

## 콜부르크-화이트 방정식의 수치해와 이의 적용

# Numerical Solution of Colebrook-White Equation and It's Application

김민환\* · 송창수

Kim, Minhwan\* · Song, Changsoo

호남대학교 토목환경공학과

(2005년 7월 13일 논문 접수: 2005년 10월 4일 최종 수정논문 채택)

### Abstract

In analysis of pipelines or pipe network we calculated the friction loss using Hazen-Williams or Manning formula approximately, or found one by friction coefficient from Moody diagram graphically. The friction coefficient is determined as a function of relative roughness and Reynolds number. But the calculated friction coefficient by Hazen-Williams or Manning formula considered roughness of pipe or velocity of flow. The friction coefficient in Darcy-Weisbach equation was obtained from the Moody diagram. This method is manual and is not exact from reading. This paper is presented numerical solution of Colebrook-White formula including variables of relative roughness and Reynolds number. The suggested subroutine program by an efficient linear iteration scheme can be applied to any pipe network system.

**Key words:** Colebrook-White formula, Darcy-Weisbach formula, friction coefficient

**주제어:** 콜부르크-화이트 방정식, Darcy-Weisbach 공식, 마찰계수

## 1. 서 론

입의 단면에서 유체가 흐를 때 마찰손실을 계산하기 위해 흔히 사용되는 식으로는 Manning 공식, Chezy 공식, Hazen-Williams 공식, Darcy-Weisbach (Colebrook-White) 공식 등이 있다. 이 식들을 사용하기 위해서 흐름의 저항을 나타내는 계수 값을 어떻게 선택하느냐에 따라서 마찰수두손실의 평가에 영향을 미친다. 흐름의 저항은 일반적으로 흐름 수로의

포장 재료에 의해 결정되며 궁극적으로 수로의 형상, 수심, 유체의 유속 등이 포함된 함수로 표시된다. 관에서 흐름은 층류와 난류로 구분되고 어떤 흐름이던지 마찰수두손실은 통상적으로 관의 길이, 직경, 속도수두, 마찰계수의 함수이며 Darcy-Weisbach 공식으로 표시된다. 이 때 마찰수두손실을 평가하기 위해 보다 정확한 마찰손실계수의 값이 필요하다. 발달된 층류 흐름에서 마찰손실계수는 레이놀즈수만의 함수이며 이 값에 의해 결정된다. 난류 흐름에서 마찰손실계수는 층류와 다르게 레이놀즈수와 상대조도에 의

\*Corresponding author Tel: +82-62-940-5462, Fax: 82-62-940-5080, E-mail: kimmh@honam.ackr (Kim, M.H.)

해 결정된다. Manning 공식이나 Hazen-Williams 공식 등을 이용하여 관의 재료에 따라서 제시된 계수 값에 의해 근사적으로 마찰손실계수가 결정되기도 한다.

마찰수두손실을 결정하기 위해 Darcy-Weisbach 공식이 이용되는데 필요한 마찰손실계수는 실험과 경험에 의해 얻어진 Moody 도표를 이용하여 구한다(김민환, 2004). 이 도표의 난류 영역을 수식화한 식이 Colebrook-White 공식이다. 이 식은 상대조도와 레이놀즈수의 함수로 되어 있으며 비선형 형태이므로 반복해법에 의해 해를 구하거나 Moody 도표를 이용하여 구해야하는 번거로움이 있다. 실제로 관망의 해석과 같은 관수로 문제에서 Colebrook-White 공식을 이용하지 않고 사용하기에 간편한 근사적 방법인 Manning 공식이나 Hazen-Williams 공식 등을 사용하여 각 관의 마찰수두손실을 구한다. 즉, 관의 재료에 따라서 관의 거친 정도가 다른데 이를 계수화된 값에 이용하여 근사적 방법으로 마찰손실계수를 산정하여 해석한다.

본 논문은 관로 흐름에서 합리적인 마찰손실계수를 평가하기 위한 것으로, 마찰손실계수를 산정하는데 Colebrook-White 공식에 대한 수치해를 구할 수 있는 부프로그램을 제시하고, 관로 흐름과 관망 해석에 있어서 본 논문에서 제시된 수치해와 근사적인 공식들에 의해 얻어진 결과를 비교함으로써 합리적인 마찰손실계수를 평가하고자 한다.

## 2. Colebrook-White 공식의 수치해

Moody L.은 여러 연구자들의 연구와 실험을 토대로 마찰손실계수를 상대조도와 레이놀즈수를 매개변수로 하여 log-log지에 그려서 Moody 도표를 제시하였다. 이 도표는 유체역학에서 광범위하게 사용되고 있으며 도표를 쉽게 이용하기 위해 반대수지에 작성된 수정 Moody 도표가 사용되어 오고 있다(Gray D.D., 2000). 이 도표는 레이놀즈수에 따라서 다음과 같이 3가지 영역으로 구분되어 사용되어 오고 있다.

$$\text{층류영역 } 0 < Re < 2000 \quad f = \frac{64}{Re} \quad (1)$$

천이영역  $2000 < Re < 4000$

난류영역  $4000 < Re$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left[ \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right] \quad (2)$$

여기서  $f$ 는 마찰손실계수[무차원],  $Re$ 는 레이놀즈수[무차원],  $\epsilon$ 는 절대조도(L),  $D$ 는 관의 직경(L),  $\epsilon/D$ 은 상대조도(relative roughness)이다.

식 (1)에서와 같이 흐름이 층류인 경우에 마찰손실계수가 레이놀즈수( $Re$ )에 의해 결정되는 선형관계로서 관의 조도 상태와 무관하게 계산된다. 대부분의 실제 관로 흐름이 난류인 점을 고려할 때 식 (2)가 주로 사용된다. 이 식을 Colebrook 식이라고도 부르지만 C.M. White가 발전시킨 공로를 인정하여 Colebrook-White 식이라고도 부른다. 식 (2)는 레이놀즈수가 유한 할 때  $f$ 가 식의 양편에 존재하기 때문에 반복해법으로 풀어야 한다. 반복해법으로 풀기 위해 Gray(2000)는  $f = 0.025$ (Gray 가정)로 추천하였다. 본 논문에서는 식 (2)에 대한 수치해를 구하기 위해 이 식을 다음과 같이 수정하였다.

$$f = \left[ \frac{-1.15}{\ln \left\{ \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right\}} \right]^2 \quad (3)$$

이 식의 해를 구하기 위해 일반적인 함수식을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$x = g(x) \quad (4)$$

이 식을  $f(x) = x - g(x) = 0$ 으로 나타낼 수 있으며 식 (4)를 2개의 방정식으로 분리하여 나타내면,  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = g(x)$ 이다. 이 두함수가 교차하는  $x$ 값이  $f(x) = 0$ 의 근이 된다. 식 (4)를 이용하여 근을 구하기 위해 초기  $x_0$ 값을 가정하여 새로운 추정값  $x_1$ 을 구하는 일반적인 식은 다음과 같다.

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad (5)$$

이 식에 대한 해를 구하는 방법에 대한 자세한 알고리즘은 수치해석에 소개되어 있다(김철 등, 2001).

```

SUBROUTINE FACTOR(XR,Q,DIA,AK,XN)
C  XR : INITIAL FRICTION COEFF.
C  Q  : DISCHARGE
C  DIA : DIAMETER OF PIPE(m)
C  AK  : ROUGHNESS(m)
C  XN  : FINAL FRICTION COEFF.
ES=0.0001      : TORRENCE LIMIT
AKE=1.003E-06  : KINEMATIC VISCOSITY(m2/s)
IM=200         : MAX. ITERATION NO.
PI=3.14159
RC=AK/DIA
V=Q*4./(PI*DIA**2)
RE=V*DIA/AKE
DO 180 NI=1,IM
CALL FF(XN,RE,RC,XR)
IF(XN.EQ.0.) GOTO 170
EA=ABS((XN-XR)/XN)*100.
IF(EA.LE.ES) GOTO 210
170 XR=XN
180 CONTINUE
WRITE(2,2)
2  FORMAT(' ', 'ROOT NOT REACHED')
NI=NI-1
210 WRITE(2,3) XN,EA,NI
3  FORMAT(' ',2E15.5,I5)
RETURN
END
SUBROUTINE FF(XN,RE,RC,XR)
BM=LOG(RC/3.7+ (2.51/RE)*XR**(-0.5))
XN=(-1.15/BM)**2
RETURN
END
    
```

Fig. 1. Subprogram for solution of Colebrook-White equation.

이 기법을 이용하여 식 (3)의 마찰손실계수  $f$ 를 구하는 부프로그램을 Fig. 1에 제시하였다.

### 3. Colebrook-White 공식의 적용

2장에서 제시된 Colebrook-White 공식에 대한 수치해의 적용성을 검토하기 위해 간단한 관로 흐름과 관망의 예를 들어 비교 검토하려고 한다.

#### 3.1. 관로에서의 적용 예

본 절에서는 관로에서의 수두손실을 결정하기 위해 Darcy-Weisbach 공식, Hazen-Williams 공식, Manning 공식을 이용하여 비교한다. 이에 대한 식은 다음과 같다(Tomas M.W., 2002).

Table 1. Typical roughness coefficients(Thomas etc., 2002)

Material	Manning's Coefficient n	Hazen-Williams Coefficient C	Darcy-Weisbach Roughness Height(mm) $\epsilon$
Asbestos cement	0.011	140	0.0015
Brass	0.011	135	0.0015
Brick	0.015	100	0.6
Cast-iron, new	0.012	130	0.26
Concrete			
Steel forms	0.011	140	0.18
Wooden forms	0.015	120	0.6
Centrifugally spun	0.013	135	0.36
Copper	0.011	135	0.0015
Corrugated metal	0.022	-	45
Galvanized iron	0.016	120	0.15
Grass	0.011	140	0.0015
Lead	0.011	135	0.0015
Plastic	0.009	150	0.0015
Steel			
Coal-tar enamel	0.010	148	0.0048
New unlined	0.011	145	0.045
Riveted	0.019	110	0.9
Wood stave	0.012	120	0.18

$$\text{Darcy-Weisbach 공식: } S_f = \frac{0.083fQ^2}{D^5} \quad (6)$$

$$\text{Hazen-Williams 공식: } S_f = \frac{10.7}{D^{4.87}} \left(\frac{Q}{C}\right)^{1.852} \quad (7)$$

$$\text{Manning 공식: } S_f = \frac{10.3(nQ)^2}{D^{5.33}} \quad (8)$$

여기서  $S_f$ 는 마찰경사[무차원],  $Q$ 는 유량[L<sup>3</sup>T<sup>-1</sup>],  $C$ 는 Hazen-Williams 계수,  $n$ 은 Manning 계수이다. 각 공식에 사용되는 계수 값은 사용되는 재료에 따라 다르며 전형적인 이들 값에 대한 조도계수를 Table 1에 제시하였다.

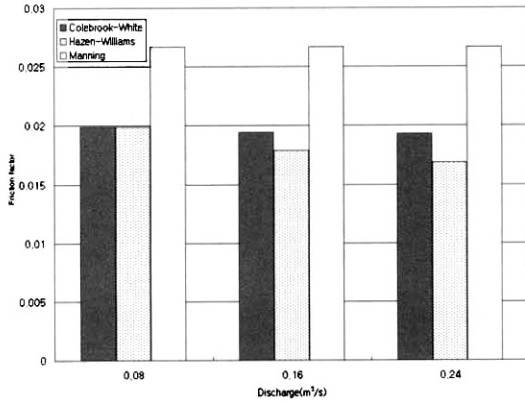
식 (6)의 Darcy-Weisbach 공식에서  $f$ 의 값과 식 (7) Hazen-Williams 공식의  $C$ , 식 (8) Manning 공식의  $n$ 과의 관계를 살펴보면 다음과 같다.

$$f = \frac{134.139}{C^{1.85} D^{0.17} V^{0.148}} \quad (9)$$

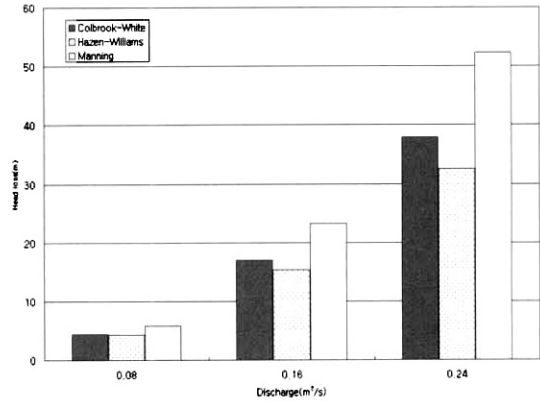
$$f = \frac{124.530n^2}{D^{0.33}} \quad (10)$$

**Table 2.** Friction coefficient and friction head loss in example 3.1

유량(m <sup>3</sup> /s)	0.08		0.16		0.24	
레이놀즈 수	3.385 × 10 <sup>5</sup>		6.770 × 10 <sup>5</sup>		1.016 × 10 <sup>6</sup>	
	f	수두손실(m)	f	수두손실(m)	f	수두손실(m)
Colebrook-White	0.0199	4.3454	0.0194	16.9836	0.0193	37.8974
Hazen-Williams	0.0199	4.2590	0.0179	15.3748	0.0169	32.5785
Manning	0.0267	5.8120	0.0267	23.2479	0.0267	52.3077



**Fig. 2.** Friction coefficient by various formulas.



**Fig. 3.** Friction head loss by various formulas.

식 (9)의 마찰손실계수  $f$ 는 Hazen-Williams 계수  $C$ , 직경  $D$ , 유속  $V$ 의 함수이고, 식 (10)의 마찰손실 계수  $f$ 는 Manning의 조도계수  $n$ , 직경  $D$ 에 의해 결정된다. Colebrook-White 공식에 대한 수치해와 식 (7)과 (8)을 적용하기 위한 관로의 제원과 특성은 다음과 같다. 관의 길이  $l = 1000\text{m}$ , 직경  $D = 0.3\text{m}$ 인 주철관(New)에 20°C의 물(동점성계수  $\nu = 1.003 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ )이 유량  $Q = 0.08\text{m}^3/\text{s}$ 로 흐를 때 발생하는 마찰수두손실을 식 (6), (7), (8)에 의해 계산하여 비교하려고 한다.

이 때 사용된 관의 재료는 주철(New)이므로 Table 1에서  $n = 0.012$ ,  $C = 130$ ,  $\epsilon = 0.26\text{mm}$ 이다. 식 (6)에서  $f$ 를 계산하기 위해 2장에서 제시된 Fig. 1의 부프로그램을 사용한다. 그리고 식 (9)와 (10)에 의해 마찰손실계수를 구하여 비교하고 유량을 2배와 3배로 증가시켰을 때, 마찰손실계수와 마찰수두손실의 결과를 Table 2에 요약하여 제시하였다.

Table 2에 나타난 바와 같이 Darcy-Weisbach 공식에서 마찰손실계수는 상대조도와 레이놀즈수의 함수이다. 이 예에서는 상대조도가 일정하기 때문에 레이

놀즈수의 변화에 따라 마찰손실계수의 변화가 발생하였지만 큰 차이는 없다. 수정 Moody 도표에서 알 수 있는 것처럼 레이놀즈수가 큰 경우에 변화가 없음을 보여 주고 있다. 특히 레이놀즈수가  $10^6$  이상에서는 거의 변화가 없다. 그러나 Hazen-Williams 공식은 Colebrook-White 공식의 마찰손실계수 보다 약간 크게 변화된 사실을 알 수 있는 반면에 Manning 공식의 마찰손실계수는 식 (10)에서 알 수 있는 것처럼 유량에 관계없이 직경이 일정하기 때문에 마찰손실계수의 변화가 없으며 다른 방법들의 값보다 항상 크게 나타났다(Fig. 2). 또한 마찰에 의한 수두손실에 대해 고찰하면 유량이 커질수록 수두손실의 값의 차이가 매우 심하게 나타나 있다. Hazen-Williams 공식은 Manning 공식과 비교하면 유속의 변수가 포함되어 흐름의 특성을 반영시킨 식으로 유량에 따라 마찰손실계수가 다름을 알 수 있다(Fig. 3). 이처럼 근사적인 식을 사용하여 마찰손실에 대한 해석을 할 때에는 보다 신중하게 다루어야 하기 때문에 Colebrook-White 공식에서처럼 흐름의 특성과 관의 특성이 반영하여 마찰손실계수를 평가해야 합리적이라고 판단

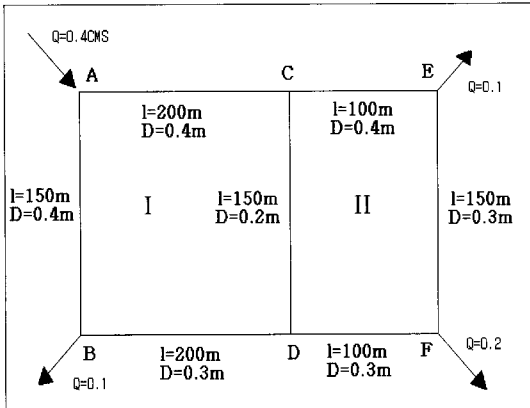


Fig. 4. Sketch of pipe network.

된다.

3.2. 관망해석에의 적용 예

앞 절에서는 단순관에 대한 마찰손실계수의 산정

과 수두손실을 비교하여 제시하였다. 본 절에서는 관망 해석에 2장에서 제시된 Colebrook-White 공식을 적용하여 마찰수두손실을 평가하고 유량에 따라, 혹은 직경의 변화에 따라 그 변화를 평가하려고 한다. 이를 위해 관망은 송재우(2004)에 의해 제시된 연습 문제를 예로 들어 비교하려고 한다. 7개의 관과 2개의 폐합관으로 이루어진 관망에 대한 체원이 Fig. 4에 제시되어 있다. 이 관의 재료를 주철(New)로 가정하면 Table 1에서  $n = 0.012$ ,  $C = 130$ ,  $\epsilon = 0.26\text{mm}$ 이다. 송재우의 예에서는 Manning의 조도계수가 주어졌기 때문에 식 (10)을 이용하여 해를 구한 것으로 판단되며 일반적인 Hardy-Cross 방법에 의해 해를 구하였으며 관망 해석에 주로 사용되는 Hazen-Williams 공식, 그리고 2장에서 제시된 Colebrook-White 공식에 대한 수치해에 의해 구한 결과를 Table 3에 제시하였다.

Table 3, 4, 5에서 Hazen-Williams과 Manning 공식

Table 3. Head loss by various formulas in example 3.2

No.	Dia. mm	Discharge $\text{m}^3/\text{s}$	Colebrook-White		Hazen-Williams $C=130$		Manning $n=0.012$	
			$f$	head loss	$f$	head loss	$f$	head loss
AC	400	0.212	0.018	0.319	0.018	1.264	0.024	1.758
CD	200	0.024	0.022	0.479	0.023	0.470	0.031	0.633
DB	300	-0.088	0.020	-1.066	0.020	-1.034	0.027	-1.438
BA	400	-0.188	0.018	-0.795	0.018	-0.772	0.024	-1.052
CE	400	0.188	0.018	0.523	0.018	0.508	0.024	0.697
EF	300	0.088	0.020	0.778	0.020	0.757	0.027	1.066
FD	300	-0.112	0.020	-0.844	0.019	-0.797	0.027	-1.141
Sum of square head loss			3.691		4.950		9.590	

Table 4. Head loss with diameters in Fig. 4

No.	Dia. mm	Discharge $\text{m}^3/\text{s}$	Colebrook-White		Hazen-Williams $C=130$		Manning $n=0.012$	
			$f$	head loss	$f$	head loss	$f$	head loss
AC	200	0.212	0.021	48.673	0.016	36.958	0.031	70.869
CD	100	0.024	0.026	17.301	0.021	13.748	0.039	25.540
DB	150	-0.088	0.023	-39.212	0.018	-30.258	0.034	-57.978
BA	200	-0.188	0.021	-29.232	0.017	-22.569	0.031	-42.415
CE	200	0.188	0.021	19.277	0.017	14.873	0.031	28.120
EF	150	0.088	0.023	28.736	0.018	22.141	0.034	42.971
FD	150	-0.112	0.023	-31.301	0.017	-13.748	0.034	-46.018
Sum of square head loss			7237.589		3880.245		15590.085	

**Table 5.** Head loss with discharge in Fig. 4

No.	Dia. mm	Discharge m <sup>3</sup> /s	Colebrook-White		Hazen-Williams C = 130		Manning n = 0.012	
			f	head loss	f	head loss	f	head loss
AC	400	0.424	0.018	5.228	0.016	4.598	0.024	7.088
CD	200	0.047	0.022	1.938	0.020	1.822	0.031	2.701
DB	300	-0.176	0.019	-4.102	0.018	-3.661	0.027	-5.641
BA	400	-0.376	0.018	-3.098	0.016	-2.760	0.024	-4.170
CE	400	0.378	0.018	2.060	0.016	1.836	0.024	2.793
EF	300	0.178	0.019	3.061	0.018	2.733	0.027	4.274
FD	300	-0.222	0.019	-3.303	0.017	-2.875	0.027	-4.557
Sum of square head loss			82.035		64.588		153.579	

에서  $f$ 는 식(9)와 (10)에 의해 산정된 마찰손실계수이다. 마찰손실계수에 대해 차원해석을 수행하면 레이놀즈수와 상대조도의 함수로 알려져 있다. 마찰손실계수의 값에 따라서 마찰수두손실의 값에 미치는 영향을 평가하기 위해 각 관에서 마찰수두손실 값의 제곱에 대한 합을 구해 비교해 보았다.

Table 3은 Fig. 4에 주어진 특성에 따라서 각 방법에 의해 얻어진 수두손실제곱 합을 나타낸 것이다. Table 4는 Fig. 4의 주어진 제원 중에서 직경을 1/2로 감소시켜 얻어진 결과로서 직경이 감소됨으로서 유속이 빠르고 이로 인해 수두손실이 커졌으며 각 방법에 대한 수두손실 제곱 합의 변화는 더욱 커졌다. 마지막으로 Table 5는 Fig. 4에 주어진 유량을 2배로 증가시켰을 때이다. 각 방법에 따라서 수두손실 제곱 합의 값이 상당한 차이를 보여주고 있다.

이상에서 보는 바와 같이 동일한 시스템에서 선택된 공식에 따라서 수두손실의 차이가 큼을 알 수 있다. 필요한 지점에서 필요한 수압을 제공하기 위해서 보다 정확한 수두손실이 평가되어야 한다. 그러므로 수두손실을 평가하는데 물리적 특성이 반영된 Colebrook-White 공식을 이용하는 것이 적절하다고 판단된다.

#### 4. 결 론

관로 혹은 관망 해석에서 마찰수두손실을 산정하기 위해 통상적으로 사용하기에 간단하고 편리한

Hazen-Williams 공식, 혹은 Manning 공식 등이 사용되어 왔다. 마찰수두손실에 영향을 주는 함수는 상대조도와 레이놀즈수이다. 이들 변수가 포함된 Colebrook-White 공식을 사용함으로써 관의 물리적인 특성과 흐름의 특성 변화를 반영시킬 수 있다. 본 논문에서는 Colebrook-White 공식에 대한 수치해를 제시하였으며 이 수치해를 이용하여 관로와 관망에서의 마찰수두손실을 평가하였고, 기존의 Hazen-Williams 공식 혹은 Manning 공식에 의해 평가된 마찰수두손실과 비교하였다. 그 결과 흐름의 상태에 따라서 마찰수두손실에 미치는 영향이 상당하므로 본 논문에서 제시된 Colebrook-White 공식을 사용하는 것이 보다 합리적이라고 판단된다.

#### 참고문헌

- 김민환 (2004) *수리학*, pp. 96-103, 도서출판 새론, 서울.
- 김철, 김태국, 신동신, 이승배 (2001) *공학도를 위한 수치해석*, pp. 147-153, McGraw-Hill, Korea.
- 송재우 (2004) *수리학*, pp. 179-180, 구미서관, 서울.
- 현인환, 이상욱, 김영환, 전경호 (2002) 등치관법이 배수관망 해석에 미치는 영향, pp. 615-621, *상하수도학회지*, 16(5).
- Gray D.D. (2000) *A First Course in Fluid Mechanics for Civil Engineers*, pp. 281-297, Water Resources Publications, LLC, Colorado (USA).
- Thomas M. W., Thomas E.B., Rocky S.D., Michael E.M. (2002) *Computer Applications in Hydraulic Engineering*, pp. 13-18, Haested Press, CT (USA).