

최소자승법을 이용한 사장교의 적정 케이블 장력 결정

Determination of an Optimum Initial Cable Tension Force for Cable-Stayed Bridges using the Least Square Method

박 용 명¹⁾ · 조 현 준²⁾

Park, Yong Myung · Cho, Hyun Jun

요약 : 본 연구에서는 사장교의 적절한 초기평형상태 결정을 위하여 최소자승법을 이용한 케이블 장력 결정 방법을 제시하였다. 본 방법은 거더의 케이블 지지점을 지점으로 한 연속보로부터의 처짐 및 모멘트 등을 목표치로 하고 케이블을 포함한 사장교 전체계 해석으로부터 구해진 응답과의 차이를 오차로 정의하여 거더 및 주탑의 오차를 최소화하는 방법이다. 특히, 주탑 모멘트, 거더 모멘트, 그리고 처짐의 보정 정도를 가중행렬을 도입하여 선택적으로 조절할 수 있으며, 여러 가지 사장교 형식에 대한 수치예제 및 기존 연구와의 비교를 통하여 본 방법의 효율성 및 타당성을 검증하였다.

ABSTRACT : This study presents a method of determining the optimum cable tension forces for the proper initial equilibrium state of a cable-stayed bridge using the least square method. The proposed method minimizes the errors, i.e., the differences, such as the deflection and the moments of the girder and the tower, between the target values from a continuous beam by considering the cable anchor point as supports of the girder and the responses obtained from the analysis of the entire cable-stayed bridge system. Especially, the proposed method can selectively control the adjustment of the tower moment, the girder moment, and the deflections by introducing the weighing matrix. Through numerical analysis and comparisons with existing studies, the usefulness and validity of the proposed method was verified.

핵심 용어 : 사장교, 초기평형상태, 케이블 장력, 최소자승법, 가중행렬

KEYWORDS : cable-stayed bridge, initial equilibrium state, cable tension force, the least square method, weighting matrix

1. 서론

사장교는 주탑과 거더에 연결된 사장케이블의 인장력을 적절히 조절하여 각 구조부재의 단면력을 가능한 균등하게 분배시키는 교량형식으로 미관과 기능성이 뛰어나 오늘날 현수교와 더불어 장대교량으로써 많은 각광을 받고 있다. 그러나 사장교는 구조적 특성상 고차의 부정정성을 띄고 긴 경간으로부터 발생하는 상대적인 큰 처짐, 케이블의 비선형적인 거동과 사장 케이블로 인해 유발되는 거더와 주탑에서의 압축력은 사장교의 거동에 큰 영향을 미치며 계산 절차를 까다롭고 복잡하게 하기 때문에 엄밀하면서도 효율적인 케이블 장력의 결정이 필요하다.

사장교의 초기평형상태 결정은 적절한 케이블 장력을 산정

하여 완성 후의 구조물의 형상이 설계형상과 최대한 일치하도록 하고 주탑의 모멘트를 최소화하며 거더의 모멘트를 고르게 분포시키는데 그 목적이 있다. 초기평형상태 결정을 위한 기존의 방법으로 크게 반복법, 변형에너지 최소화 방법, 초기 부재력 도입법, TCUO법 등이 있다.

먼저 반복법(Wang 등, 1993)은 고정하중에 의해 발생하는 장력을 케이블의 초기장력으로 고려하여 장력이 수렴할 때까지 반복 계산에 의해 최종 장력을 결정하는 방법으로 수행 횟수가 비교적 많고 정확한 초기형상을 구현하기가 어렵다. 변형에너지 최소화방법(Furukawa 등, 1987)은 거더에 발생하는 축력 및 휨 변형에너지를 최소화하는 방법으로 멀티케이블 사장교와 같이 변수가 많은 경우 정확한 초기형상을 구현하기 어렵고 비선형성을 적용하기 힘들다. 그리고 초기부재력

1) 정회원, 부산대학교 토목공학과 부교수
(Tel. 051-510-2350, Fax. 051-513-9596, E-mail : ympk@pusan.ac.kr)

2) 부산대학교 토목공학과 박사과정(hjcho@pusan.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2006년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

도입 방법(Wang 등, 1996; 김제춘 등, 1999)은 케이블 장력을 포함한 모든 부재력을 반대 방향의 초기하중으로 도입하여 반복 해석을 수행하는 방법으로 처음 가정한 케이블 장력의 크기가 수렴 속도에 큰 영향을 미치는 문제점이 있다. 한편 TCUD법(Kim 등, 2001)은 케이블의 무응력 길이를 변수로 하고 평형방정식과 기하학적 제한 조건식을 이용하여 초기 평형시의 케이블 장력을 구하는 방법으로 거더와 주탑의 압축력으로 인한 변위를 제거할 수 없다. 이후 이러한 TCUD법의 문제점을 해결하기 위해 초기부재력 도입법과 TCUD법을 혼합한 방법(김문영 등, 2003)도 발표되었다.

본 연구에서는 사장교의 적절한 초기평형상태 결정을 위하여 최소자승법을 이용한 케이블 장력 결정 방법을 제시하였다. 본 방법은 거더의 케이블 지지점을 지점으로 한 연속보로부터의 처짐 및 모멘트 등을 목표치로 정하고 케이블을 포함한 전체계의 해석으로부터 구해진 응답과의 차이를 오차로 정의하여 거더 및 주탑의 오차를 최소화하는 방법이다. 특히 주탑 모멘트, 거더 모멘트, 그리고 처짐의 보정 정도를 가중 행렬을 도입함으로써 설계자가 원하는 의도에 따라 선택적으로 조절할 수 있으며, 여러 가지 사장교 형식에 대한 수치예제 및 기존 연구와의 비교를 통하여 본 방법의 효율성 및 타당성을 입증하였다.

2. 비선형 거동의 모사

사장교 해석시 비선형성을 고려해야 하는 주된 원인으로는 여러 가지가 있으며, 그 중에서 큰 영향을 미치는 요인으로는 새그(sag)에 의한 케이블의 비선형 거동과 거더와 주탑에 작용하는 큰 압축력에 의한 휨강성의 변화를 들 수 있다(Wang 등 1996; Karoumi 1999).

2.1 케이블 부재의 기하학적 비선형 거동

케이블은 양단이 지지되어 있고 자중과 외적으로 작용하는 축방향 인장력에 의해 그림 1과 같이 현수선의 형태로 처진다. 장대 경간 사장교에서는 케이블의 길이가 길어지고 케이블 자체의 자중이 커서 새그량이 커지므로 탄성계수가 현저하게 감소하게 되는데, 특히 고정하중 상태에서 응력이 다른 부위에 비해 낮고 길이가 긴 단부에 정착되는 케이블에서는 이러한 탄성계수 감소의 영향이 더욱 심하다. 본 연구에서는 케이블의 새그로 인한 비선형성을 고려하기 위해 식 (1)에 나타난 Ernst의 등가탄성계수(Troitsky, 1988)를 사용하여 케이블을 등가 트러스요소로 모델링하였다.

$$E_{eq} = \frac{E}{\left(1 + \frac{w^2 l^2}{12 T^3} EA\right)} \quad (1)$$

여기서, E_{eq} 는 케이블 새그를 고려한 등가탄성계수로 w 는 케이블의 단위길이당 중량, l 은 케이블의 수평 길이이며 T 는 케이블에 작용하는 인장력이다.

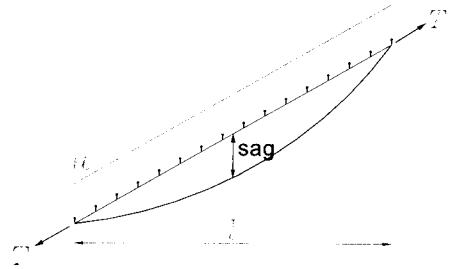


그림 1. 케이블 새그(sag)에 의한 효과

2.2 보-기둥 부재의 비선형성

사장교의 거더와 주탑에서는 큰 압축력과 휨모멘트가 동시에 작용하고, 이들의 상호작용으로 비선형 거동을 보인다. 이것은 휨강성 감소의 영향을 반영하는 안정함수를 사용하여 그 효과를 나타낼 수 있으나, 본 연구에서는 모멘트 제어를 위주로 한 케이블 장력을 산정하는 기법을 제시하는 것에 중점을 두고 있어 보-기둥 부재의 비선형성은 고려하지 않았다.

2.3 사용 프로그램

적절한 초기평형상태의 결정을 위해 본 논문에서는 범용 프로그램인 MIDAS/CIVIL을 사용하였다. 케이블은 인장 전담 트러스 요소에 Ernst의 등가탄성계수를 적용하여 모사하고, 거더와 주탑은 3차원 보요소로 모사하여 다음에 제시한 알고리즘으로 반복적인 해석을 수행하였다.

3. 초기평형상태의 결정

사장교는 하중이 가해지면 케이블에 장력이 도입되면서 평형상태에 도달하게 되는데, 이 때 형상과 부재력이 설계자가 원하는 값으로 맞추어져야 한다. 따라서 초기평형상태를 결정하는 문제는 완성된 구조계의 거동과 부재력들이 적절한 상태에 이를 수 있도록 하는 케이블의 장력을 결정하는 것이라 할 수 있다.

일반적으로 가장 이상적인 상태는 1)거더는 케이블이 지지된 곳을 지점으로 한 연속교와 같은 모멘트 분포를 보이며,

2)주탑부는 수평 처짐과 모멘트가 가급적 발생하지 않아야 한다. 그러나 사장교는 고차의 부정정 구조물이고 구조물의 비대칭성과 압축력에 의한 주탑과 거더의 축방향 변형 등으로 이러한 사항들을 모두 정확하게 만족하는 케이블 장력을 결정한다는 것은 거의 불가능하다. 본 연구에서는 이상적인 상태에 부합하는 사장교에서의 처짐과 모멘트를 목표치로 정하고 전체계 해석에서 구해진 처짐과 모멘트의 차이가 목표치에 대해 최소가 되도록 최소자승법을 이용하여 적정 케이블 장력이 얻어질 때까지 반복 해석하는 방법을 제시하였다.

3.1 최소자승법을 이용한 오차의 최소화

구조계가 원하는 평형 상태에 이를 수 있도록 하는 케이블 장력을 산정하기 위해 맞추고자 하는 항목(처짐, 모멘트 등)으로 구성된 목표치 벡터 $\{D, M\}^{(0)}$ 와 전체계 해석 결과로부터 나온 그 항목들에 대한 해석치 벡터 $\{D, M\}^{(i)}$ 의 차이를 오차 벡터 $\{r\}^{(i)}$ 라 한다면 보정하여야 할 장력의 벡터 $\{\Delta T\}^{(i)}$ 는 단위 장력에 의한 처짐과 모멘트의 응답으로 구성되는 영향행렬 $[F]$ 를 사용하여 다음 식과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 i 는 반복 횟수를 말한다.

$$\{\Delta T\}^{(i)} = [F]^{-1} \{r\}^{(i)} = [F]^{-1} (\{D, M\}^{(0)} - \{D, M\}^{(i)}) \quad (2)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} (f_{GD}^1 \cdots f_{GD}^k)^T & \cdots & (f_{GD}^1 \cdots f_{GD}^k)^T \\ (f_{TD}^1 \cdots f_{TD}^k)^T & \cdots & (f_{TD}^1 \cdots f_{TD}^k)^T \\ (f_{GM}^1 \cdots f_{GM}^k)^T & \cdots & (f_{GM}^1 \cdots f_{GM}^k)^T \\ (f_{TM}^1 \cdots f_{TM}^k)^T & \cdots & (f_{TM}^1 \cdots f_{TM}^k)^T \end{bmatrix} \quad (3)$$

GD : Girder Displacement TD : Tower Displacement
 GM : Girder Moment TM : Tower Moment
 n : Number of cables k : number of errors

만약, 목표치 항목이 케이블의 개수와 일치한다면 영향행렬 $[F]$ 가 정방행렬이 되므로 각 케이블에 요구되는 장력을 구하는데 식 (2)가 직접 사용될 수 있지만, 일반적으로 보정하고자 하는 처짐 및 모멘트 항목 수가 케이블 수보다 많기 때문에 $[F]$ 는 정방행렬이 되지 않고 식 (2)는 부정방식이 된다. 이 경우 최소자승법을 적용한 다음 식으로부터 장력의 보정량을 구할 수 있을 것이다.

$$\{\Delta T\}^{(i)} = ([F]^T [F])^{-1} [F]^T \{r\}^{(i)} \quad (4)$$

한편, 식 (4)에서 처짐과 모멘트를 동시에 보정하고자 할 경

우 두가지 경우를 고려할 필요가 있다. 즉, 보정 항목이 서로 다른 차원을 가지므로 차원에 대한 보정이 필요하거나, 또는 설계자가 의도하는 바에 따라 특정 항목에 대해 가중치를 부여하여 특정 항목을 집중적으로 보정하고자 할 경우가 있다. 따라서, 이러한 문제의 해결을 위해 가중행렬 $[\rho]$ 를 도입하면 식 (4)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\Delta T\}^{(i)} = ([F]^T [\rho] [F])^{-1} [F]^T [\rho] \{r\}^{(i)} \quad (5)$$

여기서, 가중행렬 $[\rho]$ 는 오차 항목수 만큼의 행과 열을 가지는 정방행렬로서 각 항목 별로 가중치를 설정하여 식 (6)과 같이 구성할 수 있다.

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_{GD} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{TD} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{GM} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{TM} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ρ_{GD} , ρ_{TD} , ρ_{GM} , ρ_{TM} 은 각각 거더의 처짐, 주탑의 처짐, 거더 모멘트, 그리고 주탑 모멘트에 대한 가중치를 나타낸다.

3.2 케이블 장력 산정 알고리즘

사장교는 주탑과 거더에 축방향으로 압축력이 발생하기 때문에 축방향 변형이 발생하는데 이것은 제작 캠버로 고려가 가능하다(김재춘 등, 1999). 따라서, 본 연구에서는 초기평형 상태에서의 케이블 장력을 산정하는데 있어 가상의 큰 단면적을 사용하여 축방향 변형을 구속시킨 상태에서 최소자승법을 이용하여 케이블 장력을 보정하고 장력이 일정한 값에 수렴할 때까지 반복 수행하는 방법을 적용하였다. 그리고 가중행렬을 적절히 설정함으로써 특정 부재(거더 또는 주탑)의 처짐이나 모멘트를 선택적으로 보정할 수 있는 방법을 도출하였다. 그 단계별 과정은 다음과 같고 세부적인 알고리즘은 그림 5에 나타내었다.

단계 1) 맞추고자 하는 목표 항목을 선정한 후 그림 2와 같이 케이블로 지지된 점을 지점으로 대치한 연속교(이하 연속교 모델 혹은 Target Model)로부터 나온 처짐과 모멘트를

맞추어야 할 항목 수만큼 목표치 벡터로 설정한다.

단계 2) 케이블 구조물의 해석시, 케이블 장력의 초기값 가정이 필요한데, 본 연구에서는 그림 3과 같이 단계2에서 설정한 연속교 모델에서 중앙 경간의 지점 반력을 해당 케이블 경사의 정현성분으로 나누어 중앙 경간 케이블의 초기 장력으로 가정하고, 측경간 케이블 장력은 대응되는 중앙경간 케이블 장력을 적용한다.

단계 3) 그림 4와 같이 케이블을 하나씩 차례대로 제거시키면서 케이블의 단위장력에 해당하는 단위하중을 전체체에 작용시켜 맞추고자 하는 항목에 해당되는 점에서의 처짐과 모멘트 응답을 구하여 영향행렬을 구성한다. 그리고 필요시 가중행렬을 적절히 설정한다.

단계 4) 단계1에서 설정한 목표치 벡터와 단계2에서 가정된 초기장력에 의한 전체체 해석으로부터 나온 처짐과 모멘트의 차이를 오차벡터로 설정하고 최소자승법에 의해 보정해야 할 장력을 산출한 뒤 보정을 행한다.

단계 5) 케이블 장력의 변화량이 설정한 오차 범위 이내에 수렴할 때까지 단계3~단계4를 반복 수행하여 최종 초기평형상태의 장력을 결정한다.

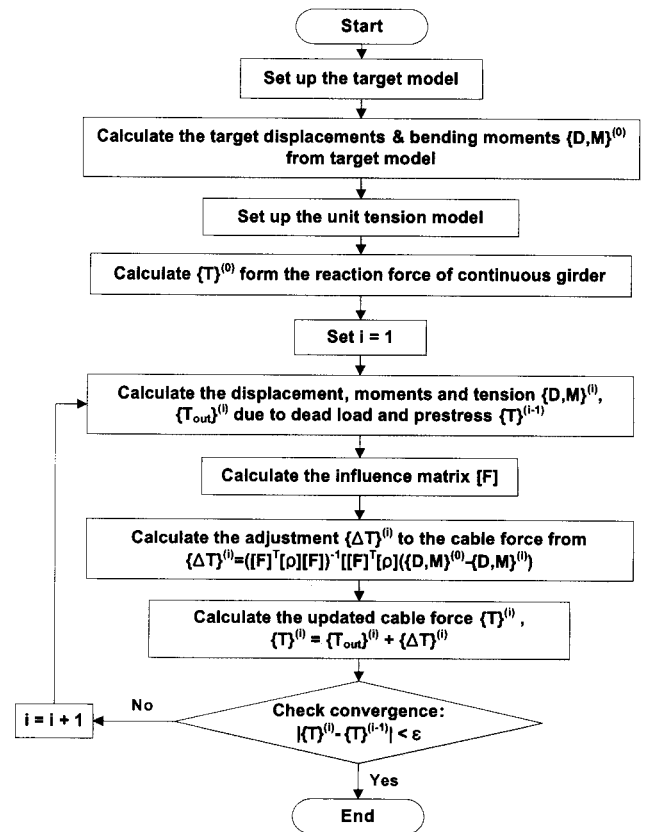


그림 5. 초기평형상태 결정 알고리즘

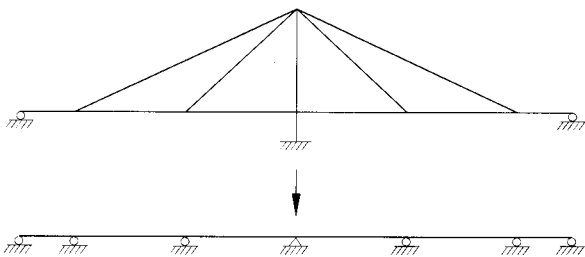


그림 2. 단계1 : 사장교 모델로부터의 연속교 모델 설정

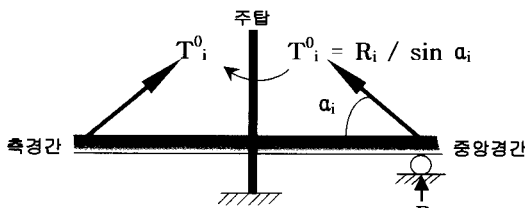


그림 3. 단계2 : 초기 케이블 장력의 가정

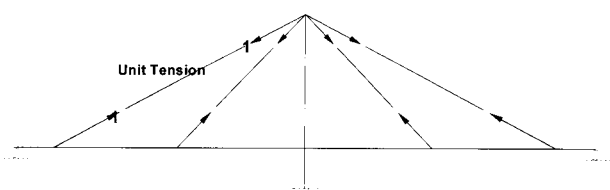


그림 4. 단계3 : 단위하중에 의한 영향행렬의 구성

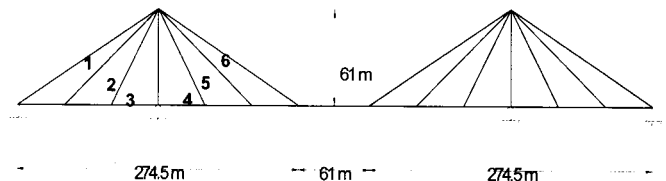


그림 6. 2차원 방사형 사장교

4. 수치 예제

기존의 연구(Wang 등, 1996; 김제춘 등, 1999)에서 사용되었던 2차원의 방사형, 하프(Harp)형 및 팬(Fan)형 사장교를 선정하여 제시된 알고리즘으로 해석을 수행하고 그 값을 비교하기로 한다.

4.1 방사형 사장교

본 예제는 그림 6에 보이는 바와 같이 12개의 케이블로 지지된 총지간이 610m이고 주탑의 높이가 61m인 대칭 방사형 사장교로 그 제원은 표 1과 같다.

표 1. 방사형 사장교의 단면상수 및 물성치

Member	E(GPa)	A(m ²)	I(m ⁴)	w(kN/m)
Exterior cable	207	0.042	-	3.2
Interior cable	207	0.016	-	1.2
Girder	207	0.320	1.131	87.5
Tower(~20.3)	207	0.269	0.432	-
Tower(~40.6)	207	0.228	0.345	-
Tower(~61)	207	0.203	0.211	-

주탑과 거더의 연결부는 그림 7(a)와 같이 실제 교량 모델과 동일하게 구현되어야 하나, 여기서는 기존 연구와의 비교를 위해 그림 7(b)와 같이 주탑과 거더를 강절로 고려하였다.

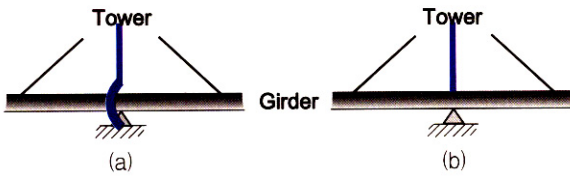


그림 7. 주탑과 거더의 연결부

먼저, 그림 8과 같이 거더에서 케이블로 지지된 점을 지점으로 재구성한 연속교 모델(Target Model)을 설정한 후 고정하중이 작용할 때의 반력을 케이블 방향의 정현성분으로 나눈 값을 초기장력으로 가정한다. 그리고 표 2와 같이 고정하중 하에서의 연속교의 처짐과 모멘트를 목표치로 하여 오차 항목을 구성하고 전체계에 단위하중을 순차적으로 작용시켜 36(오차 항목수)×12(케이블 수)의 영향행렬을 구성한다.



그림 8. 케이블 지지점을 지점으로 구성한 연속교 모델

표 2. 방사형 사장교의 오차항목 및 목표치

오차항목 (항목수) : 총 36	목표치
• 거더의 수직 처짐 (11)	• 거더의 수직 처짐 : 0.0 (cm)
• 주탑의 수평 처짐 (6)	• 주탑의 수평 처짐 : 0.0 (cm)
• 거더의 모멘트 (13)	• 연속교 모델에서의 모멘트값
• 주탑의 모멘트 (6)	• 주탑의 모멘트 : 0.0 (kN·m)

축방향 변형을 구속하기 위해 실제 단면적의 10⁶배에 해당하는 가상 단면적을 사용하여 축강성을 크게 하였으며, 본 예제에서 가중행렬은 거더와 주탑의 처짐 및 모멘트에 대해 모두 기본값(=1)을 적용하였다.

수렴조건으로 케이블 장력 변화율의 0.1%를 적용하여 해석을 수행한 결과 반복횟수 3회 만에 이를 만족하였는데, 그 결

과는 표 3과 같고 반복 횟수에 따른 케이블 장력의 수렴도는 그림 9와 같다.

한편, 거더와 주탑에 발생하는 처짐과 모멘트의 값은 표 4에 보인 바와 같다. 거더의 처짐과 모멘트는 구조의 대칭성을 감안하여 총지간의 절반 부분만 그림 10과 그림 11에 도시하였다. 그리고 주탑의 처짐과 모멘트는 각각 그림 12와 그림 13에 나타 내었다. 최대 처짐은 거더의 중앙에서 2.07cm, 주탑의 최상단에서 0.027cm가 발생하였으며 거더와 주탑의 최대 모멘트는 각각 17,167 kN·m, 82.13 kN·m가 발생하였다.

그림 10과 11에서 거더의 처짐과 모멘트는 연속보에서의 값과 거의 일치함을 알 수 있다. 그리고 그림 12와 그림 13으로부터 주탑의 수평 처짐은 0에 가까운 값이 나왔으며 주탑의 모멘트 또한 좌, 우측을 전체적으로 비교해 볼 때 기존의 연구보다 목표치에 더 가깝게 나왔음을 알 수 있다.

표 3. 방사형 사장교의 케이블 장력 (kN)

Cable no.	Wang (1996)	Present study		
		Initial*	1st iter.	Determined (3)
1	10,745	12,655	11,474	11,473
2	8,267	9,307	8,300	8,299
3	4,797	10,111	4,885	4,888
4	4,554	10,111	5,137	5,147
5	7,815	9,307	6,815	6,817
6	11,313	12,655	12,661	12,654

* 연속보 반박으로부터 도출한 초기 가정 장력, ()의 숫자는 총 반복횟수를 의미.

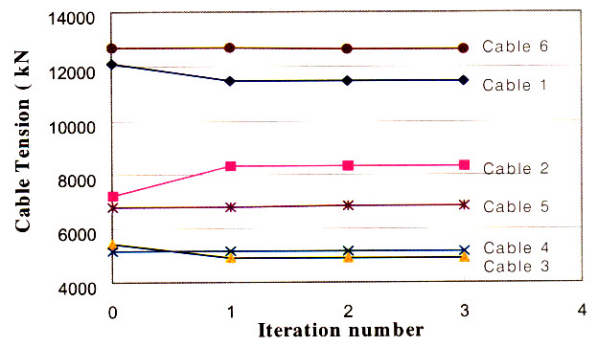


그림 9. 방사형 사장교의 케이블 장력 수렴도

표 4. 방사형 사장교의 처짐 및 모멘트값

구분	Displacement (cm)		Moment (kN·m)	
	거더(중앙)	주탑	거더(중앙)	주탑
Target Model	2.06	0.0	17,156	0.0
Wang (1996)	2.13	0.3	21,408	187.84
Present	2.07	0.027	17,164	82.13

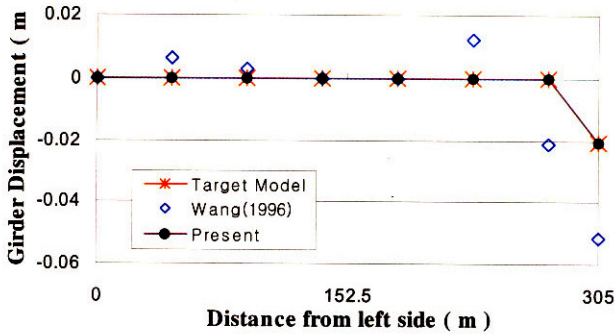


그림 10. 방사형 사장교의 거더 처짐도

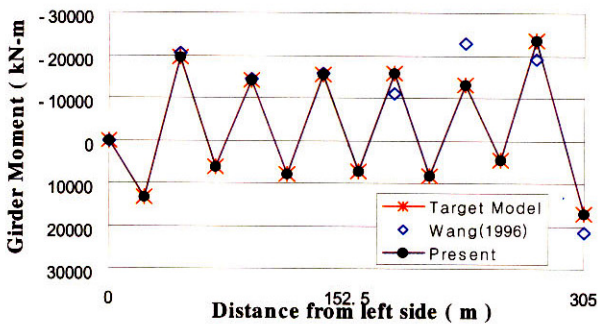


그림 11. 방사형 사장교의 거더 모멘트도

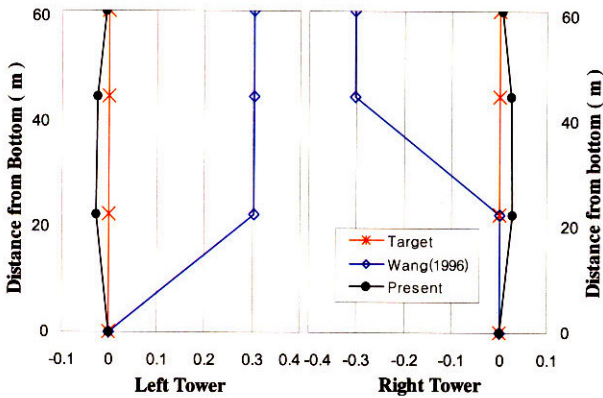


그림 12. 방사형 사장교의 좌,우 주탑 수평 처짐도 (cm)

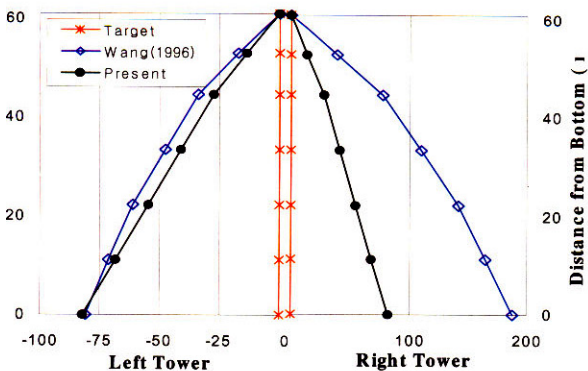


그림 13. 방사형 사장교의 좌,우 주탑 모멘트도 (kN-m)

4.2 하프형 사장교

본 예제에서는 그림 14와 같이 앞의 예제교량에서 케이블 정착 위치만 바꾼 하프형 사장교를 고려하였으며 그 제원은 표 5와 같다. 하프형 사장교는 방사형 사장교에 비해 케이블 장력의 수평 성분이 상대적으로 크기 때문에 주탑의 모멘트가 크게 발생하고 케이블 장력의 변동에 따라 구조계가 민감하게 거동한다.

거더의 처짐은 시공 과정에서 캠버로 조절 가능하므로 여기서는 좀 더 효율적인 모멘트 분포를 얻기 위하여 표 6에 보인 세 가지 경우를 고려하였다. 즉, Case 1은 가중행렬에서 주탑 및 거더의 모멘트와 처짐에 해당되는 가중치를 모두 1로 두었고, Case 2-A, B는 거더 모멘트를 중점적으로 목표치에 맞추기 위해 가중행렬에서 거더 모멘트에 해당되는 가중치를 각각 10^3 , 10^6 으로 적용시킨 경우이며, Case 3-A, B는 주탑의 모멘트를 중점적으로 목표치에 맞추기 위해 주탑 모멘트에 해당되는 가중치를 10^3 , 10^6 으로 설정한 경우이다.

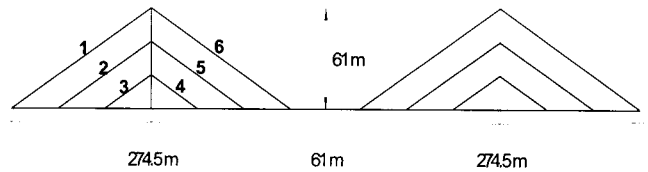


그림 14. 2차원 하프형 사장교

표 5. 하프형 사장교의 단면상수 및 물성치

Member	E(GPa)	A(m ²)	I(m ⁴)	w(kN/m)
Exterior cable	207	0.042	-	3.2
Interior cable	207	0.016	-	1.2
Girder	207	0.320	1.131	87.5
Tower(~20.3)	207	0.269	0.432	-
Tower(~40.6)	207	0.228	0.345	-
Tower(~61)	207	0.203	0.211	-

표 6. 거더 및 주탑부에 대한 가중행렬의 설정

Part	Case 1	Case 2		Case 3	
		A	B	A	B
ρ_{GD}	1	1	1	1	1
ρ_{TD}	1	1	1	1	1
ρ_{GM}	1	10^3	10^6	1	1
ρ_{TM}	1	1	1	10^3	10^6

케이블의 초기 장력 산정을 위한 연속교 모델과 오차항목의 설정은 앞의 예제교량과 동일하다. 수렴 조건을 케이블 장력

의 변화율 0.1%로 적용하여 해석을 수행한 결과, 다섯 가지 경우 모두 반복수행 4회 만에 수렴하였다. 그 결과는 표 7과 같고 케이블 장력의 수렴도는 그림 15와 같다.

한편, 각 경우에 대하여 거더 중앙점에서의 수직 처짐과 모멘트, 그리고 주탑의 최대 수평 처짐과 최대 모멘트값은 표 8에 보인 바와 같다. 그림 16은 각 경우별 거더의 처짐을, 그림 17은 거더의 모멘트를 나타낸 것이다. 그리고 그림 18과 그림 19는 각각 주탑의 처짐과 모멘트 분포를 전체 사장교의 절반 부분에 대해 나타낸 것이다.

가중치에 따른 결과의 변화를 보면 거더의 모멘트에 가중치를 둔 Case 2-B의 경우, Case 1에 비해 거더의 모멘트 분포가 연속교 모델에 좀 더 가깝게 나왔으나 주탑의 모멘트가 목표치에 멀어지는 경향을 보였다. 반면, 주탑의 모멘트에 가중치를 둔 Case 3-B의 경우에는 거더의 모멘트가 연속교 모델에서 다소 멀어졌으나 가중치를 크게 적용시킨 주탑의 모멘트가 Case 1에 비해 목표치에 가까이 분포함을 알 수 있다. 이로부터 특정 항목에 대한 가중행렬의 값을 크게 설정할수록 해당 항목의 값이 목표치에 더욱 근접해짐을 알 수 있다.

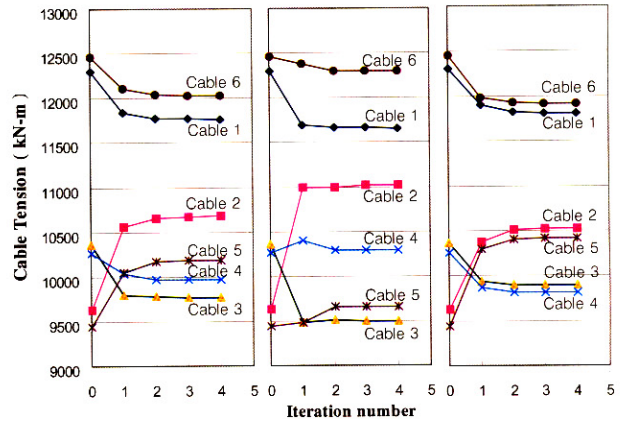
표 7. 하프형 사장교의 케이블 장력 (kN)

Cable no.	Wang (1996)	Present study					
		Initial*	Determined				
			Case 1 (4)	Case 2-A (4)	Case 2-B (4)	Case 3-A (4)	Case 3-B (4)
1	11,173	12,655	11,767	11,660	11,659	11,812	11,812
2	10,688	9,307	10,679	11,023	11,024	10,529	10,529
3	9,099	10,111	9,772	9,503	9,502	9,895	9,895
4	8,999	10,111	9,964	10,294	10,295	9,817	9,817
5	10,501	9,307	10,189	9,665	9,663	10,419	10,419
6	11,330	12,655	12,034	12,296	12,297	11,919	11,919

* 연속교 반력으로부터 도출한 초기 가정 장력. ()의 숫자는 총 반복횟수를 의미.

표 8. 하프형 사장교의 처짐 및 모멘트값

구분	부위	Displacement (cm)		Moment (kN-m)	
		거더(중앙)	주탑	거더(중앙)	주탑
Target Model	-	2.06	0.0	17,156	0.0
Wang (1996)	-	3.66	1.52	21,601	3,048
Case 1	-	2.72	1.85	21,809	4,978
Case 2	A	2.32	2.14	20,260	11,865
	B	2.31	2.14	20,255	11,888
Case 3	A	2.99	1.46	22,507	1,992
	B	2.99	0.54	22,508	1,988



(a) case 1 (b) case 2-B (c) case 3-B
그림 15. 방사형 사장교의 케이블 장력 수렴도

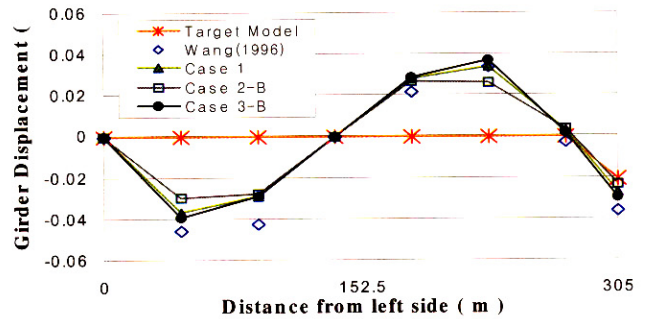


그림 16. 하프형 사장교의 거더 처짐도

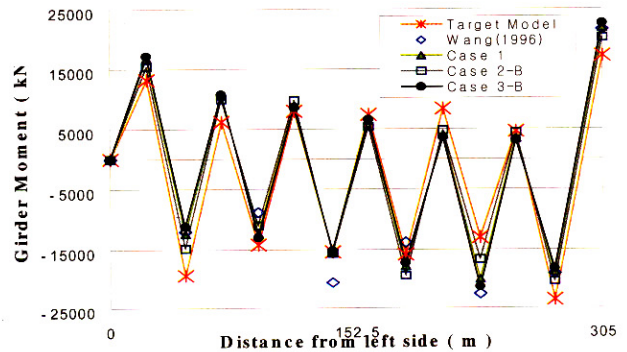


그림 17. 하프형 사장교의 거더 모멘트도

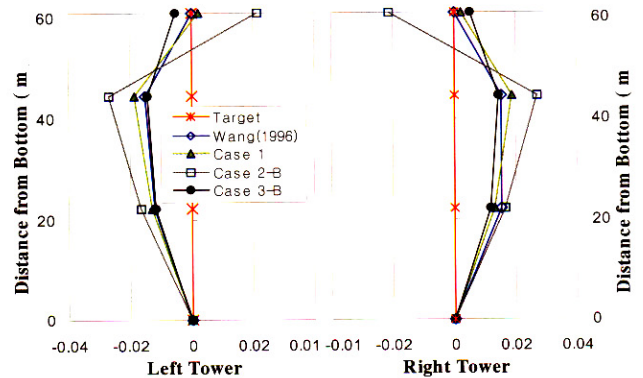


그림 18. 하프형 사장교의 좌·우 주탑 처짐도 (m)

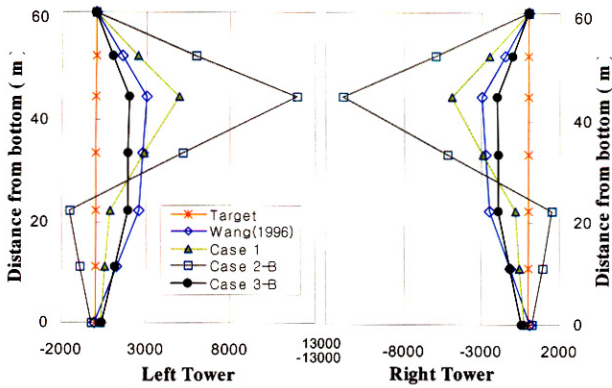


그림 19. 하프형 사장교의 좌·우 주탑 모멘트도 (kN-m)

4.3 팬(Fan)형 사장교

마지막 예제로 28개의 멀티케이블 형식으로 구성된 팬형 사장교를 고려하였다. 형상 및 경계 조건은 그림 20과 같으며 교량의 제원은 표 9와 같다.

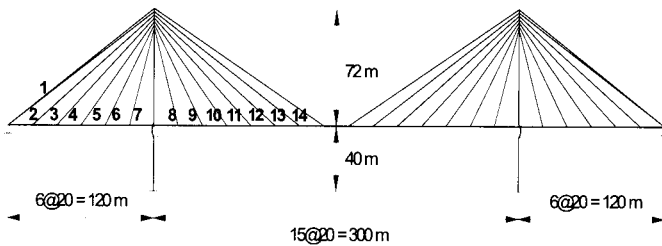


그림 20. 2차원 팬(Fan)형 사장교

표 9. 팬형 사장교의 단면상수 및 물성치

Member	E(GPa)	A(m ²)	I(m ⁴)	w(kN/m)
Cable	200	0.01	-	0.78
Girder	200	1.06	1.00	167.2
Tower	200	1.21	1.30	145.2

본 교량에서도 선택적인 모멘트 제어를 위해 가중행렬에서 거더와 주탑의 모멘트 부분의 가중치를 표 10과 같이 설정하였다. 오차항목은 표 11과 같이 구성하였으며, 따라서 영향행렬은 86(오차항목수)×28(케이블수)의 비정방 행렬이 된다. 거더 모멘트 목표치를 위한 연속교 모델은 그림 21과 같다.

수렴조건으로 케이블 장력의 변화율 0.1%를 적용하여 본 알고리즘에 의해 해석을 수행한 결과 Case 3-B는 반복수행 4회 만에, 나머지 경우는 2회 만에 케이블 장력이 수렴하였다. 최종 결정된 케이블 장력과 반복수행에 따른 케이블 장력의 수렴도는 각각 표 12와 그림 22에 나타내었다.

표 10. 거더 및 주탑부에 대한 가중행렬의 설정

Part	Case 1	Case 2		Case 3	
		A	B	A	B
ρ_{GD}	1	1	1	1	1
ρ_{TD}	1	1	1	1	1
ρ_{GM}	1	10^3	10^6	1	1
ρ_{TM}	1	1	1	10^3	10^6

표 11. 팬형 사장교의 오차항목 및 목표치

오차항목 (항목수) : 총 86	목 표 치
• 거더의 수직 처짐 (24)	• 거더의 수직 처짐 : 0.0 (cm)
• 주탑의 수평 처짐 (14)	• 주탑의 수평 처짐 : 0.0 (cm)
• 거더의 모멘트 (26)	• 연속교 모델에서의 모멘트값
• 주탑의 모멘트 (22)	• 주탑의 모멘트 : 0.0 (kN·m)

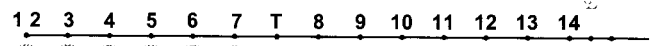
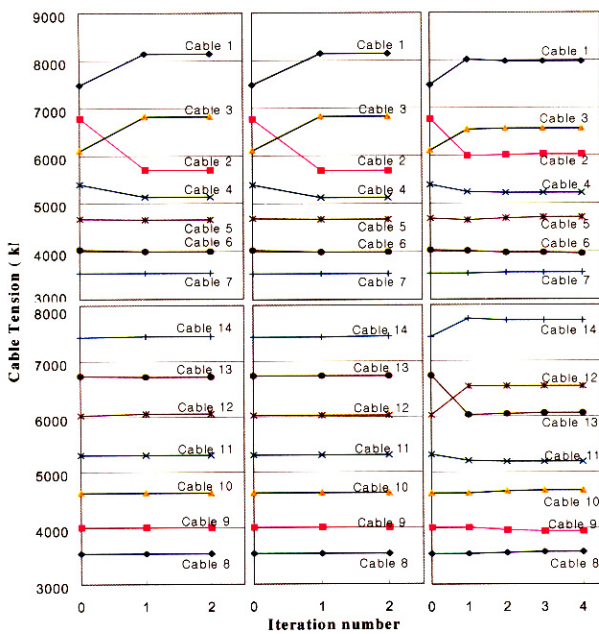


그림 21. 케이블 지지점을 지점으로 구성한 연속교 모델

표 12. 팬형 사장교의 케이블 장력 (kN)

Cable no.	Kim (1999)	Present study					
		Initial	Determined				
			Case 1 (2)	Case 2-A (2)	Case 2-B (2)	Case 3-A (2)	Case 3-B (4)
1	8,200	7,446	8,150	8,155	8,155	8,020	7,973
2	5,648	6,744	5,705	5,693	5,693	5,996	6,032
3	6,827	6,031	6,817	6,827	6,827	6,564	6,564
4	5,130	5,318	5,134	5,130	5,130	5,237	5,228
5	4,675	4,631	4,675	4,675	4,675	4,669	4,713
6	4,004	4,014	4,004	4,004	4,004	4,014	3,971
7	3,553	3,551	3,553	3,553	3,553	3,549	3,563
8	3,551	3,551	3,551	3,551	3,551	3,556	3,574
9	4,014	4,014	4,014	4,014	4,014	4,000	3,953
10	4,631	4,631	4,631	4,631	4,631	4,634	4,680
11	5,318	5,318	5,314	5,318	5,318	5,211	5,196
12	6,033	6,031	6,051	6,031	5,031	6,535	6,553
13	6,741	6,744	6,716	6,744	6,744	6,052	6,062
14	7,447	7,446	7,458	7,445	7,445	7,551	7,721

* 연속보 반력으로부터 도출한 초기 가정 장력. ()의 숫자는 총 반복횟수를 의미.



(a) case 1 (b) case 2-B (c) case 3-B

그림 22. 팬형 사장교의 케이블 장력 수렴도

한편, 각 경우에 대하여 거더 중앙점의 수직 처짐과 모멘트, 그리고 주탑의 최대 수평 처짐과 최대 모멘트는 표 13에 보인 바와 같다. 그림 23은 각 경우별 거더의 처짐을, 그림 24는 거더의 모멘트를 나타낸 것이다. 그리고 그림 25와 그림 26은 각각 주탑의 수평 처짐과 모멘트 분포를 도시한 것이다.

가중치에 따른 결과의 변화를 보면 거더의 모멘트에 가중치를 둔 Case 2-B와 가중치를 모두 기본값으로 설정한 Case 1이 주탑 모멘트 부분에 가중치를 크게 둔 Case 3-B보다 연속교 모델의 거동에 더욱 가까움을 알 수 있다. 반면, 주탑의 모멘트에 가중치를 둔 Case 3-B의 경우에는 거더의 모멘트는 연속교 모델에서 다소 멀어졌으나 다른 경우에 비해 주탑의 모멘트가 목표치에 가까이 분포함을 알 수 있다.

따라서, 멀티 케이블 형식에서도 적절한 가중행렬의 설정으로 원하는 항목을 목표치에 접근시킬 수 있음을 알 수 있다.

표 13. 팬형 사장교의 처짐 및 모멘트값

구분		Displacement (cm)		Moment (kN-m)	
부위	-	거더(중앙)	주탑	거더(중앙)	주탑
Target Model	-	0.0348	0.0	2.786	0.0
Case 1	-	0.0409	0.0216	2.773	726.9
Case 2	A	0.0382	0.0177	2.790	756.7
	B	0.0384	0.0176	2.790	756.9
Case 3	A	0.279	0.129	2.354	297.0
	B	0.364	0.0982	2.704	312.4

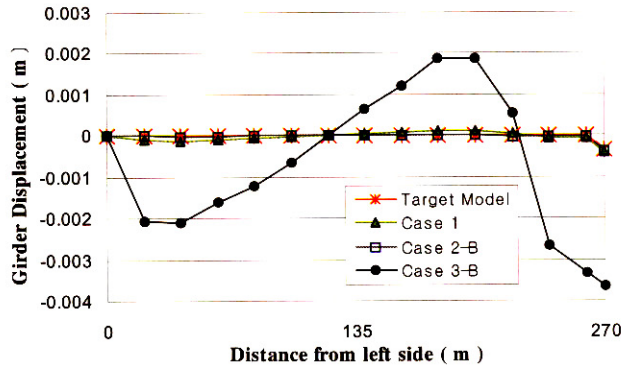


그림 23. 팬형 사장교의 거더 처짐도

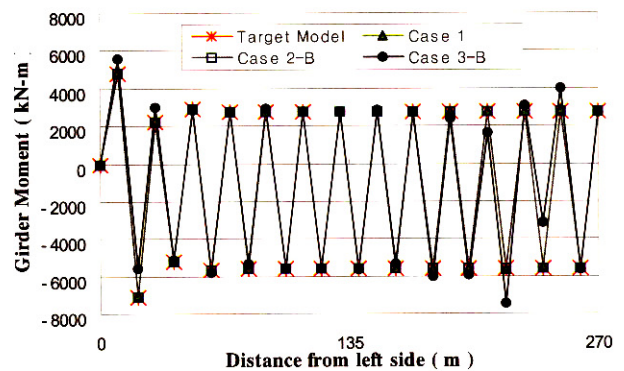


그림 24. 팬형 사장교의 거더 모멘트도

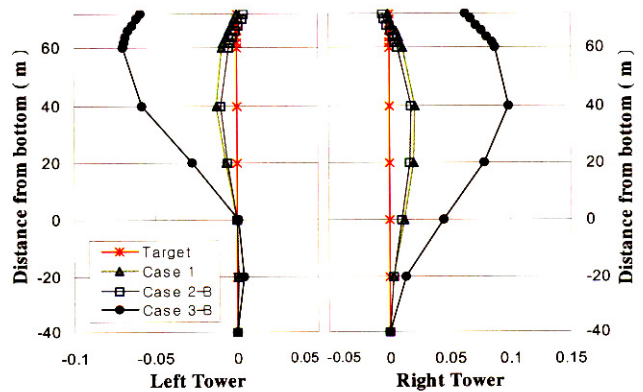


그림 25. 팬형 사장교의 좌·우 주탑 처짐도 (cm)

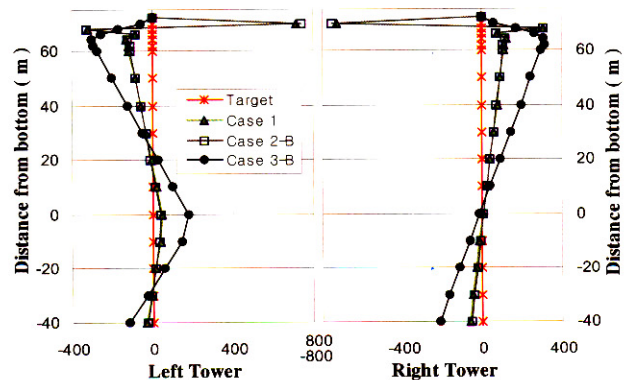


그림 26. 팬형 사장교의 좌·우 주탑 모멘트 (kN-m)

5. 결 론

본 연구에서는 사장교의 적절한 초기평형상태 구현을 위해 최소자승법에 의한 오차 최소화기법을 사용하여 케이블 장력을 결정하는 방법을 제시하였다. 특히, 가중행렬을 도입함으로써 거더 및 주탑의 모멘트를 선택적으로 제어할 수 있었다. 여러가지 예제교량에 본 알고리즘의 타당성을 검토하였으며, 본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 본 연구에서 제시한 최소자승법을 이용한 케이블 장력 결정 방법은 빠른 수렴속도를 보였으며, 처짐을 최소화하고 안정된 모멘트 분포를 보이는 초기평형상태를 구현할 수 있었다.
- (2) 최소자승법에 의한 오차 최소화 과정에서 목표 항목별로 가중행렬을 적절히 설정함으로써 주탑 및 거더의 처짐과 모멘트의 선택적인 제어가 가능하였다.

본 알고리즘에 의한 초기평형상태의 결정은 케이블 배치 형식 및 개수에 상관없이 처짐과 모멘트를 동시에 최소화시킬 수 있고 매우 빠른 수렴속도를 보이므로 실제 사장교의 장력 결정에 실용적일 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 부산대학교 자유연구과제 연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

김문영, 경용수, 이준석 (2003) 사장교의 개선된 초기형상 해석법, 한국강구조학회 논문집, 제15권, 2호, pp. 175-185.
 김재춘, 장승필 (1999) 초기부재력을 이용한 사장교의 초기형상

및 캠버량 결정, 대한토목학회 논문집, 제19권 제1-3호, pp. 377-386.
 Furukawa, K., Sakai I., Kumagai S., and Arai, H. (1987) Studies on Optimization of Cable Prestressing for Cable-Stayed Bridges, *Proceedings of the International Conference on Cable-Stayed Bridges*, Bangkok, Thailand, pp. 723-734.
 Gimsing, Niels J. (1998) *Cable supported bridges : concept and design*, John Wiley.
 Karoumi R. (1999) Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges, *Computers & Structures*, Vol.71, pp. 397-412.
 Kim, Ki-Seok, and Lee, Hae-Sung (2001) Analysis of target configurations under dead load for cable-supported bridges, *Computer & Structures*, Vol.79, No.29, 2001, pp. 2681-2692.
 Tanaka H., and Kamei M. (1987) Cable Tension adjustment by Structural System Identification, *Proceedings of the International Conference on Cable-Stayed Bridges*, Bangkok, Thailand, pp. 856-866.
 Troitsky M.S. (1988) *Cable-Stayed Bridges : theory and design*, BSP Professional Books.
 Wang, P.H., Tseng, T.C., and Yang, C.G. (1993) Initial Shape of Cable-stayed Bridges, *Computers & Structures*, Vol.46, No.6, pp. 1095-1106.
 Wang, P.H., and Yang C.G. (1996) Parametric Studies on Cable-Stayed Bridges, *Computers & Structures*, Vol.60, No.2, pp. 243-260.
 (접수일자 : 2005. 7. 28 / 심사일 2005. 9. 2 / 심사완료일 2005. 10. 25)