

전단벽구조의 면내 회전 강성도

Rotational degree of freedom in Shear Wall Structures



조 순 보*
Cho, Soon-Bo

1. 서 론

전단벽과 피로티가 일체로 된 고층 아파트 건물에서 강축방향의 지진하중 등 횡력이 작용할 때 횡변위의 크기 및 부재력의 산정은 전단벽을 *Plane, Plate, Shell*, 요소로 모델링하는 경우 각 절점의 $x(1)$ 축 수평, $y(2)$ 축 수직 변위는 고려하나 $z(3)$ 축 회전변위(*Rotational degree of freedom*)를 안전 축으로 고려한 강성도식이 구성되어 횡 변위(부재력)(예제1) 산정에서 오차발생의 원인이 된다. 지난 수년간 판 요소의 z 축 회전변위(*Rotational degree of freedom*)을 포함하는 강성도 행렬식의 일반식 구성에 대한 많은 연구가 있었으나 특별한 형상의 특정 요소인 경우를 제외 하고 큰 성과가 없었다.¹⁾

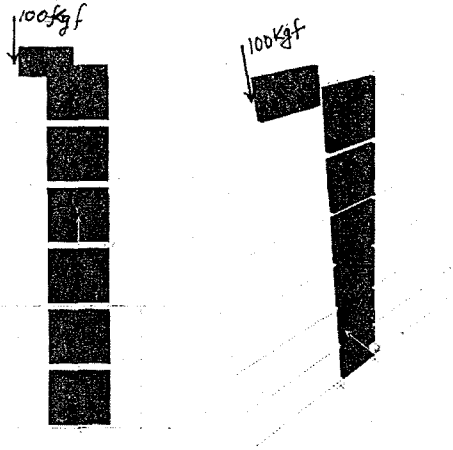
Allman, Sabir 등이 제안한 형상함수에 의한 면내회전 자유도 (*Rotational degree of freedom*) 강성도식이 그동안 연구된 것 중 가장 유력한 연구이며 사각형요소에서는 정도(精度)비가 우수하나 삼각형요소에서는 정도(精度)비가 낮아 강성도식 일반식구성에는 문제가 있었다.²⁾ 유한요소 실용해석 *Software*인 *Sap2000* 등에서 z 축 회전변위(*Rotational degree of freedom*)의 크기를 실제

요소형상에서 계산하기 보다는 판구조물과 다른 부재(보 나 기둥 등)의 연결방법에 따라 절점을 *Hinge*가 되는 강성도 크기나 전체 행렬식의 *Singularity*를 피하는 최소의 값을 가정하여 구성하고 있다.³⁾ 각절점 당 6개의 자유도인 보가 <그림 3>처럼 4각형 판 요소의 각 절점을 연결하여 구성하고 있다고 가정하여 z 축 회전변위를 포함하는 판 요소 강성도식을 구성한다. *Sabir*의 강성도 행렬식, 절점의 $x(1)$ 축 수평, $y(2)$ 축 수직 변위만 고려한 *Plane*행렬식을 이용하여 *Cantilever*보의 처짐(예제 6)크기를 구해보고 z 축 회전변위가 포함된 보이용 판 요소 강성도식의 *Output*의 정도(精度)개선을 알 수 있으며 이는 판 요소 강성도식 구성 중 z 축 회전변위대입에 기여하고 전단벽구조 고층건물의 해석 및 보와 기둥의 연결된 전단벽구조해석의 정도(정도)개선에 기여한다.

2. 수치예제

<그림 1>의 전단벽(*Shell*로 모델링)+*Cantilever*보 구조 와 보+*Cantilever*보 구조에 집중하중을 가하여 *Shell*요소에 z 축 회전변위(*Rotational degree of freedom*)가 발생하도록 유도한후 변위를 구하여 비교하면 <표

* 정회원, 수원대건축공학과부교수



<그림 1> Modelling(a)전단벽(Shell로 모델링)+Cantilever보 구조 (b)보+Cantilever보구조

1>과 같다.

<표 1> 변위의 비교

• 전단벽(Shell로 모델링)+Cantilever보 구조

	1(x)	2(y)	3(z)
U	-2.298E-4	0.0000	-3.164E-04
R	0.0000	-2.612E-04	0.0000

• 보+Cantilever보 구조

	1(x)	2(y)	3(z)
U	-8.534E-5	-4.574E-05	-0.22684
R	-0.05126	-0.00128	4.741E-05

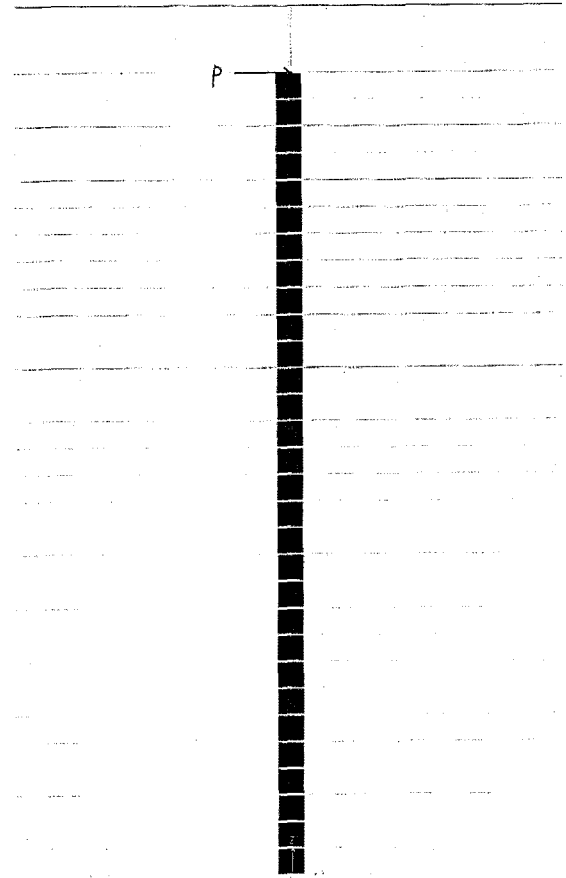
<그림 2>와 같은 Cantilever보에 단부 집중하중이 작용할 때 처짐을 보요소와 Plane요소로 각각 모델링하여 처짐을 구해보면 z축 회전변위가 작동하는 보요소가 z축 회전변위가 없는 Plane요소보다 처짐이 적다.

• 보 요소 모델링

	1(x)	2(y)	3(z)
U	0.42704	0.0000	0.0000
R	0.0000	0.00213	0.0000

• Plane요소 모델링

	1(x)	2(y)	3(z)
U	0.42183	0.0000	0.01054
R	0.0000	0.00211	0.0000



<그림2> Cantilever보의 보요소와 Plane요소의 처짐비교

3. Sabir의 z축 회전변위강성도계수

Sabir는 4각형 판요소의 z축 회전변위 (Rotational Degree of freedom)강성도계수를 포함하는 강성도 행렬식의 구성과정에서 아래의 변형을 식(1)에서 변위가정식을 유도하였다. 4각형 판요소의 각 절점당 3개의 변위 u, v, θ_z 를 가정하여 사각형판요소에서 12개의 독립상수가 필요하며 Singularity를 피하여 적합조건식 $\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$ 를 만족하는 아래 (1)의 변형율식을 가정하였다.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= a_4 + a_5 y + a_{11} y^2 + 2a_{12} x y^3 \\
 \epsilon_y &= a_6 + a_7 x - a_{11} x^2 - 2a_{12} x^3 y \\
 \epsilon_{xy} &= a_8 + a_9 x + a_{10} y + a_5 x + a_7 y
 \end{aligned} \tag{1}$$

(1)식을 적분하여 사각형판요소의 각 절점의 변위식을 아래의 (2)식으로 가정한다.

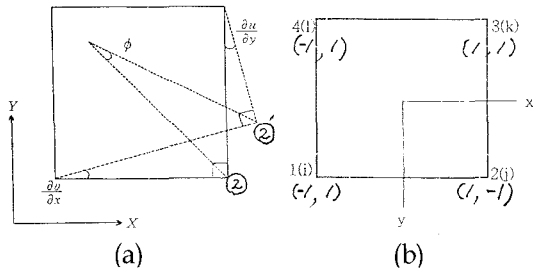
$$u = \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy + \alpha_6 y/2 + \alpha_{10} y^2/2 + \alpha_{11} xy^2 + \alpha_{12} x^2 y^3$$

$$v = \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 x/2 + \alpha_9 x^2/2 - \alpha_{11} x^2 y - \alpha_{12} x^3 y^2$$

(2a)

$$u = [X]\{\alpha\} \tag{2b}$$

절점의 z축 회전변위에 의하여 ②절점이 ②'위치로 이동하였을 때 발생하는 변위각φ은 <그림3>과 같다.



<그림 3> Drilling Degree of Freedom의 (a)변위각φ (b)절점좌표

<그림 3>에서 z축 회전변위인 Drilling Degree of Freedom의 변위각φ는 (3)식에서 구할 수 있다.

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{3a}$$

$$\phi = \alpha_3 - \alpha_5 x/2 + \alpha_7 y/2 + \alpha_9 x/2 - \alpha_{10} y/2 - 2\alpha_{11} xy - 3\alpha_{12} x^2 y^2 \tag{3b}$$

(2)식과 (3)식을 합성하여 (4)식을 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = [X_i]\{\alpha\} \tag{4}$$

[X_i] 행렬식은

1	0	-y _i	x _i	x _i y _i	0	0	y _i /2	0	y _i ² /2	x _i y _i ²	x _i ² × y _i ³
0	1	x _i	0	0	y _i	x _i y _i	x _i /2	x _i ² /2	0	-x _i ² y _i	-x _i ³ × y _i ²
0	0	1	0	-x _i /2	0	y _i /2	0	x _i /2	-y _i /2	-2x _i y _i	-3x _i ² × y _i

(5)식에 <그림 3(b)>의 사각형판요소의 절점좌표를 대입하여

$$\{q\} = [X_i]\{\alpha\} \quad \{\alpha\} = [X_i]^{-1}\{q\} \tag{5}$$

(5)의 가정변위식의 변형을 행렬식을 구하여 보면

$$\{\epsilon\} = [H]\{\alpha\} \tag{6a}$$

$$\{\epsilon\} = [H][A]^{-1}\{q\}$$

$$\{\epsilon\} = [B]\{q\} \tag{6b}$$

[H] 행렬식은

0	0	0	α ₃	α ₅ y	0	0	0	0	0	α ₁₁ y ²	2α ₁₂ x ² y ³
0	0	0	0	0	α ₆	α ₇ x	0	0	0	-α ₁₁ x ²	-2α ₁₂ x ³ y
0	0	0	0	α ₅ x	0	α ₇ y	α ₈	α ₉ x	α ₁₀ y	0	0

Sabir가 제안한 Vertex강성도 계수를 포함하는 4각형 판요소의 강성도행렬식은 아래의 식(7)에서 구할 수 있다.

$$\bar{K} = t \iint [B]^T D [B] dx dy \tag{7}$$

Plane Stress의 경우 응력도-변형을 행렬식[D]는 (8)식을 사용한다.

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

4. 수치예제2

E=219780kg/cm², ν=0.5이고 두께가 1cm, 각 변의 길이가 2cm인 정사각형 판요소의 강성도 행렬식을 Sabir가 가정한 (4)식을 이용하여 각 절점당 Drilling Degree of Freedom를 포함하는 3개의 자유도 u, v, θ_z를 가지는 12×12 행렬식을 Matlab Software 를 이용하여 구한다.

<그림 3(b)>의 사각형요소의 각 절점좌표를 대입하여 [X] 행렬식을 구하면

〈표 2〉 (x)행열식

1.0	0	1.0	-1.0	1.0	0	0	-0.5	0	0.5	-1.0	-1.0
0	1.0	-1.0	0	0	-1.0	1.0	-0.5	0.5	0	1.0	1.0
0	0	1.0	0	0.5	0	-0.5	0	-0.5	0.5	-2.0	-3.0
1.0	0	1.0	1.0	-1.0	0	0	-0.5	0	0.5	1.0	-1.0
0	1.0	1.0	0	0	-1.0	-1.0	0.5	0.5	0	1.0	-1.0
0	0	1.0	0	-0.5	0	-0.5	0	0.5	0.5	2.0	-3.0
1.0	0	-1.0	1.0	1.0	0	0	0.5	0	0.5	1.0	1.0
0	1.0	1.0	0	0	1.0	1.0	0.5	0.5	0	-1.0	-1.0
0	0	1.0	0	-0.5	0	0.5	0	0.5	-0.5	-2.0	-3.0
1.0	0	-1.0	-1.0	-1.0	0	0	0.5	0	0.5	-1.0	1.0
0	1.0	-1.0	0	0	1.0	-1.0	-0.5	0.5	0	-1.0	1.0
0	0	1.0	0	0.5	0	0.5	0	-0.5	-0.5	2.0	-3.0

$\{\epsilon\} = [B]\{q\}$

$[B] = [H][A]^{-1}$

[H]행열식은

0	0	0	α_4	$\alpha_5 y$	0	0	0	0	0	$\alpha_{11} y^2$	$2\alpha_{12} x y^3$
0	0	0	0	0	α_6	$\alpha_7 x$	0	0	0	$-\alpha_{11} x^2$	$-2\alpha_{12} x^3 y$
0	0	0	0	$\alpha_5 x$	0	$\alpha_7 y$	α_8	$\alpha_9 x$	$\alpha_{10} y$	0	0

$[A]^{-1}$ 행열식은

0.250	-0.125	-0.250	0.250	0.125	-0.250	0.250	-0.125	0.250	0.250	0.125	0.250
-0.125	0.250	0.250	0.125	0.250	-0.250	-0.125	0.250	-0.250	0.125	0.250	0.250
0.1875	-0.1875	-0.125	0.1875	0.1875	-0.125	-0.1875	0.1875	-0.125	-0.1875	-0.1875	-0.125
-0.250	0	0.125	0.250	0	-0.125	0.250	0	0.125	-0.250	0	-0.125
0.250	0	0	-0.250	0	0	0.250	0	0	-0.250	0	0
0	-0.250	-0.125	0	-0.250	0.125	0	0.250	-0.125	0	0.250	0.125
0	0.250	0	0	-0.250	0	0	0.250	0	0	-0.250	0
-0.250	-0.250	0	-0.250	0.250	0	0.250	0.250	0	0.250	-0.250	0
0.250	0	-0.500	-0.250	0	0.500	0.250	0	0.500	-0.250	0	-0.500
0	0.250	0.500	0	-0.250	0.500	0	0.250	-0.500	0	-0.250	-0.500
0	0	-0.125	0	0	0.125	0	0	-0.125	0	0	0.125
0.0625	-0.0625	-0.125	0.0625	0.0625	-0.125	-0.0625	0.0625	-0.125	-0.0625	-0.0625	-0.125

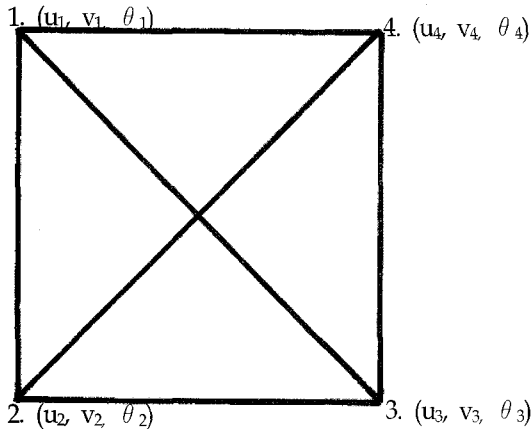
〈표 3〉 Sabir의 Vertex사각형판요소 강성도 행열식

1.1911	0.3474	-0.4042	-0.7869	-0.0177	0.3650	-0.3120	-0.3474	0.1086	-0.0922	0.0177	-0.1478
0.3474	1.1911	0.4042	0.0177	-0.0922	0.1478	-0.3474	-0.3120	-0.1086	-0.0177	-0.7869	-0.3650
-0.4042	0.4042	0.6619	0.3650	-0.1478	-0.0707	-0.1086	0.1086	-0.3638	0.1478	-0.3650	-0.0707
-0.7869	0.0177	0.3650	1.1911	-0.3474	-0.4042	-0.0922	-0.0177	-0.1478	-0.3120	0.3474	0.1086
-0.0177	-0.0922	-0.1478	-0.3474	1.1911	-0.4042	0.0177	-0.7869	0.3650	0.3474	-0.3120	0.1086
0.3650	0.1478	-0.0707	-0.4042	-0.4042	0.6619	0.1478	0.3650	-0.0707	-0.1086	-0.1086	-0.3638
-0.3120	-0.3474	-0.1086	-0.0922	0.0177	0.1478	1.1911	1.1911	-0.4042	0.0177	0.1478	0.4042
-0.3474	-0.3120	0.1086	-0.0177	-0.7869	0.3650	0.3474	-0.4042	0.6619	-0.3650	-0.3474	0.4042
0.1086	-0.1086	-0.3638	-0.1478	0.3650	-0.0707	0.4042	-0.4042	0.6619	-0.3650	0.1478	-0.0707
-0.0922	-0.0177	0.1478	-0.3120	0.3474	-0.1086	-0.7869	0.0177	-0.3650	1.1911	-0.3474	0.4042
0.0177	-0.7869	-0.3650	0.3474	-0.3120	-0.1086	-0.0177	-0.0922	0.1478	0.3474	1.1911	0.4042
-0.1478	-0.3650	-0.0707	0.1086	0.1086	-0.3638	-0.3650	-0.1478	-0.0707	0.4042	0.4042	0.6619

(7)식을 이용하여 Sabir의 z축 회전변위를 포함하는 강성도행렬식을 구성하면 아래의 표의 (값) $\times 10^6$ 과 같다.

5. 보의 강성도를 이용한 Vertex 강성도식

사각형유한요소가 <그림 4>처럼 보로 연결되었다고 가정하고 강성도 행렬식을 구성하여 사각형 요소의 z축회전 변위를 포함하는 강성도행렬식을 구성한다. 유한요소의 해에서 구하고자 하는 부재력의 정도(精度)는 강성도계수의 비례의 정도(精度) 여부에 의존하므로 Sabir가 구성한 강성도 행렬식 <표 3>와 비례값을 비교한다.



<그림 4> 보로 구성된 4각형 판요소

$E=219780\text{kg/cm}^2$ $\nu=0.5$ 이고 사각형판요소의 각 절점이 <그림 3>에서처럼 $b \cdot d \cdot L=1\text{cm} \cdot 2\text{cm}$ 의 보로 연결되었다고 가정하고 각 절점당 u, v, θ_z 의 3개의 자유도를 가지는 Plane요소 12×12 강성도행렬식을 구성하면 아래의 <표 4>와 같다.

<표 4> 보를 이용한 Plane Vertex 강성도 행렬식

$\frac{EA_x}{L} \cos \gamma^2 + \frac{12EI_z}{L^3} \sin \gamma^2$	$(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}) \cos \gamma \sin \gamma$	$-\frac{6EI_z}{L^2} \sin \gamma$
$(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}) \cos \gamma \sin \gamma$	$\frac{EA_x}{L} \sin \gamma^2 + \frac{12EI_z}{L^3} \cos \gamma^2$	$\frac{6EI_z}{L^2} \cos \gamma$
$-\frac{6EI_z}{L^2} \sin \gamma$	$\frac{6EI_z}{L^2} \cos \gamma$	$\frac{4EI_z}{L}$

K_B 행렬식은 Plane사각형요소의 3×3 행렬식으로 표 4와 같으며 K_0 행렬식은 요소가 0으로 된 3×3 행렬식이다.

<표 5> K_B 행렬식

K_B	K_0	K_0	$-K_B$
K_0	K_0	K_0	K_0
K_0	K_0	K_0	K_0
$-K_B$	K_0	K_0	K_B

보를 이용하여 Shell사각형요소를 구성하는 경우

<표 6> 보를 이용한 Shell사각형요소의 K_B

$\frac{EA_x}{L} \cos \gamma^2 + \frac{12EI_z}{L^3} \sin \gamma^2$	$(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}) \cos \gamma \sin \gamma$	0	0	0	$-\frac{12EI_z}{L^3} \sin \gamma$
$(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}) \cos \gamma \sin \gamma$	$\frac{EA_x}{L} \sin \gamma^2 + \frac{12EI_z}{L^3} \cos \gamma^2$	0	0	0	$\frac{12EI_z}{L^3} \cos \gamma$
0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	$\frac{6EI_y}{L^2} \sin \gamma$	$-\frac{6EI_y}{L^2} \cos \gamma$	0
0	0	$\frac{6EI_y}{L^2} \sin \gamma$	$\frac{GI_x}{L} \cos^2 \gamma + \frac{4EI_y}{L} \sin^2 \gamma$	$(\frac{GI_x}{L} - \frac{4EI_y}{L}) \cos \gamma \sin \gamma$	0
0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2} \cos \gamma$	$(\frac{GI_x}{L} - \frac{4EI_y}{L}) \cos \gamma \sin \gamma$	$\frac{GI_x}{L} \sin^2 \gamma + \frac{4EI_y}{L} \cos^2 \gamma$	0
$-\frac{12EI_z}{L^3} \sin \gamma$	$\frac{12EI_z}{L^3} \cos \gamma$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$

<표 7> 사각형판요소의 보강성도 이용 *Shell*강성도 행렬식

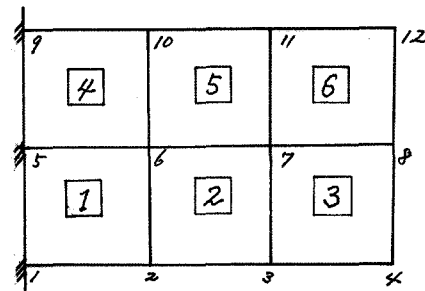
1.1768	-0.2209	0	0	0	0.2416	-0.1786	0	0	0	0	0.1786
-0.2209	1.1786	0	0	0	0	0	-0.7143	0	0	0	0
0	0	0.4202	-0.2416	-0.2416	0.1832	0	0	-0.1786	-0.1786	0	0
0	0	-0.2416	0.3767	0.0699	-0.4690	0	0	0.1786	0.1190	0	0
0	0	-0.2416	0.0699	0.3767	0	0	0	0	0	-0.0403	0
0.2416	0.2416	0	0	0	0.6445	-0.1786	0	0	0	0	0.1190
-0.1786	0	0	0	0	-0.1786	1.1786	0.2209	0	0	0	-0.2416
0	-0.7143	0	0	0	0	0.2209	1.1786	0	0	0	0.2416
0	0	-0.1786	0.1786	0	0	0	0	0.4202	0.2416	-0.2416	0
0	0	-0.1786	0.1190	0	0	0	0	0.2416	0.3767	-0.0699	0
0	0	0	0	-0.0403	0	0	0	-0.2416	-0.0699	0.3767	0
0.1786	0	0	0	0	0.1190	-0.2416	0.2416	0	0	0	0.6445

24×24요소로 구성되고 <표 6>의 K_B 행렬식(6×6)과 K_0 행렬식 (6×6)으로 구성된다.

의한 처짐값과 비교하면 아래의 <표 8>과 같다.

6. 수치예제3

<그림 5>의 *Cantilever*보의 탄성계수 $E=219780\text{kg/cm}^2$, 두께 $t=1\text{cm}$ 이고 *Cantilever*보를 구성하는 사각형판 유한요소의 각 변의 길이는 2cm이다. *Cantilever*보의 처짐의 정도(精度)비를 구하기 위하여 *Sabir*의 강성도 행렬식, 보이용 강성도 행렬식 및 *Sap2000 Software*의 *Plane*요소를 이용하여 처짐을 구하고 단위 하중법에



<그림 5> *Cantilever*보의 처짐

<표 8> *Cantilever*보의 처짐 비교

		단위 하중법	<i>Sabir</i> Vertex 강성도 행렬			보강성도이용 Vertex강성도 행렬			<i>Sap2000 Plane</i> 요소		
			11	23	35	11	23	35	8	16	24
수직변위	3×2	0.0614	0.0845	0.0805	0.0845	0.0861	0.0854	0.0861	0.0707	0.0693	0.0707
수평변위	3×2		0.0341	0	0.0341	0.0193	0	0.0193	0.0272	0	0.0272
회전변위	3×2		0.0214	0.0154	0.0214	0.0141	0.0138	0.0141			
수직변위	6×4								0.0754	0.0774	0.0948
수평변위	6×4								0.0285	0	0.0378
회전변위	6×4								0.0143	0.0144	0.0343
수직변위	12×8					0.0799	0.0821	0.0916	0.0770	0.0789	0.1029
수평변위	12×8					0.0204	0	0.0231	0.0288	0	0.0422
회전변위	12×8					0.0129	0.0116	0.0196	0.0149	0.0144	0.0588
수직변위	24×16								0.0776	0.0794	0.1101
수평변위	24×16								0.0289	0	0.0465
회전변위	24×16								0.0150	0.0141	0.1069

7. 결 론

판요소의 강성도식 구성에서 z (3)축 회전변위 강성도 계수의 정확한 값 산정이 되어있지 않으며 이는 고층 전단벽 구조의 강축방향으로 하중이 작용할 때 횡 변위 산정 및 강한 강성의 피로티구조와 전단벽이 연결된 경우 정확한 부재력산정에 어려움이 있다. z (3)축 회전변위 강성도 계수를 연구한 Sabir는 Drilling Degree of Freedom을 포함하는 사각형판 요소 강성도 요소는 <표 3>에서 수직변위 강성도 요소의 크기가 $1 \times 10^5 \times 1.1911$ 이고 회전변위의 크기는 $1 \times 10^5 \times 0.6619$ 이 되어 $\frac{1.1911}{0.6619} = 1.800$ 의 비를 얻었고 본 저자가 연구한 <그림4>의 보로 연결된 판 요소의 Vertex강성도 행렬식은 <표7>에서 수직 단위 변위 강성도 요소 값 $1 \times 10^5 \times 1.1768$ 이고 회전단위 변위의 값이 $1 \times 10^5 \times 0.6445$ 이 되어 $\frac{1.1768}{0.6445} = 1.826$ 의 비를 이루어 강성비(Stiffness Ratio)가 거의 같게 산정되어 부재력 해의 정도(精度)비가 우수하다는 것을 알 수 있다. 6.수치예제3의 Cantilever보의 처짐 비교에서 단위 하중법에 의한 처짐 크기 0.0614cm이고 각 절점 당 u, v, θ_z 의 자유도에 의한 Sabir강성도 처짐은 0.793cm, 각 절점 당 u, v, θ_z 의 자유도를 고려한 보강성도이용 Vertex강성도 처짐 값은 0.0595cm 각 절점 u, v ,당의 2개자유도만 고려한 Plane요소를 사용한 경우 0.0794cm가 되어 정확한 처짐 값에 수렴함을 알 수 있다.

참고문헌

1. Robert D. Cook, Finite Element Modelling for Stress Analysis, Johnwiley & Sons,Inc. p54, 1995
2. Lanheng Jin, Analysis and evaluation of a shell finite element with drilling degree of freedom, Master degree thesis of Maryland University,pp1-60,1994
3. Ansys Mnual, Element Reference>Part1. Element Library>SHELL63
4. Lanheng Jin, Analysis and evaluation of a shell finite element with drilling degree of freedom, Master degree thesis of Maryland University,pp1-60,1994
5. Stephen P. Timoshenko, Mechanics of Materials, 청문각
6. William Weaver,Jr., Matrix Analysis of Framed Structures, CHPAMAN&HALL
7. C.S. Desei, Elementary Finite Element Method, Prentice-Hall,INC,1979
8. D.J Allman, A compatible triangular element including vertex rotations for plane
9. Young W. Kwon,The Finite Element Method using matlab, CRC press
10. 권 택진, "응용유한요소해석,"희성출판사,1976
11. 최 창근, "유한요소법," 테크노프레스, pp384~387,2002
12. 김 용수,"Matlab입문과 활용,"높이깊이,2000