을 가지는 순서쌍은 2,704개였다.[7] 그러므로 최고 디피 수의 빈도는 0.0027%이다. 디피 수가 9 이상은 718,096개로서 그 빈도는 7.18%이다. 또, 디피 수의 평균은 4.89이었다.

<표 Ⅱ-1> 0에서 9까지의 수의 순서쌍의 디피 결과

첫수 \ 디피수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	합계
0	1	0	13	90	576	112	172	32	4	1,000
1	0	1	15	106	574	118	156	28	2	1,000
2	0	1	17	118	568	124	140	32	0	1,000
3	0	1	19	126	570	118	130	36	0	1,000
4	0	1	21	130	572	104	122	48	2	1,000
5	0	1	21	130	572	104	122	48	2	1,000
6	0	1	19	126	570	118	130	36	0	1,000
7	0	1	17	118	568	124	140	32	0	1,000
8	0	1	15	106	574	118	156	28	2	1,000
9	0	1	13	90	576	112	172	32	4	1,000
합	1	9	170	1,140	5,720	1,152	1,440	352	16	10,000



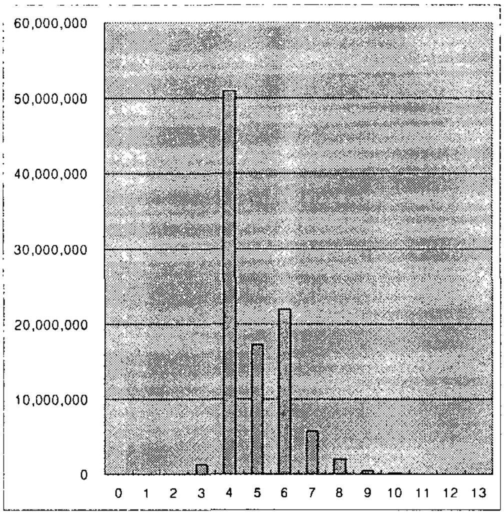
[그림 Ⅱ-2] 0에서 9까지의 수의 디피 분포

7) 이 자료는 연구자가 개발한 프로그램을 연구자의 펜티엄 노트북으로 300 시간 이상 가동하여 얻은 것이다. 그 중에서 첫 수가 50 이상인 경우는 생략하였다. 첫 번째 수가 n인 경우와 99-n인 경우 디피 수의 분포는 동일하기 때문이다. 다만, 전체 합은 첫 번째 수가 0에서 99까지의 전체를 의미한다.

<표 Ⅱ-2> 0에서 99까지의 수의 순서쌍의 디피 결과

첫수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	0	148	9,900	509,751	171,406	223,738	56,980	20,636	5,340	1,624	348	100	28
1	0	1	150	10,096	509,749	171,244	224,790	55,352	21,406	5,172	1,580	336	96	28
2	0	1	152	10,288	509,653	171,358	225,684	53,788	22,088	5,014	1,530	324	92	28
3	0	1	154	10,476	509,655	171,540	226,492	52,316	22,594	4,866	1,482	308	88	28
4	0	1	156	10,660	509,567	171,958	227,092	50,978	23,006	4,722	1,448	296	88	28
5	0	1	158	10,840	509,573	172,418	227,610	49,740	23,246	4,596	1,420	290	84	24
6	0	1	160	11,016	509,493	173,072	228,002	48,564	23,420	4,488	1,394	284	82	24
7	0	1	162	11,188	509,503	173,738	228,256	47,550	23,420	4,412	1,390	276	78	26
8	0	1	164	11,356	509,431	174,552	228,398	46,620	23,356	4,352	1,394	274	76	26
9	0	1	166	11,520	509,445	175,350	228,476	45,778	23,156	4,332	1,402	274	74	26
10	0	1	168	11,680	509,381	176,258	228,390	45,080	22,888	4,330	1,446	272	78	28
11	0	1	170	11,836	509,399	177,118	228,248	44,484	22,478	4,376	1,502	282	78	28
12	0	1	172	11,988	509,343	178,048	228,024	43,970	22,030	4,450	1,576	292	80	26
13	0	1	174	12,136	509,365	178,898	227,688	43,608	21,492	4,556	1,662	310	80	30
14	0	1	176	12,280	509,317	179,774	227,284	43,356	20,962	4,678	1,724	328	88	32
15	0	1	178	12,420	509,343	180,544	226,840	43,190	20,430	4,824	1,750	352	94	34
16	0	1	180	12,556	509,303	181,300	226,276	43,196	19,958	4,982	1,766	354	98	30
17	0	1	182	12,688	509,333	181,920	225,682	43,358	19,496	5,134	1,730	348	98	30
18	0	1	184	12,816	509,301	182,480	225,066	43,652	19,088	5,282	1,672	332	96	30
19	0	1	186	12,940	509,335	182,874	224,390	44,158	18,662	5,370	1,640	324	94	26
20	0	1	188	13,060	509,311	183,170	223,730	44,832	18,280	5,408	1,592	310	92	26
21	0	1	190	13,176	509,349	183,288	223,094	45,642	17,914	5,390	1,544	298	88	26
22	0	1	192	13,288	509,333	183,300	222,422	46,628	17,598	5,320	1,522	288	82	26
23	0	1	194	13,396	509,375	183,138	221,774	47,716	17,300	5,238	1,486	274	82	26
24	0	1	196	13,500	509,367	182,874	221,156	48,870	17,070	5,138	1,458	266	76	28
25	0	1	198	13,600	509,413	182,454	220,488	50,118	16,866	5,056	1,442	264	76	24
26	0	1	200	13,696	509,413	181,928	219,850	51,420	16,728	4,982	1,426	262	72	22
27	0	1	202	13,788	509,463	181,258	219,226	52,738	16,636	4,940	1,404	252	70	22
28	0	1	204	13,876	509,471	180,480	218,570	54,154	16,614	4,890	1,396	250	72	22
29	0	1	206	13,960	509,525	179,570	217,922	55,592	16,628	4,872	1,386	246	70	22
30	0	1	208	14,040	509,541	178,556	217,310	57,050	16,718	4,866	1,382	238	68	22
31	0	1	210	14,116	509,599	177,420	216,636	58,570	16,844	4,874	1,390	244	74	22
32	0	1	212	14,188	509,623	176,180	215,998	60,124	17,042	4,890	1,400	252	70	20
33	0	1	214	14,256	509,685	174,830	215,358	61,668	17,306	4,938	1,404	252	68	20
34	0	1	216	14,320	509,717	173,372	214,694	63,290	17,638	4,986	1,424	248	72	22
35	0	1	218	14,380	509,783	171,818	214,034	64,900	18,006	5,058	1,450	256	72	24
36	0	1	220	14,436	509,823	170,184	213,434	66,494	18,432	5,154	1,470	258	74	20
37	0	1	222	14,488	509,893	168,492	212,798	68,090	18,872	5,262	1,516	266	78	22
38	0	1	224	14,536	509,941	166,742	212,250	69,652	19,344	5,382	1,548	278	78	24
39	0	1	226	14,580	510,015	164,970	211,758	71,120	19,818	5,540	1,582	288	78	24
40	0	1	228	14,620	510,071	163,176	211,312	72,568	20,290	5,692	1,638	296	82	26
41	0	1	230	14,656	510,149	161,404	210,936	73,900	20,732	5,882	1,686	310	86	28
42	0	1	232	14,688	510,213	159,672	210,670	75,138	21,158	6,048	1,736	322	94	28
43	0	1	234	14,716	510,295	158,028	210,402	76,326	21,518	6,200	1,814	338	98	30
44	0	1	236	14,740	510,367	156,502	210,218	77,414	21,860	6,288	1,886	354	98	36
45	0	1	238	14,760	510,453	155,144	210,082	78,362	22,164	6,354	1,942	356	108	36
46	0	1	240	14,776	510,533	153,978	209,946	79,210	22,440	6,374	2,008	354	104	36
47	0	1	242	14,788	510,623	153,050	209,850	79,876	22,660	6,398	2,028	344	104	36
48	0	1	244	14,796	510,711	152,390	209,800	80,330	22,834	6,394	2,022	338	104	36
49	0	1	246	14,800	510,805	152,042	209,712	80,610	22,894	6,374	2,038	342	100	36
합	1	99	19700	1313400	50970200	17270520	21983712	5716240	2008032	518928	158304	29696	8464	2704

한편 각 디피 수의 분포는 다음 [그림 II-3]과 같다.



[그림 II-3] 0에서 99까지의 수의 디피 분포

위의 <표 II-2>와 그림에서 추가적으로 흥미있는 규칙을 몇 가지 발견할 수 있다.

첫째, 첫 번째 수가 n인 경우와 99-n인 경우 디피 수의 분포는 동일하다는 점이다. 이것은 연구자가 이 표에서 귀납적으로 발견하였지만, (a, b, c, d)와 (99-a, 99-b, 99-c, 99-d)의 디피 발이 같으므로 쉽게 연역적으로 증명할 수 있다.

둘째, 디피 수가 2인 경우 그 분포는 첫째 수가 0에서 49까지 그 수가 커짐에 따라 2씩 증가하며, 디피 수가 3인 경우에도 순서쌍의 개수에 유사한 규칙이 나타난다. 즉, 첫 수가 n일 때 디피 수가 3인 순서쌍의 수를 D_n이라고 하면 $D_n - D_{n-1} = 200 - 4n$이 된다. 이 두 가지 사실은 <표 II-1>에서도 비슷하게 나타나고 있다.

셋째, 디피 수가 0 또는 1인 경우와 디피 수가 4인 경우는 항상 홀수 개이며 그 외의 경우는 모두 짝수 개라는 점이다. 이것은 <표 II-1>에서는 디피 수가 0 또는 1인 경우와 디피 수가 2인 경우에 성립하고 있다.

두 번째와 세 번째에서 언급한 이러한 결과가 왜 성립하는지를 밝히지는 못하였으나, 꽤 흥미로운 결과라고 생각한다.

한편, 0에서 999까지의 수를 사용한 순서쌍에 대해서는 엄청난 시간이 소요되어 체계적으로 조사하지 못하였다. 그러나 연구자가 무작위로 현재까지 조사한 자료에 의하면 디피 수 19가 가장 큰 디피 수이며 디피 수 19를 가지는 순서쌍의 예는 다음과 같다.

(501, 34, 893, 755)　(501, 102, 836, 718)
(601, 202, 936, 818)

또, 0에서 9999까지의 수를 사용한 순서쌍의 경우에는, 연구자가 현재까지 조사한 자료에 의하면 디피 수 21이 가장 큰 것으로 조사되었다. 예를 들어 다음과 같은 순서쌍은 디피 수가 21이다.

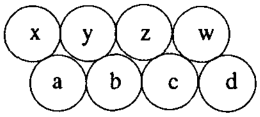
(9999, 2, 1609, 4564)　(9999, 2, 5437, 8392)
(9999, 15, 5443, 8394)

따라서, 수가 클수록 소수가 나타나는 빈도는 적지만 그래도 소수의 개수가 유한개가 아니듯이 가장 큰 디피 수를 구할 수 없다고 추정할 수 있다. 가장 큰 디피 수는 존재하지 않을 것이라는 추측은 다음에 그 구체적인 반례를 통해 입증된다.

3. 네 수의 순서쌍 (a, b, c, d)의 디피 머리는 항상 존재하는가?

주어진 네 수의 순서쌍 (a, b, c, d)에 대하여 그 디피 머리는 항상 존재하는가? 만약 이 질문의 답이 긍정적이라면 얼마든지 큰 디피 수를 가지는 순서쌍을 만들 수 있게 된다.

(a, b, c, d)의 디피 머리가 존재할 때 그것을 (x, y, z, w)라고 하자. 그러면



이므로,

y=x±a, z=y±b, w=z±c, x=w±d

이다. 그러므로

x=w±d=(z±c)±d=(y±b)±c±d=(x±a)±b±c±d

이고, a±b±c±d=0이 된다. 그러므로 디피 머리가 존재하려면 a±b±c±d=0이어야 한다.

Clausing은 이 관계를 이용하여 디피 머리를 계속해서 구하는 특별한 공식을 만들어 냈다. 그는 a+b+c=d일 때 그 디피 머리 중에서 x+y+z=w를 만족하는 (x, y, z, w)은 또다시 같은 방식으로 디피 머리를 가진다는 사실을 이용하여 $x=\frac{c-a}{2}$임을 구하였다. 그러므로 a+b+c=d일 때 그 디피 머리 중 하나는

$$\frac{1}{2}(-a+c,\ a+c,\ a+2b+c,\ a+2b+3c)$$

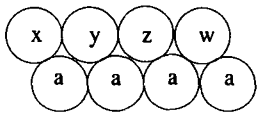
이며, 이것은 또다시 같은 방식으로 디피 머리를 가지게 된다.[8] 연구자는 이 관계를 계속 적용해서 순서쌍 (0, 20006521300, 56804250945, 124485827703)을 구했는데, 이 순서쌍의 디피 수는 66이다. 그러므로 임의의 디피 수를 가지는 순서쌍도 만들 수 있게 된다. 이것은 앞의 문제에서 살펴 본 디피 수는 유한하지 않다는 사례가 된다.

4. 디피 수에서는 어떤 규칙이 있는가?

디피 활동을 하면서 자연스럽게 디피 수가 1, 2, 3, ... 인 순서쌍들은 각각 어떤 공통점을 가지고 있는지에 관심을 가지게 된다. 처음에는 디피 수가 같은 여러 순서쌍에서 귀납적으로 공통점을 찾으려고 하다가 점차 디피 수가 1인 경우로부터 시작하여 그 디피 머리를 구하고 머리들의 공통점을 찾으려고 하면서 자연스럽게 거꾸로 생각하기와 같은 수학적 사고를 시작하게 된다.

가. 디피 수가 1 또는 2인 순서쌍

디피 수가 1인 순서쌍은 같은 수로 만들어진 순서쌍 (a, a, a, a)밖에 없다. 그렇다면 디피 수가 2인 순서쌍은 어떤 특징을 가질까? (a, a, a, a)의 디피 머리를 (x, y, z, w)라고 하면,



에서 y=x±a, z=y±a=x±a±a, w=z±a=x±a±a±a

가 되어야 한다. 이때 x=w±a가 되어야 하므로 x=x±a±a±a±a이고 그러므로

±a±a±a±a=0

이 되는 조합을 생각하면 된다.

따라서, 다음과 같은 순서쌍은 모두 디피 수가 2가 되며, 이 여섯 개의 순서쌍은 모두 x±y±z±w=0을 만족하므로 역시 디피 머리를 갖는다.

(x, x+a, x+2a, x+a) (x, x+a, x, x+a)
(x, x+a, x, x-a) (x, x-a, x-2a, x-a)
(x, x-a, x, x-a) (x, x-a, x, x+a)

이중 (x, x+a, x, x+a)와 (x, x-a, x, x-a)는 (x, y, x, y)의 형태이며, 나머지 4개의 순서쌍은 모두 (x, y, z, y)의 형태이다(단 $2y=x+z$).

8) 이 결과는 Greenwell(1989)에 이미 제시되고 있으며, 그는 디피 수가 10인 순서쌍 (31, 17, 9, 5)도 제시하고 있다.

나. 디피 수가 3인 순서쌍

디피 수가 3인 순서쌍에 대해서 알아보자. 먼저 디피 수가 2인 순서쌍 (x, y, x, y)를 생각해 보자. 이것은 $(0, a, 0, a)$와 디피적으로 동치이다. 이 순서쌍의 디피 머리는 $(x, x, x \pm a, x \pm a)$이므로 (x, x, y, y)인 형태가 된다(단 $x<y$). 또 디피 수가 2인 순서쌍 (x, y, z, x) (단 $2y=x+z$)의 디피적으로 동치인 순서쌍은 $(0, a, b, a)$ (단 $2a=b$)인데, 이 순서쌍의 디피 머리를 (x, y, z, w)라고 하면, $y=x$, $z=y \pm a=x \pm a$, $w=z \pm b=x \pm a \pm b$이다. 그러므로 $x=x \pm a \pm b \pm a$가 된다. 따라서,

$\pm a \pm b \pm a=0$, 즉 $\pm a \pm 2a \pm a=0$

이 되는 조합을 생각하면 된다. 그러므로 디피 머리는

$(x, x, x+a, x-a)$와 $(x, x, x-a, x+a)$

이다. 이것은 모두 (x, y, y, z)의 형태이고(단 $x<y<z$), $2y=x+z$인 조건을 만족해야 한다.

이 (x, x, y, y)와 (x, y, y, z)의 두 가지 형태의 순서쌍에는 같은 수가 두 번 이어서 나온다. 그러나 실제로 디피 수 3을 가지는 순서쌍에는 (1, 2, 7, 6)과 같이 모두 다른 수로 이루어진 것도 있다. 그러므로 디피 수 2인 (a, b, a, b)와 (a, b, c, b)인 경우를 조사해 보아야 한다.

(a, b, a, b)의 디피 머리 (x, y, z, w)는

$y=x \pm a$, $z=x \pm a \pm b$, $w=x \pm a \pm b \pm a$

이고, $x \pm a \pm b \pm a \pm b=x$이어야 한다. 이러한 조건을 만족하는 순서쌍을 구하면

$(x, x+a, x+a \pm b, x \pm b)$ 단 복호 동순

$(x, x-a, x-a \pm b, x \pm b)$ 단 복호 동순

이다. $a \neq b$이므로 이러한 네 순서쌍은 모두 (x, y, w, z) (단 $x<y<z<w$이고 $x+z=y+w$)의 형태가 된다.

한편, (a, b, c, b)의 디피 머리 (x, y, z, w)에서는

$y=x \pm a$, $z=x \pm a \pm b$, $w=x \pm a \pm b \pm c$

이고 $2b=a+c$이다. 그러므로 $x \pm a \pm b \pm c \pm b=x$ (단 $2b=a+c$)이어야 한다. 이러한 조건을 만족하는 순서쌍을 구하면 $(x, x \pm a, x \pm a \mp b, x \pm b)$ (단 복호 동순)이다. 이러한 순서쌍은 (x, z, y, w) (단 $x<y<z<w$이고 $x+z=y+w$)의 형태가 된다.

그러므로 디피 수가 3인 순서쌍은 다음 네 가지 유형이 있으며, 모든 순서쌍 (a, b, c, d)가 $a \pm b \pm c \pm d=0$을 만족하므로 디피 머리를 가진다.

3-1 유형 (x, x, y, y)

3-2 유형 (x, y, y, z), (단, $2y=x+z$)

3-3 유형 (x, y, w, z)
(단, $x<y<z<w$이고 $x+z=y+w$)

3-4 유형 (x, z, y, w)
(단, $x<y<z<w$이고 $x+z=y+w$)

다. 디피 수가 4인 순서쌍

이번에는 디피 수가 4인 순서쌍의 특징에 대해서 알아보자.

먼저 디피 수가 3인 3-1 유형의 순서쌍 (a, a, b, b)의 디피 머리를 구해보자. 이 순서쌍과 디피적으로 동치인 $(0, 0, a, a)$의 디피 머리는 (x, x, x, y) 또는 (x, y, y, y)임은 쉽게 알 수 있다. 일반적인 경우로서의 순서쌍 (a, a, b, b)의 디피 머리를 구하면 다음과 같다.

$(x,\ x+a,\ x,\ x+b)$ ………… ㉠

$(x,\ x+a,\ x,\ x-b)$ ………… ㉡

$(x,\ x-a,\ x,\ x+b)$ ………… ㉢

$(x,\ x-a,\ x,\ x-b)$ ………… ㉣

$x<y<z$일 때 ㉠은 (x, y, x, z)의 형태이며, ㉡과 ㉢은 (x, y, z, y)의 형태가 된다. 그러나 앞서 살펴본 것처럼 이 형태는 $2y=x+z$의 조건 하에서는 그 디피 수가 2가 된다. 여기서는 $a \neq b$이므로 $2y \neq x+z$의 조건을 만족해야 한다. ㉣은 (x, z, y, z)의 형태이다.

디피 수가 3인 3-3 유형의 (a, b, d, c)의 디피 머리를 구해보자. (a, b, d, c)와 디피적으로 동치

인 순서쌍 (0, a, c, b)의 디피 머리는 (x, x, x+a, x-b) 또는 (x, x, x-a, x+b)이다. 이것은 모두 (x, y, y, z)의 형태이지만 디피 수가 3인 3-2 유형과는 달리 $2y \neq x+z$이다. 일반적인 경우의 (a, b, d, c)의 디피 머리는 (x, x+a, x+a-b, x+c) 또는 (x, x-a, x-a+b, x-c)이며, 이것은 모두 (x, z, y, w)의 형태이다(단 $x<y<z<w$이고 $x+w \neq y+z$).

디피 수가 3인 3-2 유형의 순서쌍 (a, b, b, c)의 디피 머리를 구해보자. 이 순서쌍과 디피적으로 동치인 (0, a, a, b)의 디피 머리는 (x, x, x+a, x+2a) 또는 (x, x, x-a, x-2a)이다. 이것은 각각 (x, x, y, z), (x, y, z, z)의 형태이다. 이러한 유형은 그 다음에 다시 나오므로 나중에 통합하여 살펴보기로 한다. 또, 일반적인 경우로서의 순서쌍 (a, b, b, c)의 디피 머리는 (x, x+a, x+a-b, x-c) 또는 (x, x-a, x-a+b, x+c)이다. 이것은 모두 (x, y, w, z)의 형태이며 이 유형 역시 나중에 다시 나오게 된다.

마지막으로 디피 수가 3인 3-4 유형인 (a, c, b, d)의 디피 머리를 구해보자. 이것과 디피적으로 동치인 순서쌍 (0, b, a, c)의 디피 머리를 구하면 (x, x, x+b, x+a+b)와 (x, x, x-b, x-a-b)이다. 이것은 각각 (x, x, y, z), (x, y, z, z)의 형태이다. 그리고 일반적인 경우로서의 순서쌍 (a, c, b, d)의 디피 머리는 (x, x+a, x+a-c, x-d)와 (x, x-a, x-a+c, x+d)이다. 이것은 모두 (x, y, w, z)의 형태이다. 그러므로 3-2 유형의 순서쌍 (a, b, b, c)와 3-4 유형의 순서쌍 (a, c, b, d)의 디피 머리는 같은 유형이 됨을 알 수 있다. 이것을 통합하여 생각해 보자.

(x, x, y, z)의 형태를 가지는 순서쌍을 정리하면 다음과 같다.

(x, x, x+a, x+2a)

(x, x, x+b, x+a+b) $a<b$

그러므로 디피 수가 4가 되는 (x, x, y, z)은 $x<y<z$를 만족함과 동시에 y는 x보다 z에 가까운 수라야 한다. 즉, $x+z \leq 2y$의 조건을 만족해야 한다.

(x, y, z, z)의 형태를 가지는 순서쌍은 다음과 같다.

(x, x, x-a, x-2a)

(x, x, x-b, x-a-b) $a<b$

그러므로 디피 수가 4가 되는 (x, y, z, z)는 $x<y<z$와 $x+z \geq 2y$의 조건을 만족해야 한다.

마지막으로, (x, y, w, z)의 형태를 가지는 순서쌍은 다음과 같다.

(x, x+a, x+a-b, x-c) $a<b<c$, $2b=a+c$

(x, x-a, x-a+b, x+c) $a<b<c$, $2b=a+c$

(x, x+a, x+a-c, x-d) $a<b<c<d$, a+d=b+c

(x, x-a, x-a+c, x+d) $a<b<c<d$, a+d=b+c

(x, y, w, z)의 형태 중에서 x+w=y+z인 경우 그 디피 수가 3이다. 그러나 여기 열거된 순서쌍은 모두 $x+w \neq y+z$이며 특히 $\frac{x+w}{2}$가 폐구간 [y, z] 안에 존재한다.

이상의 경우를 표로 정리하면 다음 <표 Ⅱ-3>과 같다.[9]

한편, $x<y<z<w$인 네 개의 수로 가능한 순서쌍을 생각해 보자. 디피적으로 동치인 것을 고려하면 가능한 디피 순서쌍의 종류와 지금까지 확인된 각각의 디피 수는 다음 <표 Ⅱ-4>와 같다.

라. 디피 수가 5 이상인 순서쌍

일반적으로 디피 수가 4인 순서쌍의 경우 그 디피 머리를 공식화하기가 쉽지 않다. 예를 들

9) Greenwell(1989)은 실제로 디피 발을 구하지 않고 디피 수가 얼마인지 알아내는 방법을 미해결 문제로 제안하고 있다. Behn, A., Kribs-Zaleta, C., and Ponomarenko, V.(2005)은 <표 Ⅱ-3>과 같은 결과와 디피 수가 6인 (x, x, y, z), (x, y, z, z), (x, y, w, z)를 제시하였다. 그러나 결과만 제시되고 그 결과를 얻는 과정은 제시하지 않았다.

어 <표 Ⅱ-3>에서 제시된 4-1 유형의 (x, x, x, y)는 y=3x의 경우 디피 머리를 가지지만 그 외의 경우는 디피 머리를 가지지 않는다. 그러므로 디피 수가 5인 순서쌍의 규칙을 찾는 것은 그리 쉬운 일이 아니다. 그러나 <표 Ⅱ-4>를 보면 디피 수가 확인되지 않은 순서쌍이 있으며, 그러한 순서쌍은 5 이상의 디피 수를 가지게됨을 알 수 있다. 이를 구체적으로 계산해서 디피 수를 확인해 보자.

첫째, $x+z<2y$일 때의 (x, y, z, z)의 디피 수를 계산하면 디피 수는 6이 된다.

둘째, $x+z>2y$일 때의 (x, x, y, z)의 디피

<표 Ⅱ-3> 디피 수에 따른 순서쌍의 형태 (단 $x<y<z<w$)

디피 수	유형	순서쌍의 형태	조건
1	1	(x, x, x, x)	$x\neq 0$
2	2-1	(x, y, x, y)	
	2-2	(x, y, z, y)	$2y=x+z$
3	3-1	(x, x, y, y)	
	3-2	(x, y, y, z)	$2y=x+z$
	3-3	(x, y, w, z)	$x+z=y+w$
	3-4	(x, z, y, w)	$x+z=y+w$
4	4-1	(x, x, x, y)	
	4-2	(x, y, y, y)	
	4-3	(x, y, x, z)	
	4-4	(x, y, z, y)	$2y\neq x+z$
	4-5	(x, z, y, z)	
	4-6	(x, y, y, z)	$2y\neq x+z$
	4-7	(x, z, y, w)	$x+w\neq y+z$
	4-8	(x, x, y, z)	$x+z\leq 2y$
	4-9	(x, y, z, z)	$x+z\geq 2y$
	4-10	(x, y, w, z)	$x+w\neq y+z$, $\frac{x+w}{2}\in[y, z]$

<표 Ⅱ-4> 순서쌍 유형별로 본 디피 수 (단 $x<y<z<w$)

순서쌍	디피 수
(x, x, x, x)	1
(x, x, x, y)	4
(x, y, y, y)	4
(x, x, y, y)	3
(x, y, x, y)	2
(x, y, z, z)	$x+z\geq 2y$일 때 4
(x, z, y, z)	4
(x, y, y, z)	$2y=x+z$일 때 3, $2y\neq x+z$일 때 4
(x, y, z, y)	$2y=x+z$일 때 2, $2y\neq x+z$일 때 4
(x, x, y, z)	$x+z\leq 2y$일 때 4
(x, y, x, z)	4
(x, y, z, w)	
(x, y, w, z)	$x+z=y+w$일 때 3 $x+w\neq y+z$이고 $\frac{x+w}{2}\in[y, z]$일 때 4
(x, z, y, w)	$x+z=y+w$일 때 3, $x+w\neq y+z$일 때 4

수를 계산해도 디피 수는 6이 된다.

셋째, (x, y, w, z)의 경우 디피 수를 계산하면 $x+z=y+w$일 때 디피 수가 3이 된다. 그러나 $x+w\neq y+z$일 때 만약 $y\leq \frac{x+w}{2}\leq z$이면 디피 수는 4가 된다. 만약 $\frac{x+w}{2}<y<z$ 또는 $\frac{x+w}{2}>z>y$이면 조금 더 복잡한 계산을 통해 디피 수는 6이 됨을 알 수 있다.

한편, (x, y, z, w) 형태에서는 디피 수에 대해 어떤 규칙을 찾기는 어렵다. 그러나 연구자가 개발한 프로그램으로 몇 가지 사례를 찾아서 귀납하고 계산하여 확인한 결과 몇 가지 특징을 찾아볼 수 있다. 즉, (x, x+a, x+2a, x+na)에서 n=4이면 디피 수가 7이고, n=3 또는 n>4이면 디피 수는 5이다. 또, $(1, x, x^2, x^3)$ 형태에서는 $x=2$이면 디피 수가 7이지만 $x>2$이면 디피 수는 6이다.

그러므로, 순서쌍의 유형별로 본 디피 수는 다음 <표 Ⅱ-5>와 같다.

결국, 디피 수에 대해 좀더 조사하려면 x<y<z<w일 때의 (x, y, z, w) 유형을 살펴보아야 할 것이며, 이것은 좀더 연구가 필요하다고 생각한다. 그러나 (x, y, z, w)의 디피 발이 위의 유형의 순서쌍이 된다면 위의 디피 수를 적용할 수 있다. 예를 들어, (x, y, z, w)의 디피 발이 (x, z, y, z) 유형이 된다면 그 디피 수는 5가 된다. 그러므로 큰 수의 디피 수를 가지는 경우는 그 디피 발이 계속해서 (x, y, z, w)와

<표 Ⅱ-5> 보완된, 순서쌍 유형별로 본 디피 수 (단 x<y<z<w)

순서쌍	디피 수
(x, x, x, x)	1
(x, x, x, y)	4
(x, y, y, y)	4
(x, x, y, y)	3
(x, y, x, y)	2
(x, y, z, z)	$x+z\geq 2y$일 때 4, $x+z<2y$일 때 6
(x, z, y, z)	4
(x, y, y, z)	$2y=x+z$일 때 3, $2y\neq x+z$일 때 4
(x, y, z, y)	$2y=x+z$일 때 2, $2y\neq x+z$일 때 4
(x, x, y, z)	$x+z\leq 2y$일 때 4, $x+z>2y$일 때 6
(x, y, x, z)	4
(x, y, w, z)	$x+z=y+w$일 때 3 $x+w\neq y+z$이고 $\frac{x+w}{2}\in[y, z]$일 때 4 $x+w\neq y+z$이고 $\frac{x+w}{2}\notin[y, z]$일 때 6
(x, z, y, w)	$x+z=y+w$일 때 3, $x+w\neq y+z$일 때 4
(x, y, z, w)	$(x, x+a, x+2a, x+4a)$ 유형이면 7 $(x, x+a, x+2a, x+na)$ 유형이고 n=3 또는 n>4이면 5 $(1, x, x^2, x^3)$에서 $x=2$이면 7, $x>2$이면 6 $(a^2, (a+1)^2, (a+2)^2, (a+3)^2)$에서 $a=0$이면 8, $a\neq 0$이면 6

같은 유형이 되게 될 것이며, 이 아이디어가 (x, y, z, w) 유형의 순서쌍의 디피 수를 구하는데 도움이 될 것이라고 생각한다.

III. 디피의 변형

디피 활동을 하는 과정에서 주어진 조건을 변형하면 어떤 일이 벌어질 것인지를 생각하는 경우가 있다. 즉, 발전적 사고를 하게 된다. 그런 점에서 디피 활동은 수학적 사고를 위한 훌륭한 소재가 될 수 있다. 가장 특징적이고 흔한 조건 변경으로 순서쌍의 원소의 수를 변화하거나 연산의 종류를 바꾸는 것이다. 그러한 변형된 활동에 대해서 알아보자.

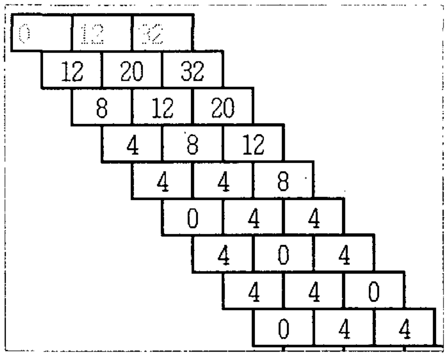
1. (2n+1)수 디피

순서가 있는 3쌍 (a, b, c)에서 세 수가 모두 같은 수이면 그 디피 발은 (0, 0, 0)이 된다. 그러나 a, b, c가 모두 같은 수가 아닌 경우에는 끝없이 반복된다. 그 이유를 살펴보자. 임의의 순서쌍 (x, y, z)에 대하여 x가 가장 작은 수라고 하면 (x, y, z)와 (0, y-x, z-x)는 디피적으로 동치이다. 그러므로 (0, 0, a), (0, a, a), (0, a, b) (단 a<b)의 세 가지 경우를 살펴보는 것으로 충분하다. 그런데, (0, a, a)는

(0, a, a) → (a, 0, a) → (a, a, 0) → (0, a, a)

와 같이 순환하며, (0, 0, a)는 (0, a, a)가 되어 역시 반복하게 된다. 그러므로 (0, a, b)에 대해서만 살펴보자.

(0, a, b)의 디피 발 F(0, a, b)=(a, b-a, b)이고, F(a, b-a, b)=($|b-2a|$, a, b-a)이다. 이러한 과정은 유클리드의 호제법을 구하는 과정과 흡사하며, 따라서 [그림 Ⅲ-1]에서 보는 바와 같이 최종적으로는 a와 b의 최대공약수를 d라고 하면 (d, d, 0)의 반복이 되게 된다.



[그림 Ⅲ-1] 3수 디피의 예

이러한 순환 과정에서 다음과 같은 규칙을 귀납적으로 쉽게 발견할 수 있다.

규칙 1: 머리에 있는 두 개의 작은 수가 그 발에 다시 나타난다.

규칙 2: 발에 있는 작은 두 수의 합은 발에 있는 가장 큰 수와 같다.

세 수 디피가 끝나지 않고 반복하는 이유는 다음과 같이 설명할 수도 있다. 디피가 끝이 나려면 (a, a, a)가 되어야 한다. (a, a, a)의 디피 머리를 (x, y, z)라고 하면 y=x±a, z=y±a가 되며, 따라서 x±a±a±a=x가 되어야 한다. 그러므로 a±a±a=0이 되어야 하는데, 이것은 a=0일 때만 가능하다. 그러므로 세 수 디피는 끝나지 않는다. 마찬가지 이유로 해서 홀수개의 원소로 된 순서쌍의 경우에는 디피가 끝나지 않는다.

2. $2n$수 디피

엑셀을 이용하여 몇 가지 구체적인 사례를 조사해 보면, 2수 디피, 4수 디피, 8수 디피, 16수 디피 등 2^n수 디피는 모두 끝이 난다. 그러나 2^n이 아닌 짝수 수의 디피는 예를 들어 6수 디피는 일반적으로 끝나지 않고 반복하게

된다. 왜 그럴까?

4수 디피가 끝이 난다는 증명의 아이디어를 여기에 적용해 보자. 어떤 수의 디피든 간에 디피 발에 나타나는 원소 중 가장 큰 수는 원래의 순서쌍에 있는 원소의 가장 큰 수보다 작거나 같게 된다. 같게 되는 경우는 가장 큰 수의 이웃의 수가 0인 경우에만 가능하다. 그러므로 가장 큰 수가 그대로 남아 있을 경우는 한 원소만 0이 아니고 다른 원소는 모두 0인 경우이다(4수 디피의 증명을 참고). 다음 [그림 Ⅲ-2]는 엑셀에서 한 원소를 159로 하여 가운데 위치시키고 나머지 수는 모두 0으로 하여 디피를 계산한 결과이다.

이 그림에서 알 수 있는 것처럼, 0 아닌 수 a가 있고 다른 수들이 모두 0일 때 3번의 단계 후에 a가 연속해서 4번 나타난다. 다음 단계에서는 같은 수가 4개 이웃해 있으면 가운데에 0이 3개 나타나고, 한 단계 진행될 때마다 0이 하나씩 a로 채워진다. 그렇게 해서 7번째 단계에서는 8개의 a가 연속해서 나타나게 된다.

그러므로 4수 디피가 끝난다는 증명 방법과 위의 사실을 결합하여, 2^n개의 수로 된 순서쌍 (a, 0, 0, ..., 0)는 2^n-1번째의 디피 발이 (a, a, ..., a)가 됨을 수학적 귀납법으로 쉽게 보일 수 있고, 따라서 2^n번째에 디피가 끝난다는 사실을 알 수 있다.[10)]

한편, 6수 디피의 경우에도 모든 순서쌍의 디피가 반복하는 것은 아니다. 예를 들어, (1, 2, 3, 4, 3, 2)의 경우는 그 디피 발이 (1, 1, 1, 1, 1, 1)이고 그 다음에 디피 활동이 끝난다. 이와 같은 순서쌍은 어떤 특징이 있는지를 탐구하는 것도 의미 있을 것이라고 생각한다.

3. 디비 활동

이웃한 두 수의 차를 구하는 대신 더하거나 곱할 수도 있다. 그러나 이 경우에는 수가 계속해서 커지며 유용하거나 흥미 있는 결과는

0	0	0	0	0	0	0	0	159	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	159	159	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	159	0	159	0	0	0	0	0	0	0
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**159**	**159**	**159**	**159**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
0	0	0	0	0	0	159	0	0	0	159	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	159	159	0	0	159	159	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	159	0	159	0	159	0	159	0	0	0	0	0
0	**0**	**0**	**0**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**0**	**0**	**0**	**0**	
0	0	0	0	159	0	0	0	0	0	0	0	159	0	0	0	0
0	0	0	159	159	0	0	0	0	0	0	159	159	0	0	0	
0	0	0	159	0	159	0	0	0	0	0	159	0	159	0	0	0
0	0	159	159	159	159	0	0	0	0	159	159	159	159	0	0	
0	0	159	0	0	0	159	0	0	0	159	0	0	0	159	0	0
0	159	159	0	0	159	159	0	0	159	159	0	0	159	159	0	
0	159	0	159	0	159	0	159	0	159	0	159	0	159	0	159	0
159	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	**159**	
159	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	159
159	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	159	

[그림 Ⅲ-2] 한 수만 0이 아닌 디피의 결과

---

10) McLean은 α가 $\lambda^3-4\lambda-4=0$의 유일한 실근이고 $t=1+\frac{2}{\alpha}$일 때의 순서쌍 (t^3, t^2, t, 1)과 s가 $s^7-s^6-s^5-s^4-s^3-s^2-s-1=0$의 유일한 실근일 때 (1, s, s^2, s^3, s^4, s^5, s^6, s^7)의 디피 수는 무한임을 밝혔다. 그러므로 2^n수 디피가 끝난다는 것은 유리수 범위에서만 성립하는 것이다.

그리 많지 않다. 그렇지만 이웃한 두 수의 비를 구하는 경우에는 아주 흥미 있는 결과를 얻게 된다. 이와 같이 이웃한 두 수 중에서 큰 수를 작은 수로 나누는 활동을 디비(divy) 활동이라고 한다. 디비는 이웃한 두 수의 몫이 모두 1이 나오면 끝나게 된다.

디비 활동은 디피 활동보다 더 복잡하고 어렵다. 그 이유는 나눗셈을 소수가 아니라 분수로 처리해야 하며, 이웃한 두 분수 중 어느 것이 더 큰 것인지를 조사해야 하고 수시로 분수의 나눗셈을 해야 하기 때문이다. 그러나 어느 정도 시간이 지나면서 학생들은 이웃한 두 분수의 크기 비교를 하지 않고, 이웃한 두 분수의 몫을 구한 다음 그 몫이 1보다 큰 경우에는 그 역수를 사용하게 된다.

디비 활동에서 나눗셈의 결과를 소수로 나타내면 그 몫이 무한소수가 될 경우가 많으므로 디피 활동에서 했던 것처럼 엑셀과 같은 공학을 활용하기가 매우 어렵다는 점도 디비 활동의 어려움의 한 요인이 될 것이다.

다음 <표 Ⅲ-1>의 <예 1>과 <예 3>에서 알 수 있듯이, 같은 순서쌍으로 디피 활동과 디비 활동을 하면 디피 수 또는 디비 수가 다르며 그 행동 또한 아주 다르다. 그러나 <예 2>와 <예 3>의 경우에는 뺄셈과 나눗셈의 차이만 있지 본질적으로 매우 유사한 행동을 하고 있음을 알 수 있다. 그러므로 디피 활동과 디비 활동을 하면서 등차수열과 등비수열, 혹은 로그와 지수 사이의 관계와 관련한 어떤 관계를 찾게 될 가능성도 있어 보인다.

Ⅳ. 결 론

디피는 Herbert Wills가 만든, 뺄셈으로 이루어진 아주 간단한 활동이다. Willis의 의도대로 디피는 학생들에게 재미있는 게임의 형태로 뺄셈 과제로 제공될 수 있다. 그러나 학생들은 디피 활동을 하면서 금방 많은 추측을 하게 되고 여러 가지 흥미 있는 발견을 하게 된다. 이것은 학생들에게 수학적 사고를 할 수 있는 훌륭한 기회가 된다. 디피 활동을 하면서 하게 되는 추측이나 발견을 예시하면 다음과 같다.

1. 디피는 항상 끝난다.

자연수(또는 유리수)의 경우 이 추측에 대한 증명은 Greenwell(1989), Clausing(2005)에 제시되어 있다. 그러나 실수를 사용할 경우 디피는 항상 끝나는 것은 아니며, 디피 수가 무한인 경우도 존재한다.

<표 Ⅲ-1> 디피 활동과 디비 활동의 비교

<예 1> 디피 활동	<예 2> 디피 활동	<예 3> 디비 활동
1 2 4 8	1 2 3 4	1 2 4 8
1 2 4 7	1 1 1 3	2 2 2 8
1 2 3 6	0 0 2 2	1 1 4 4
1 1 3 5	0 2 0 2	1 4 1 4
0 2 2 4	2 2 2 2	4 4 4 4
2 0 2 4	0 0 0 0	1 1 1 1
2 2 2 2		
0 0 0 0		

2. 큰 수를 사용하면 디피 수는 커질 것이다.

이 추측은 자연스러우나 반례가 금방 나타난다.

3. 가장 큰 디피 수는 얼마일까?

디피 수가 아주 큰 순서쌍을 찾는 일은 쉽지 않다. 보통, 디피 수가 4 또는 6인 경우가 가장 흔하게 발견되며 가끔 디피 수가 8인 경우도 나타난다. 연구자는 연구자가 개발한 컴퓨터 프로그램을 이용하여 디피 수가 21인 순서쌍을 여러 개 찾아내었다. 그러나, Greenwell(1989)과 Clausing(2005)이 제시한 공식을 활용하고 엑셀을 이용하여 디피 수가 66인 순서쌍 (0, 20006521300, 56804250945, 124485827703)을 발견하였다. 이론적으로 임의의 자연수에 대하여 그 수를 디피 수로 가지는 순서쌍 (a, b, c, d)를 구할 수 있다. 그러므로 디피 수가 가장 큰 순서쌍은 존재하지 않는다.

또한, 디피 수를 구하는 과정에서, 0과 99 사이의 자연수 범위의 순서쌍의 분포에 재미있는 규칙이 있음을 발견하게 되었다. 즉, 4수 디피에서 첫 번째 수가 n인 경우와 99-n인 경우 그 디피 수의 분포가 동일하며, 디피 수가 2 또는 3인 순서쌍들의 수 사이에 흥미 있는 규칙, 디피 수가 4인 순서쌍의 수가 홀수라는 점 등이 그것인데, 그러나 그 이유를 연구자는 아직 밝히지 못하였다.

4. 디피 수가 1, 2, 3, 4와 같은 경우 어떤 특징이 있을까?

Behn, A., Kribs-Zaleta, C., and Ponomarenko, V.(2005)는 디피 수가 1에서 4까지, 그리고 디피 수가 6인 일부 순서쌍의 유형을 제시하였다. 그러나 그 결과만 제시하였다. 연구자는 (0, 0, 0, 0)에서부터 거꾸로 시작하여 같은 결과를 얻어낸 과정을 제시하였으며, 디피 수가 5, 6, 7, 8인 일부 순서쌍의 특징을 추가적으로 찾아내었다. 특히 $x<y<z<w$일 때 (x, y, z, w) 형태의 순서쌍에 대한 디피 수를 구하는 것은 아직 미해결 문제이다.

5. 어느 단계부터 항상 짝수만 나온다.

네 수로 된 순서쌍의 경우 디피 발을 구하는 과정을 적어도 네 번 거치면 모두 짝수가 된다는 사실을 간단한 계산으로 증명할 수 있다.

6. 분수나 소수를 사용하면 어떻게 될까?

자연수에서보다 더 복잡하고 디피 수가 다르게 나올 것이라고 생각되기도 하지만, 적당한 수를 곱해 모두 자연수로 고칠 수 있고, 그 디피 수는 처음 순서쌍의 디피 수와 같다는 사실을 쉽게 이해할 수 있다.

7. 세 개 혹은 다섯 개로 이루어진 순서쌍으로 하면 어떻게 될까?

엑셀을 이용하여 이런 경우의 디피 발을 구해보면 많은 경우 반복되는 것을 알 수 있다. 또 8수 디피, 16수 디피와 같은 것은 4수 디피와 마찬가지로 항상 끝남도 알 수 있다. 연구자는 2^n수 디피가 항상 끝나는 이유를 제시하였다.

8. 차를 구하는 대신 이웃한 수를 더하거나 곱하거나 나누면 어떻게 될까?

이웃한 두 수를 나누는 활동은 디비 활동으로 알려져 있다. 연구자는 디비 활동과 디피

활동의 유사점과 차이점을 설명하였다. 더하거나 곱하는 경우도 어떤 패턴을 찾을 수 있으나 디피나 디비와 같은 흥미 있는 것은 아니다.

이러한 추측과 발견을 확인하는 과정에서 학생들은 지필 계산을 하기도 하고 엑셀을 이용하기도 한다. 또한 그 과정에서 연역적 사고와 귀납적 사고, 거꾸로 생각하기, 조건 변경 등의 다양한 수학적 사고를 할 수 있다. 따라서 연구자는 연구자가 직접 개발한 컴퓨터 프로그램과 엑셀을 이용하여 자료를 수집하고 검증하면서 위와 같은 문제를 규명해 보았다.

이 연구에서는 디피 수가 5 이상인 순서쌍의 특징을 모두 확인하지 못하고 몇 가지만 제시하였다. 그러나 $x<y<z<w$일 때 (x, y, z, w) 유형의 순서쌍의 디피 수가 5 이상이 되며, 이 순서쌍의 디피 수를 구하는 것은 아직 미해결 문제인 것으로 보인다.

그럼에도 불구하고 여기서 밝힌 몇 가지 사실과 자료는 초등학교 또는 중학교의 일반 학생과 영재 학생들에게 수학적 사고 활동을 위한 훌륭한 소재로 활용될 수 있으며 더 나아가 고등학생이나 대학생에게도 유용한 소재가 된다고 생각한다.

참고문헌

Behn, A., Kribs-Zaleta, C., & Ponomarenko, V. (2005). The convergence of difference boxes, *American Mathematical Monthly, 2005*, 426-439.

Greenwell, R. (1989). The game of diffy. *The Mathematical Gazette, 73*, 222-225.

McLean, K. Robin (1999). Playing diffy with real sequences, *The Mathematical Gazette, 83*, 58-68.

Clausing, Achim (2005). Tribonacci in the sky: a mathematical mountain walk. In http://mathforum.org/wagon/spring05/p1022.

Two applets for the diffy game. In http://www-unix.oit.umass.edu/~cs121/projects/project3/barring/diffyGame.htm.

Mathematical Conjectures and Discoveries in the Diffy Activity

Kang, Moon Bong (Gyeongin National University of Education)

This study is to find the properties of Diffy activity and to investigate the problems and conjectures which could be posed in the Diffy activity. The Diffy is a simple subtracting activity. But, I think it is a field where the mathematical thinking can take place.

I proposed some problems and conjectures which can be posed. I solved the problems using excel and the software I developed and proposed the related data. I think such problems and the data will be the good materials for elementary students and gifted to think mathematically with.

* key words : diffy(디피), divy(디비), mathematical thinking(수학적 사고), Excel(엑셀)

논문접수 : 2005. 10. 4
심사완료 : 2005. 12. 2