

불균일 벽면 온도를 갖는 Rayleigh-Benard 문제에서의 유동의 다수성

유 주 식* · 김 용 진**

Multiplicity of Flows in a Rayleigh-Benard Problem with Non-Uniform Wall Temperatures

Joo-Sik Yoo* · Yong-Jin Kim**

ABSTRACT

A Rayleigh-Benard problem with non-uniform wall temperatures of the form, $T_L = T_1 + \delta\Delta T \sin kx$ and $T_U = T_2 - \delta\Delta T \sin(kx)$, is numerically investigated. In the conduction-dominated regime with small a Rayleigh number, a two-tier structure appears with two counter-rotating rolls stacked on the top of each other. The flow becomes unstable with increase of the Rayleigh number, and multicellular convection occurs above a critical Rayleigh number. The multicellular flows at high Rayleigh numbers consist of approximately square- shape cells. Four multiple flows and dual flows classified by the number of cells are found at $k=0.5$ and $k=1$, respectively.

Key Words : Natural Convection, Multicellular Flow, Multiple Solution

* 안동대학교, 기계교육과

** 한국기계연구원, 열유체환경연구부

I. 서론

서로 다른 일정 온도를 갖는 두 수평 평판 사이에서 일어나는 자연대류는, 특히 유동의 안정성과 관련하여 많이 연구되어 왔다(Busse, 1981). 이와 같은 표준적인 Rayleigh-Benard 문제에서는 벽면 온도가 일정한 경우 ($T_L = T_1$, $T_U = T_2$)를 고려하는데 여기에서는 Fig. 1과 같이 작은 진폭의 불균일 온도 ($\delta\Delta T \sin kx$)가 부가되었을 때의 자연 대류 현상을 조사한다. 아래와 위 벽면은 각각

$$T_L = T_1 + \delta\Delta T \sin kx,$$

$T_U = T_2 - \delta\Delta T \sin(kx)$ 의 주기적인 온도 분포를 갖는다. 이와 같은 주기적인 경계 조건을 갖는 문제로는 두 판의 형태가 길이 방향으로 정현적(sinusoidal)이거나 삼각파 등과 같이 물결 모양을 이루는 판 내에서의 자연 대류 혹은 강제 대류에 대한 연구가 수행되었다.

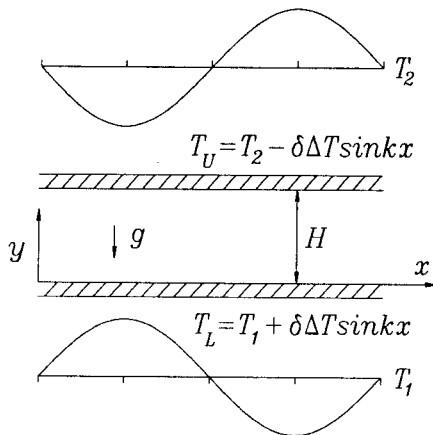


Fig. 1 Problem configuration.

불균일한 벽면 온도를 갖는 다공성 매질(porous medium)에서의 대류에 관한 연구로는 Bradean 등(1996)과 Yoo and Schultz(2003)의 연구가 있다. Bradean 등(1996)은 주기적으로 가열되고 냉각되는 수평 평판을 가진 반 무한 다공성 매질에서의 대류를 조사하였다. 그리고 Yoo and Schultz(2003)는 다공성 매질에서 평균온도 차이

가 없는 두 벽면이 정현적인 온도 분포를 가지고 있을 때의 유동을 작은 Rayleigh 수에 대한 점근적인 해를 구하여 조사하였다.

본 연구에서는 서로 다른 평균 온도를 갖는 두 벽면에 작은 크기의 주기적인 불균일 온도가 부가되었을 때의 자연 대류 현상을 조사한다. 유동장은 벽면 온도와 같은 공간적인 주기를 가지므로 파장(wave length) $2\pi/k$ 는 시스템의 기하학적 형태를 나타내는 일종의 aspect ratio(길이/높이)에 해당된다. 고려하는 유체는 Prandtl 수가 0.7인 공기이며, 벽면 온도의 진폭 계수 $\delta = 0.1$ 이다. 균일한 온도를 가지고 있는 Rayleigh-Benard 문제인 경우, 작은 Rayleigh 수에서는 유체가 정지 상태를 유지한다. 그러나 본 문제에서는 벽면에서의 수평 방향의 온도 구배에 의해 정지 상태가 존재하지 않고 언제나 유동이 일어난다. 그리고, Rayleigh 수가 증가함에 따라 다수 셀 대류(multicellular convection)로의 천이가 일어나며, 큰 Rayleigh 수에서는 다중해(multiple solutions)가 발견되었다.

II. 해석

Fig. 1과 같이 불균일 온도를 갖는 두 개의 수평 평판 사이에 유체가 채워져 있다. 운동 방정식에서 부력 항에서만 유체의 밀도 변화를 고려하고 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 에너지 방정식에서 점성 소산(viscous dissipation)도 역시 무시한다. 이와 같은 가정 하에서 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력 및 온도를 각각 H , H^2/χ ,

χ/H , $\rho_0 \chi^2/H^2$, $\Delta T = T_1 - T_2$ 로 택하여 무차원화시킨다. 그리고 2차원 문제를 고려하므로 질량과 운동량에 대한 방정식을 streamfunction-vorticity 방정식으로 바꾸어준다. 최종적으로 얻어지는 흐름 함수 Ψ 와 와도 ω , 및 온도 θ 로써 표현되는 무차원화된 지배 방정식과

경계 조건은 다음과 같다. 여기에서 $Pr = \nu/\alpha$, $Ra = ag\Delta TH^3/\nu\alpha$ 는 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수를 나타낸다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr\nabla^2 \omega + PrRa \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (3)$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=0, 1 \quad (4)$$

$$\theta = 1 + \delta \sin kx \quad \text{at } y=0 \quad (5)$$

$$\theta = -\delta \sin(kx) \quad \text{at } y=1 \quad (6)$$

지배 방정식 (1)-(3)과 경계 조건 (4)-(6)을 만족하는 해는 점 $(\pi/2k, 1/2)$ 에 대해서 다음과 같은 점대칭성을 만족하는 해를 갖는다.

$$\Psi(x, y, t) = \Psi(\pi/k - x, 1 - y, t) \quad (7)$$

$$\phi(x, y, t) = -\phi(\pi/k - x, 1 - y, t) \quad (8)$$

여기에서 $\phi(x, y, t)$ 는, 유체유동이 없을 때 일정한 벽면 온도를 가지고 있는 두 평판 사이의 온도 분포, $\theta_{cond} = 1 - y$, 를 제거한 온도를 나타낸다.

$$\phi(x, y, t) = -1 + y + \theta(x, y, t) \quad (9)$$

$y = 1/2$ 에 대해서는 다음과 같은 상하대칭성을 갖는다.

$$\Psi(x, y, t) = -\Psi(x, 1 - y, t) \quad (10)$$

$$\phi(x, y, t) = -\phi(x, 1 - y, t) \quad (11)$$

그리고, $x = \pi/2k$ 에 대해서도 다음과 같은 좌우대칭성을 갖는다.

$$\Psi(x, y, t) = -\Psi(\pi/k - x, y, t) \quad (12)$$

$$\theta(x, y, t) = \theta(\pi/k - x, y, t) \quad (13)$$

수직 방향으로는 경계조건 (4)-(6)이 적용되고, 수평 방향으로는 다음과 같은 주기적인 조건이 흐름 함수 Ψ 와 와도 ω , 및 온도 θ 에 대해 적용된다.

$$F(x, y, t) = F[x + \frac{2\pi}{k}, y, t],$$

$$F = \Psi, \omega, \theta \quad (14)$$

벽면에서의 평균 Nusselt 수는 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{Nu} = -\frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{\partial \theta}{\partial y} dx$$

$$\text{at } y=0, 1 \quad (15)$$

x 방향으로 $2\pi/k$ 의 주기를 갖는 식 (1)-(6)의 해는 Napolitano and Quartapelle(1985)가 제안한 Block ADI 방법을 써서 구한다. x 방향으로는 균일한 격자계를 사용하고, y 방향으로는 벽면 부근의 얇은 경계층을 분해하기 위하여 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$y = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right] \quad (16)$$

III. 결과 및 논의

1. 유동의 천이(Transition of Flows)

먼저 Fig. 2에 전도(conduction)가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서의 유선과 등온선을 $k=0.5$, $Ra=500$ 으로 하여 도시하였다. 그림에서 보듯이, 상하 벽면에 있는 수평 방향의 온도 구배에 의해 각각의 벽면 부근에서 유동이 일어나는 데 따라 전체적으로는 이중 모양의 서로 반대 방향으로 회전하는 두 개의 셀(cell)이 형성된다. 이와 같은 전도 영역에서의 유동장은 II 절에서 제시하고 있는 3 가지의 대칭성(점대칭, 좌우대칭, 상하대칭)을 모두 만족시킨다. 그러나, 비록 유동은 일어나지만 그 세기는 약하므로 전도 영역의 등온선은 거의 수평으로 놓여진다.

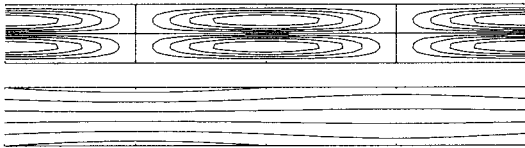


Fig. 2 Streamline and isotherm patterns in the conduction-dominated regime with $k=0.5$ and $Ra=500$. The domain of x is $0 \leq x \leq 2\pi/k$.

Fig. 2와 같이 작은 Rayleigh 수에서는 상하 대칭성을 만족시키는 유동이 존재하지만, 큰 Rayleigh 수에서는 수직 방향으로의 열적인 불안정이 증대되어 강한 대류가 일어나게 된다. Fig. 3에는 Fig. 2와 같은 전도 영역으로부터 대류 영역으로의 유동의 변화 양상을 도시하였다. Rayleigh 수가 증가하여도 $Ra=1502$ 까지는 Fig. 3(a)와 같이 2층 구조의 셀을 갖는 전도 상태가 유지된다. 그러나 $Ra=1505$ 에서는, 먼저 열적으로 가장 불안정한 $0 < kx < \pi$ 에서 다수 셀 대류(multicellular convection)가 일어난다. 상대적으로 안정된 영역인 $\pi < kx < 2\pi$ 에서는 미약한 유동을

보인다. 영역 $0 < kx < \pi$ 에서의 두 벽면의 평균 온도는 각각 $T_1 + 2(\delta/\pi)\Delta T$, $T_2 - 2(\delta/\pi)\Delta T$ 이므로 상하 벽면간의 평균 온도 차이는 $\Delta T_m = (1 + 4\delta/\pi)\Delta T$ 이다. 한편, 벽면 온도가 균일한 Rayleigh-Benard 문제에서는, 상하 벽면 간의 온도 차이에 근거한 Rayleigh 수가 1707.8일 때 대류가 일어난다. 즉, ΔT_m 에 기초한 임계 Rayleigh 수가 $Ra_{c,m}=1707.8$ 이라고 하면, $\delta=0.1$ 일 때 ΔT 에 기초한 임계

$$\text{Rayleigh 수} = Ra_{c,B} = \frac{Ra_{c,m}}{(1 + 4\delta/\pi)}$$

≈ 1514.9 가 된다. 따라서 Fig. 3에서 나타내고 있는 근사적인 임계 Rayleigh 수 $Ra_c \approx 1505$ 는 Rayleigh-Benard 문제에 근거한 임계 Rayleigh 수에 가깝다는 것을 알 수 있다.

열적인 불안정으로 인하여 상하 대칭성이 깨어지는 순간인 $Ra_c \approx 1505$ 에서는 $0 < kx < \pi$ 의 영역에서만 강한 다수 셀 대류가 일어난다(Fig. 3(b)). 그러나 Rayleigh 수가 증가할수록 점점 그 영역은 확대되어 $Ra=2500$ 에서는 전 영역에 걸쳐 정방형에 가까운 셀들로 구성된 다수 셀 유동이 일어난다(Fig. 3(g)). Fig. 3(b-g)는 Rayleigh 수의 증가에 따라 열대류가 확산되는 양상을 잘 보여주고 있다. 한편, 상하 대칭성이 깨어지고 다수 셀 대류가 일어나지만 Fig. 3(b-g)의 유동장은 모두 좌우 대칭성을 만족한다.

Fig. 4에는 $k=0.5$ 일 때 Rayleigh 수에 따른 Nusselt 수의 거동을 도시하였다. 유체 유동이 고려되지 않는 전도 상태에서의 Nusselt 수는 1이다. 다수 셀 대류가 일어나지 않는 경우 ($Ra \leq 1500$)의 Nusselt 수는 거의 전도해(conduction solution)와 같은 일정한 값($\overline{Nu} \approx 1$)을 갖는다. 그러나 Fig. 3(b)와 같이 여러 개의 셀을 갖는 유동이 일어나는 $Ra=1505$ 부근에서는 전도영역($Ra \leq 1500$)에 비해 상대적으로 큰 Nusselt 수의 증가가 일어난다. 이것은 Fig. 3(b)에서 보인 것처럼 유동 형태의 상하 대칭성이 깨

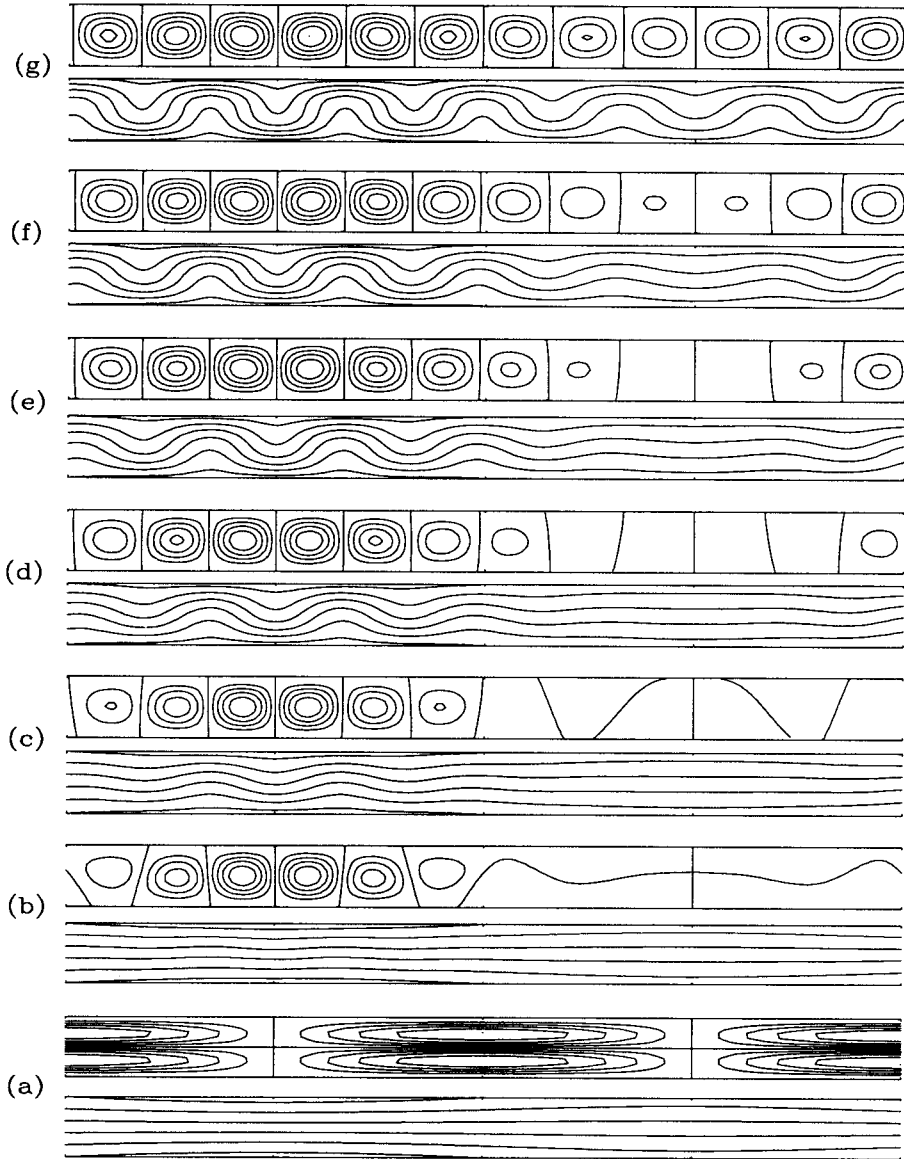


Fig. 3 Variation of flow patterns with respect to the Rayleigh number at $k=0.5$: (a) $Ra=1502$; (b) $Ra=1505$; (c) $Ra=1550$; (d) $Ra=1700$; (e) $Ra=1850$; (f) $Ra=2000$; (g) $Ra=2500$. The domain of x is $0 \leq x \leq 2\pi/k$.

어지면서 서로 다른 평균 온도를 가지고 있는 아래와 위 벽면간의 열적인 상호작용(thermal interaction)이 증대되기 때문이다. 다수 셀 대류가

일어나는 난 후에는, Rayleigh 수에 따라 Nusselt 수가 점진적으로 증가한다.

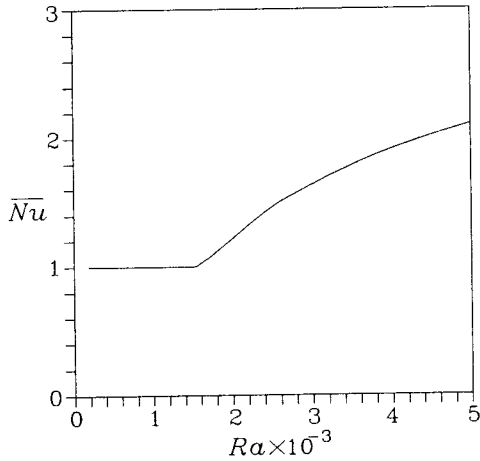


Fig. 4 Nusselt number as a function of Rayleigh number at $k=0.5$.

2. 유동의 다수성 (Multiplicity of Flows)

$Ra=2500$ 에서의 Fig. 3(g)의 유동장은 한 주기에 걸쳐 12개의 셀을 보여 주고 있다. 본 연구에서는, 이와 같이 전 영역에 걸쳐 다수 셀 대류가 완전히 확립된 이후에는, 똑같은 조건 하에서 여러 가지의 해가 존재한다는 것을 관찰하였다.

다중해(multiple solutions)에 대한 하나의 예로써, $k=0.5$, $Ra=5000$ 에서 발견한 서로 다른 4개의 해를 Fig. 5에 도시하였다. Fig. (5)의 (a), (b), (c), (d)는 각각 10, 12, 14, 16개의 셀을 갖는 유동을 보여주고 있다. 한편 유동의 형태는 서로 다르지만 벽면에서의 평균 Nusselt 수는 각각 2.02, 2.09, 2.11, 2.06으로써 큰 차이를 갖지 않는다. 비록 그 차이는 적지만, 14개의 셀대류에서 가장 큰 Nusselt 수를 갖는데, 이때의 평균적인 셀의 세로:가로 $\approx 1:0.9$ 이다. 한편 Rayleigh-Bernard 문제에서의 임계 파동수는 3.117이므로 이때의 셀의 세로:가로 $\approx 1:1.009$ 가 된다. 즉, Rayleigh-Bernard 문제보다 약간 홀쭉한 셀 형태에서 가장 큰 Nusselt 수를 갖는다.

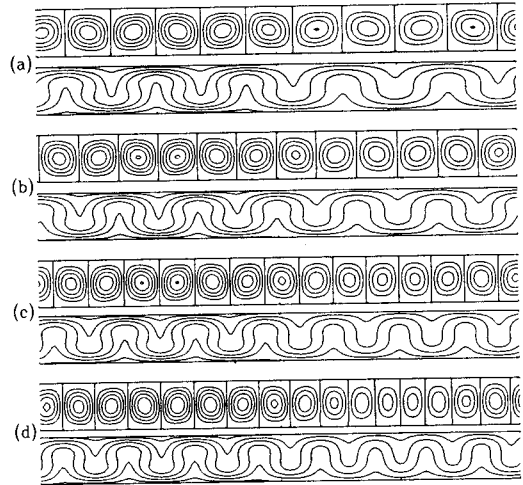


Fig. 5 Streamline and isotherm patterns of four multiple solutions at $k=0.5$ and $Ra=5000$. The domain of x is $0 \leq x \leq 2\pi/k$. The flows of (a), (b), (c), and (d) have 10, 12, 14, and 16 cells over one wave length, respectively.

Fig. 5의 다중해는 Benjamin and Mullin(1982)에 의해 Taylor 실험에서 발견된 여러 개의 유동과 아주 유사한 면을 가지고 있다. 그들은 aspect ratio가 12.61인 Taylor apparatus에서 같은 조건 하에서 8개에서 18개 사이의 셀을 갖는 서로 다른 15 가지의 정상유동(steady flow)을 관측하였다. $k=0.5$ 일 때 aspect ratio는 약 12.57이 되며, Fig. 5에 있는 10, 12, 14, 16개의 셀은 그들이 실험으로 관찰한 것과 좋은 비교가 된다.

본 연구에서는, $k=0.5$ 일 때, 8셀 유동과 18셀 유동은 얻어지지 않았다. 다른 파동수에서 구해진 8셀 유동과 18셀 유동을 초기 조건으로 하여도 각각 10셀 유동과 16셀 유동이 구해졌다. 한편 파동수가 $k=1$ 일 때에는 Fig. 6과 같이 6개와 8개의 셀을 갖는 두 개의 유동을 구할 수 있었다. 이때에는, $k=1.5$ 에서 구해진 4셀 유동을 초기 조건으로 하여도 6셀 유동이 구해지고, $k=0.5$ 에서 구해진 10셀 유동을 초기 조건으로 하면 8셀 유동이 구해졌다. Rayleigh-Bernard 문

제에서는 대류가 시작되는 임계 Rayleigh수에서 거의 정방형(square)의 셀을 갖는 유동이 일어난다. 따라서 $k=0.5$ 와 $k=1$ 에서 발견되는 셀 대류의 형태로부터, 정방형의 셀과는 거리가 먼, 너무 좁거나 너무 넓은 모양의 셀을 갖는 대류는 일어나지 않는다는 것을 알 수 있다.

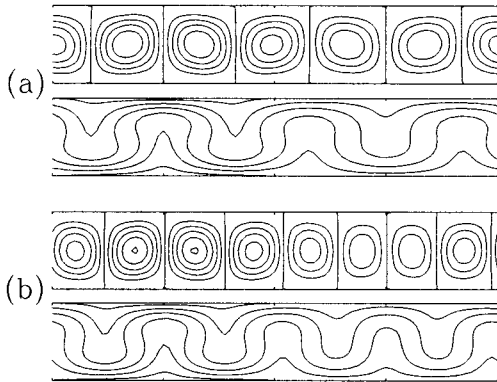


Fig. 6 Streamline and isotherm patterns of dual solutions at $k=1$ and $Ra=5000$. The domain of x is $0 \leq x \leq 2\pi/k$. The flows of (a) and (b) have 6 and 8 cells, respectively.

IV. 결론

일정한 벽면 온도를 갖는 Rayleigh-Benard 문제에 작은 크기의 주기적인 불균일 온도가 가미되었을 때 일어나는 자연 대류 현상을 조사하였다. 전도가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서는 세가지의 공간적 대칭성(점대칭, 상하대칭, 좌우대칭)을 만족하는 해가 존재한다. 그러나 Rayleigh 수를 증가시키면 어떤 임계값 이상에서는 상하대칭성이 깨지면서 다수 셀 대류(multicellular convection)가 일어난다. 이와 같이 유동 형태가 완전하게 바뀔 때 따라 임계점 부근에서는 전도

영역에 비해 상대적으로 큰 Nusselt 수의 증가가 일어난다. 다수 셀 대류가 일어나는 큰 Rayleigh 수에서 파동수가 $k=0.5$ 인 경우, 한 주기에 걸쳐 10, 12, 14, 16개의 셀을 갖는 4개의 다중해(multiple solutions)가 발견되었다. $k=1$ 인 경우, 6개와 8개의 셀을 갖는 이중해(dual solutions)가 발견되었다. 다수 셀 대류 영역에서의 셀의 형태는 정방형에 가깝다.

참고 문헌

Benjamin, T. B. and Mullin, T. (1982). Notes on the multiplicity of flows in the Taylor experiment. *J. Fluid Mech.*, 121, 219-310.

Bradean, R., Ingham, D.B., Heggs, P.J. and Pop, I. (1996). Buoyancy-induced flow adjacent to a periodically heated and cooled horizontal surface in porous media. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 39(3), 615-630.

Busse, F. H. (1981). Transition to turbulence in Rayleigh- Bénard convection. In *Topics in Applied Physics*, Vol. 45, Edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub. Springer-Verlag, 97-137.

Napolitano, M. and Quartapelle, L. (1985). Block ADI Methods for steady natural convection in two dimensions, in *Numerical Methods in Heat and Mass Transfer*. Vol. 3, John Wiley and Sons. 125-148.

Yoo, J.-S. and Schultz, W.W. (2003). Thermal convection in a horizontal porous layer with spatially periodic boundary temperatures: small Ra flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 46(24), 4747-4750.