

대칭 하중을 받는 포물선 아치 리브의 탄성 면내 좌굴 강도

In-plane elastic buckling strength of parabolic arch ribs subjected symmetrical loading

문 지 호¹⁾ · 윤 기 웅²⁾ · 김 성 훈³⁾ · 이 학 은⁴⁾
Moon, Ji Ho Yoon Ki Yong Kim, Sung Hoon Lee, Hak Eun

요약 : 대칭 하중을 받는 아치 리브의 경우 면내 강성이 가해지는 하중에 비하여 작은 경우 예기치 않게 면내 방향으로 좌굴이 발생하게 된다. 아치 리브의 종국 면내 좌굴 강도는 재료의 비탄성이 고려되어야 한다. 하지만 탄성 면내 좌굴 강도는 세장비가 큰 경우에는 재료의 탄성 범위에서 좌굴이 발생하기도 하며, 세장비가 작은 경우에도 아치의 지간이나 라이즈, 단면의 개략적인 형태를 결정하는 초기 설계에 유용하게 사용된다. 본 논문에서는 아치 교량의 설계에 자주 이용되는 대칭 하중을 받는 포물선 아치 리브의 형상에 관하여 비선형 유한 요소 해석을 사용하여 탄성 면내 좌굴 강도에 대하여 연구를 수행 하였다. 연구 결과 기존의 탄성 좌굴 이론에서는 휨강성과 탄성 좌굴 강도는 비례하지만, 비선형 해석 결과 아치 단면의 세장비가 작을 경우 휨강성과 아치의 탄성 좌굴 강도가 비선형적인 관계를 보이는 것을 밝혔다.

ABSTRACT : When the in-plane flexural rigidity is small in relation to the applied load, the arch ribs may buckle to the in-plane direction. Designers should therefore determine the in-plane buckling strength. To determine the buckling strength of arch ribs, designers have to consider the material nonlinear response. But in the case of arch ribs having large slenderness ratio, arch ribs may buckle in the elastic range, and when the arch ribs have low slenderness ratio, elastic buckling strength is useful in the preliminary design. In this paper, elastic buckling strength of arch ribs, which are frequently used in practical design, is studied using nonlinear finite element method. In general, the relation between flexural rigidity and elastic buckling strength is linear. As seen from the results, however, when the arch ribs have low slenderness ratio, the relation between flexural rigidity and elastic buckling strength is nonlinear.

핵심 용어 : 아치, 좌굴, 기하 비선형 해석

KEYWORDS : Arch, Buckling, Geometry nonlinear analysis

1. 서론

대칭 하중을 받는 아치 리브의 경우 면내 강성이 가해지는 하중에 비하여 작은 경우 예기치 않게 면내 방향으로 좌굴이 발생하게 된다. 따라서 아치 리브를 설계하기 위해서는 반드시 아치의 면내 좌굴 강도를 결정해야 한다. 아치 리브의 종국 면내 좌굴 강도는 재료의 비탄성이 고려되어야 하지만 탄성 면내 좌굴 강도는 세장비가 작은 경우에는 재료의 탄성 범

위에서 좌굴이 발생하기도 하며, 세장비가 큰 경우에도 아치의 지간이나 라이즈, 단면의 개략적인 형태를 결정하는 초기 설계에 유용하게 사용된다.

아치 리브의 탄성 면내 좌굴 거동에 관한 기존 연구자들의 업적을 요약하면 다음과 같다.

Austin(1976)은 유사 기하 비선형 해석을 이용하여 원형 탄성 아치와 포물선 탄성 아치에 대하여 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중과 아치 크라운에 작용하는 집중하중

1) 고려대학교 사회환경시스템공학과 박사 과정

(Tel:02-924-9610, Fax:02-928-5217, E-mail:deadalive@korea.ac.kr)

2) 정희원, 선문대학교 토목공학과 교수 공학박사(kyyoon@sunmoon.ac.kr)

3) 고려대학교 사회환경시스템공학과 석사 과정(kohshi2@hanmail.net)

4) 정희원, 고려대학교 사회환경시스템공학과 교수 공학박사(thelee@korea.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2005년 10월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

에 관하여 연구를 수행하여 전좌굴 변위가 고려된 좌굴계수를 제안하였다. Harrison(1982)은 유한 요소 해석을 통해 포물선 탄성 아치에 관하여 기하 비선형 해석을 수행 하였으며 부분 등분포 하중을 받는 라이즈비가 0.25인 포물선 탄성 아치의 경우 아치의 전구간에 걸쳐 등분포하중이 작용하는 경우보다 임계 등분포하중의 크기가 작다는 사실을 밝혔다. Yong-Lin Pi 와 Trahair(1997)는 기하 비선형 유한요소 해석을 사용하여 원형 탄성 아치의 후좌굴 거동과 전좌굴 변형의 영향에 대하여 연구를 수행 하였지만, 원주 방향의 등분포 하중에 관하여만 연구를 수행하였다. Bradford 와 Yong-Lin Pi(2002)는 아치 중앙에 집중하중을 받는 대칭단면 원형 탄성 아치의 약식해를 유도하였으며, 그 결과를 비선형 유한 요소 해석을 통하여 검증하였다. 국내의 면내 탄성 거동에 대한 연구로는 김연태(1992)가 낮은 아치의 동적 비선형 해석 방법 및 좌굴 판단 기준을 제시하였다.

본 논문에서는 아치 교량의 설계에 자주 이용되는 포물선 아치 리브의 형상에 관하여 비선형 유한 요소 해석을 사용하여 탄성 면내 좌굴 강도에 대하여 연구를 수행 하였다. 연구에 사용된 하중은 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중과 아치 크라운에 작용하는 집중 하중과 같은 대칭 하중만 고려하였다. 또한 경계 조건은 양단 힌지의 경우와 양단 고정인 경우를 고려하였다. 기존의 탄성 좌굴 이론에서는 지간이 일정하고 라이즈가 결정된 경우 아치의 탄성 면내 좌굴 강도는 아치의 휨강성에 비례한다. 하지만 본 연구 결과 라이즈비가 결정된 경우에도 특정한 경계조건과 라이즈비에서는 휨강성과 아치의 탄성 좌굴 강도가 비선형적인 관계를 보이는 것을 밝혔다.

2. 해석 모델의 검증과 해석 아치 리브의 선정

2.1 해석 모델의 검증

본 연구에서는 범용 구조해석 프로그램인 ABAQUS를 사용하여 연구를 수행하였다. 해석시 사용한 요소는 ABAQUS에서 제공하는 B22로써, 3-node quadratic beam 요소이며, 각각 해석 모델에 50개의 beam 요소를 사용하였다. 해석모델의 타당성을 검증하기 위하여 그림 1과 같이 Snap-through가 발생하는 낮은 아치(Shallow arch)관하여 해석을 수행하여 기존의 연구자들의 결과와 비교를 하였다.

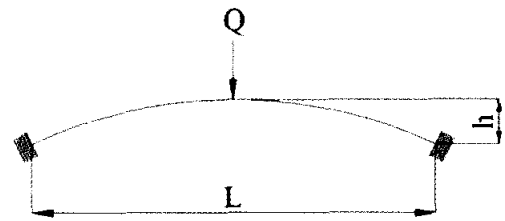


그림 1. 해석 검증 모델

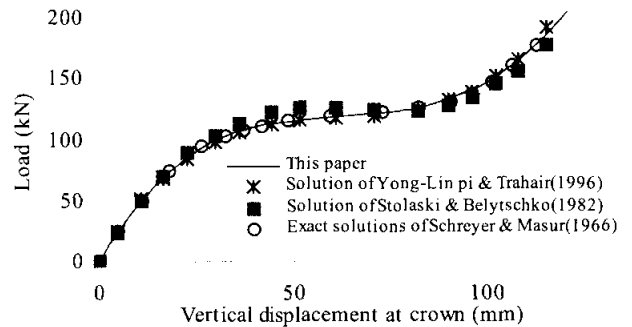


그림 2. 기존 연구자들과 본 연구에서 사용한 해석 결과의 비교

그림 1의 해석 검증 모델의 제원은 다음과 같다. 아치의 지간은 1.2322m이며, 라이즈는 0.0762m로 라이즈비가 0.06184이다. 아치 단면은 직사각형 단면으로 아치단면의 높이는 0.0508m이며, 아치 단면의 폭은 0.0254m이다. 탄성계수는 6.895×10^4 MPa이다. 위의 그림 2에서 알 수 있듯이 본 연구에서 사용된 해석모델의 결과가 Schreyer & Masur의 엄밀해와 일치하는 것을 알 수 있다. 위의 그림 2에서 Stolaski & Belytschko의 해석 결과를 제외하고 본연구와 Schreyer & Masur, Yong-Lin pi & Trahair이 결과가 거의 일치하는 것을 볼 수 있다. 따라서 본 연구에 사용된 유한요소 해석 모델은 타당한 것으로 판단된다.

2.2 해석 아치 리브의 선정

아치교의 대표적인 형식인 로제교인 경우 일반적으로 지간이 80~150m에 적용이 되며, 이 때 하로식 로제형교의 경우 아치의 지간과 라이즈의 상관관계는 다음의 식(1)과 같다.

$$f = 0.0951L + 6.4$$

Where Unit of L, f : m (1)

위와 같은 기준으로 일반적인 아치교(로제형과 아치교)의 형상을 계산해보면, 아치교의 지간을 100m로 하였을때 라이즈는 15.91m이다. 즉 라이즈비가 0.16정도 된다. 또한 아

치지간이 100m이면, 아치 단면을 박스 단면으로 만들 경우 단면의 높이는 약 1~2m사이에서 결정된다. 따라서 본 연구에서는 아치 지간 100m를 갖는 라이즈비 0.1, 0.15, 0.2인 아치리브에 대하여 해석을 수행하였다. 아치의 단면은 일반적으로 아치 리브에 사용되는 박스형태를 선택하였으며, 아치의 면내 휨강성이 아치 리브의 탄성 강도에 미치는 영향을 파악하기 위하여 세장비 400에서 80에 해당하는 단면에 관하여 연구를 수행 하였다.

3. 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 포물선 아치

3.1 고정지점을 갖는 포물선 아치

아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 포물선 아치의 경우 탄성 좌굴 강도는 식 (2)와 같이 나타난다. 식(2)는 Timoshenko(1961)에 의하여 원주 방향 등분포 하중을 받는 원형 아치와 수직 등분포 하중을 받는 포물선 아치와 같이 아치 단면에 압축력만 발생하는 경우 제안되었다. 이러한 식(2)를 Austin(1976)은 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중과 같이 아치 단면에 휨모멘트와 압축력이 동시에 작용하는 경우 좌굴계수(γ)를 수정하여 제안하였으며, 여기서 좌굴계수 γ 는 경계조건과 라이즈비의 함수이다. Austin은 유사기하 비선형 해석을 사용하여 좌굴계수를 산출하였으며, 아치의 중립축의 비선형 가정을 이용하였다. 따라서 식(2)에서 휨강성 EI 와 탄성 좌굴 강도의 관계가 선형적인 관계가 있는 것을 알 수 있다.

고정지점을 갖는 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 포물선 아치는 해석 결과 모두 비대칭 좌굴 형상 (Antisymmetrical mode)이 발생하였다. 이러한 비대칭 좌굴 형상을 발생시키기 위하여 Eigen-value 해석을 통하여 얻은 비대칭 좌굴모드를 1/1000의 비율로 해석 모델에 입력하여 해석을 수행하였다. 이러한 결과는 아치 크라운에 Disturbing하중을 입력하여 얻은 비대칭 모드와 좌굴 강도와 좌굴 모드가 일치하였다.

$$q_{cr} = \gamma \frac{EI}{L^3} \quad (2)$$

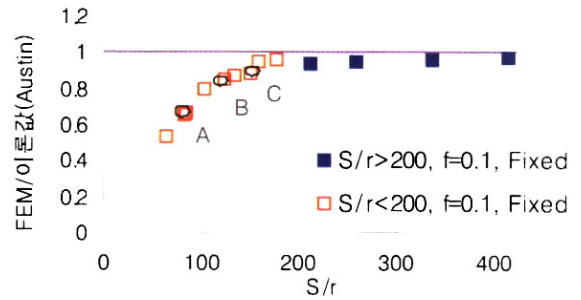


그림 3. 세장비에 따른 FEM결과와 Austin이론의 차이 (라이즈비 0.1, 고정지점)

그림 3은 라이즈비 0.1을 갖는 포물선 아치의 단면의 세장비에 따른 기하 비선형 해석을 이용하여 구한 좌굴강도와 Austin의 이론식의 비를 나타낸다. 그림 3에서 x 축은 단면의 세장비를 나타낸다. 세장비 S/r 에서 S 는 아치 리브의 길이로써 그림 4에 나타난 것과 같다. 또한 r 은 $\sqrt{I/A}$ 로 단면 회전 반경을 나타낸다. y 축은 유한 요소 해석에 의하여 구한 값과 식(2)에 의한 이론식 값의 비를 나타낸다. 즉 y 축 값이 1보다 작은 경우는 유한 요소해석에 의한 값이 이론식 값보다 작은 경우이며, 1과 같은 경우 유한 요소 해석의 값과 이론식이 일치하는 경우이다.

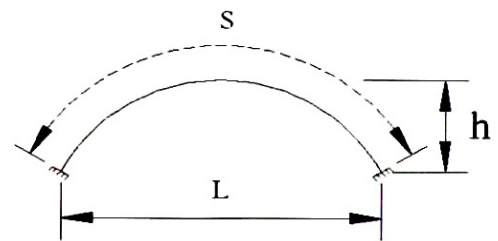


그림 4. 기하 비선형 해석 모델

위의 그림3에서 세장비가 200이상인 곳에서는 Austin의 이론식과 기하 비선형 해석을 통하여 얻은 좌굴강도가 오차 범위 5%이내에서 거의 일치하는 것을 볼 수 있다. 반면에 세장비가 200보다 작은 곳에서는 기하 비선형 해석을 통하여 얻은 좌굴 강도가 Austin의 이론 보다 작은 것을 알 수 있다. 그림 5는 그림 3에서 A, B, C의 해석 모델에 대하여 $P - \Delta$ 그래프를 나타낸 것이다.

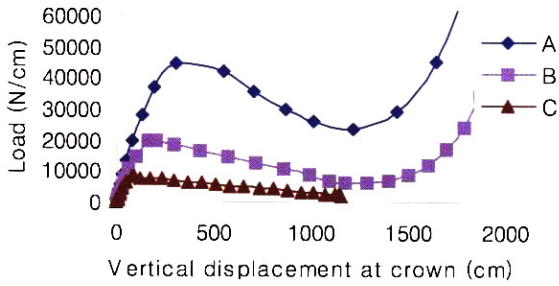


그림 5. 해석 모델 A, B, C 의 하중 처짐 그래프 (라이즈비 0.1, 고정지점)

위의 그림 5에서 A에서 C로 갈수록 좌굴 변위가 작아지는 것을 알 수 있으며, A에서 C로 갈수록 하중 처짐 그래프가 Bifurcation과 같은 양상을 보이고 있다. 즉 위의 그래프에서 라이즈비와 경계조건, 하중이 같더라도 아치 단면의 세장비에 따라 하중 처짐 그래프가 다른 경향을 보이며, 좌굴하중이 Austin이 제안한 이론식과 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 아래의 그림 6은 위의 그림 3의 해석 모델 A, B, C의 지간의 1/4지점에서 중립축의 변형률을 나타낸 것이다.

그림 6에서 해석 모델 A의 경우 중립축의 변형률이 상당히 크게 발생하는 것을 관찰 할 수 있다. 이러한 무시할 수 없는 중립축의 변형률은 Austin이 유사 기하비선형 해석을 수행하면서 가정한 아치 단면의 비신장 조건에 위배가 된다. 아치 단면의 세장비가 클수록 즉, 단면이 세장할수록 구조물은 작은 하중에서 좌굴이 발생하게 되며, 이 때 발생하는 중립축 변형률은 미미하기 때문에 Austin이 가정한 중립축의 비신장 조건을 만족시킨다. 하지만 구조물의 세장비가 작을 경우에는 좌굴 발생전 큰 하중에 저항 할 수 있으며, 큰 하중에 의하여 무시할 수 없는 중립축의 변형이 발생하게 된다. 이는 큰 전좌굴 변형을 만들게 되며, 좌굴 강도를 저하시켜 Austin이 제안한 좌굴 하중보다 작은 하중에서 좌굴이 발생하는 것으로 판단된다.

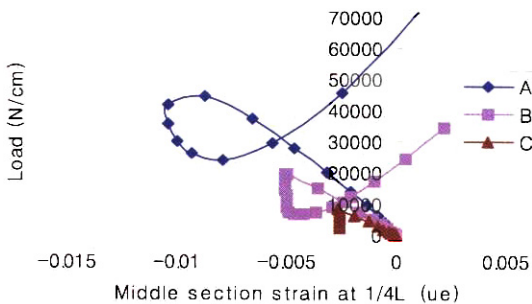


그림 6. 해석 모델 A, B, C 의 지간 1/4지점에서 중립축의 변형률 (라이즈비 0.1, 고정지점)

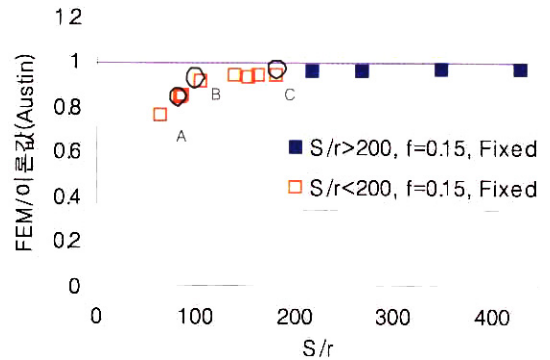


그림 7. 세장비에 따른 FEM결과와 Austin이론의 차이 (라이즈비 0.15, 고정지점)

그림 7은 라이즈비가 0.15인 고정지점을 갖는 포물선 아치의 세장비에 따른 기하비선형 해석 결과와 Austin의 제안식과의 차이를 나타낸다. 앞의 라이즈비 0.1의 경우와 같이 세장비가 작은 경우 Austin의 좌굴강도와 본연구의 좌굴 강도가 다르게 나타났다. 하지만 그 차이는 라이즈비 0.1에서와 같이 크지는 않았다. 그림 8은 그림 7에서의 해석 모델 A, B, C 에 대한 하중 처짐 그래프를 나타낸다.

그림 8에서 해석모델 A의 경우 Snap-through가 발생하였다. 반면에 B의 경우 A와는 다르게 하중과 변위가 동시에 증가하다가 어느 시점을 지난 후 하중이 증가하면서 변위는 감소하는 모습을 보이고 있다. 라이즈비 0.15의 경우에도 라이즈비 0.1에서와 마찬가지로 세장비가 작아지면서 Austin의 좌굴 하중과 본 연구에서의 좌굴 하중이 차이를 보이고 있다. 또한 Austin의 좌굴 강도와 본 연구의 좌굴강도가 10% 이상 차이가 발생하는 경우 하중 처짐 그래프가 Snap-through를 나타내고 있다. Snap-through는 얇은 아치의 전형적인 하중 처짐 그래프로 Snap-through가 나타나는 아치 단면은 Austin이 가정한 중립축의 비신장 조건을 만족시키지 못하여 Austin의 좌굴하중과 차이를 보이는 것으로 판단된다.

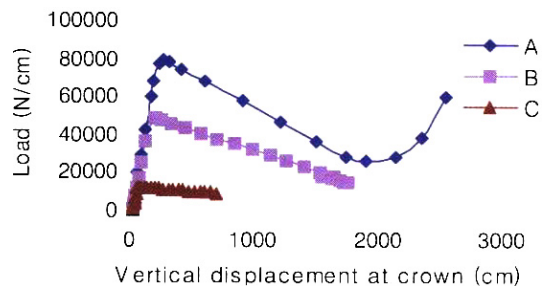


그림 8. 해석 모델 A, B, C 의 하중 처짐 그래프 (라이즈비 0.15, 고정지점)

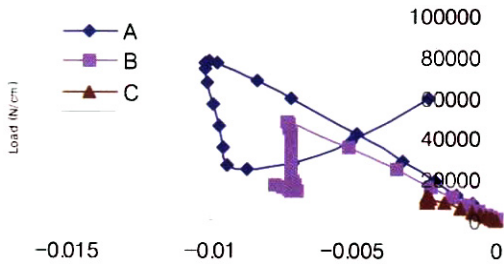


그림 9. 해석 모델 A, B, C 의 시간 1/4지점에서 중립축의 변형률 (라이즈비 0.15, 고정지점)

그림 9는 그림 6과 같이 라이즈비 0.15일 때 해석 모델의 중립축의 변형률을 나타낸다. 이 그림 역시 그림 8과 비교했을 때 그림 8에서 Snap-through가 발생하는 모델 A의 경우 그림 9에서 중립축의 변형률이 감소하였다가 증가하는 현상을 볼 수 있다.

그림 10은 라이즈비 0.2일 때 아치 단면의 세장비에 따른 본 연구의 좌굴 하중과 Austin의 좌굴하중의 차이를 나타낸 것이다. 그림 10에서도 앞의 라이즈비 0.1, 0.15와 마찬가지로 세장비가 작아질수록 좌굴하중은 Austin의 좌굴 하중과 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 하지만 라이즈비가 커질수록 Austin의 좌굴 하중과 본연구의 좌굴 하중의 차이는 줄어드는 것을 알 수 있다. 그림 3, 7, 10에서 알 수 있듯이 세장비가 200이상인 곳에서는 식(2)와 유한 요소 해석의 결과의 차이가 5%이하로 발생한다.

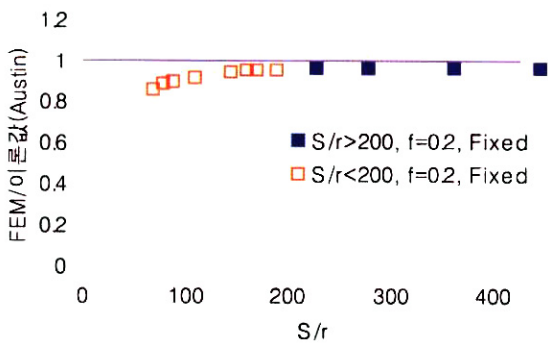


그림 10. 세장비에 따른 FEM결과와 Austin이론의 차이 (라이즈비 0.2, 고정지점)

3.2 2-힌지 지점을 갖는 포물선 아치

2-힌지 지점을 가지고 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 포물선 아치의 경우 해석 결과 앞의 고정지

점을 갖는 포물선 아치 리브와는 다르게 모든 해석 세장비에 대하여 Austin(1976)의 제안식과 최대 오차 7%이내에서 유한 요소 해석 결과와 일치하였다. 그림 11은 2-힌지 지점을 갖는 포물선 아치의 이론값과 본 연구에서 얻은 유한 요소 해석 결과를 나타낸 것이다. 앞에서 설명 하였듯이 x 축은 단면의 세장비(S/r)를 나타내며, y 축은 유한 요소 해석에 의하여 구한 값과 식(2)에 의한 이론식 값의 비를 나타낸다. 그림 11에서 라이즈비(f/L)가 0.15이고 세장비가 87.2일 때 이론식과 차이가 6.8%로 가장 크게 나타났다.

그림 12는 라이즈비 0.1과 0.2의 해석모델 중 세장비가 약 100 주변의 모델을 선정하여 하중 처짐 그래프를 나타낸 그래프이다. 이 그래프에서 세장비가 충분히 작더라도 경계조건이 2-힌지인 경우 고정지점을 갖는 포물선 아치와 같이 하중 처짐 그래프가 Snap-through가 발생하지 않는다. 다시 말해서 라이즈비가 0.1인 경우 그림 12에서 전좌굴 변위(약 100cm)가 라이즈($f=1000cm$)의 비의 약 10% 정도 발생하더라도 하중 처짐 그래프가 Snap-through와 같은 현상이 나타나지 않는 경우 이론식(2)는 유효하다.

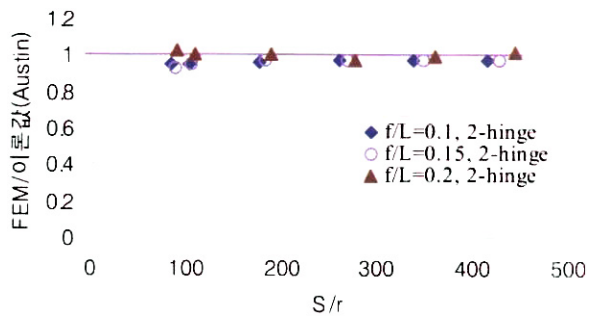


그림 11. 세장비에 따른 FEM결과와 Austin이론의 차이 (2-힌지 지점)

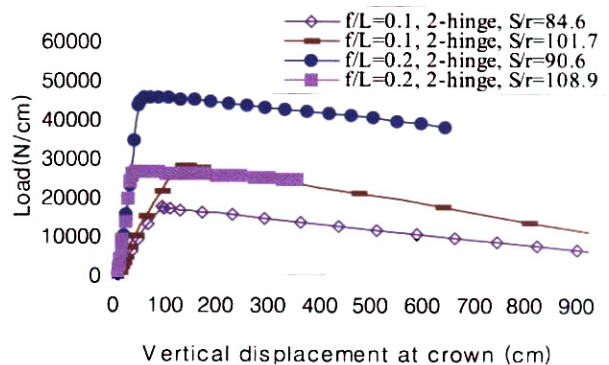


그림 12. 해석 모델의 하중 처짐 그래프(2-힌지 지점)

이러한 이유는 Austin이 사용한 기하 비선형 해석은 정적 해석과 Eigen-value 해석을 반복하면서 전좌굴 변위를 고려

하였기 때문에 판단된다. 하지만 Austin의 연구는 중립축의 변형을 무시하였으며, 고정 지점을 갖는 포물선 아치의 세장비가 작은 경우 중립축의 변형률이 약 -0.01 정도로 크게 발생하여 유한 요소해석 결과와 큰 차이를 보였다. 그림 13은 2-힌지 지점을 갖는 포물선 아치의 하중과 아치 단면의 중립축의 변형률의 관계를 나타낸다. 같은 세장비를 갖는 고정 지점포물선 아치의 중립축의 변형률이 약 -0.01인 것에 비하여 2-힌지를 갖는 포물선 아치의 경우 그림 13과 같이 약 -0.0055 ~ -0.005로 작았다.

그림 11에서 라이즈비 0.15와 0.2에서는 해석에 사용된 모든 세장비(약80에서 450)에서 이론식(2)와 유한 요소 해석 결과가 5%이내의 오차를 보였다. 하지만 라이즈비 0.1에서는 세장비가 87에서 오차가 6.8%가 발생하였다. 식(2)가 유효한 범위는 좀더 많은 연구가 수행될 것으로 판단되나, 개략적으로 세장비가 80~450인 범위에서 식(2)를 사용하여도 무방한 것으로 판단된다.

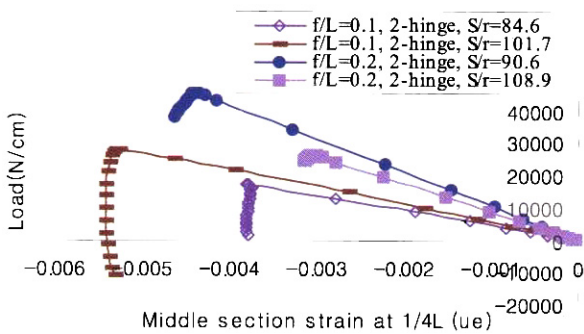


그림 13. 해석 모델의 지간 1/4지점에서 중립축의 변형률 (2-힌지 지점)

3.3. 해석 결과의 분석

(아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중)

3.1과 3.2절의 사실을 종합하여 보면 아치 중립축의 변형률이 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 포물선 아치의 탄성 좌굴 강도에 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 또한 아치 중립축의 변형률은 아치 단면의 세장비가 작을 수록 크게 발생하며, 고정지점을 갖는 세장비가 작은 포물선 아치 리브에서는 탄성 면내 좌굴 강도를 크게 감소시킨다. 이러한 사실 이외에 아치 단면 중립축의 변형률이 큰 세장비가 작은 고정지점의 포물선 아치의 경우 하중 처짐 그래프가 Snap-through의 형상을 보이는 것을 알 수 있다.

그림 14는 고정지점을 갖는 포물선 아치와 2-힌지 지점을 갖는 포물선 아치의 아치 지간 1/4지점의 축방향 변형률과 이론식의 차이를 보여 준다. 이 그림에서 축방향 변형률이 커

질수록 y 축이 1보다 작아지는 것을 알 수 있다. 즉, 유한 요소 해석 결과가 이론식보다 작게 나타난다. 그림 14에서 2-힌지 지점을 갖는 포물선 아치 데이터의 경우 속이 빈 점들로 나타나며, 고정 지점을 갖는 포물선 아치의 데이터는 속이 찬 점들로 나타난다. 그림 14에서 2-힌지를 갖는 포물선 아치의 경우 축방향 변형률이 고정 지점을 갖는 포물선 아치에 비하여 작은 것을 알 수 있으며, 최대 축방향 변형률이 약 -0.005 정도 발생하는 것을 알 수 있다. 하지만 고정 지점을 갖는 포물선 아치의 경우 축방향 변형률이 -0.013까지 발생하는 것을 볼 수 있다. 이렇게 축방향 변형률이 큰 고정 지점을 갖는 포물선 아치는 해석 결과 크기는 이론 좌굴 강도보다 약 33%정도 작게 평가 되었다.

축방향 변형률이 약 -0.002보다 작은 범위에서는 고정지점을 갖는 포물선 아치나 2-힌지 지점을 갖는 포물선 아치나 모두 이론식과 유사한 결과를 나타내었다. 따라서 축방향 변형률이 크게 발생하는 경우에는 Austin의 좌굴 계수를 산정할 때 가정한 중립축이 비신장 조건을 만족시키지 못하기 때문에 오차가 발생하며, 이러한 경향은 세장비가 작은 고정지점을 갖는 포물선 아치에서 뚜렷하게 발생한다.

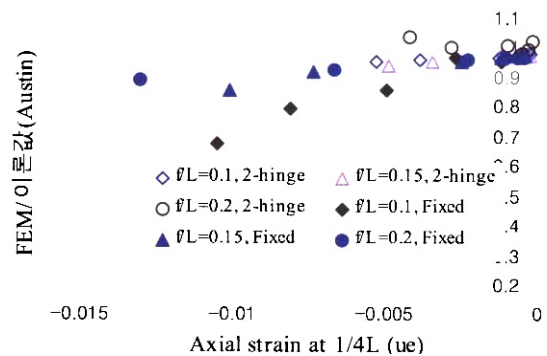


그림 14. 1/4지점에서 중립축의 변형률과 이론식의 차이

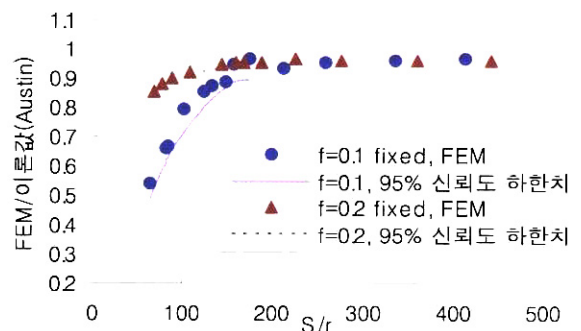


그림 15. 세장비에 따른 FEM결과와 95% 신뢰도 하한치(고정지점)

위의 결과 분석에서 고정지점을 갖는 포물선 아치의 경우 세장비에 따라 이론식과 유한요소 해석의 결과가 차이가 발생

하는 것을 확인할 수 있었다. 특히 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 2-힌지 포물선 아치를 제외하고 세장비가 200보다 작아지는 경우 전좌굴 변형이 크게 발생하였으며, 하중 치짐 그래프가 Snap-through와 같은 현상을 보였으며, 기존 이론식과 큰 차이를 보였다. 따라서 세장비가 200보다 작은 고정지점을 갖는 포물선 아치의 탄성 면내 좌굴 강도를 산정하기 위해서는 식(2)에 세장비가 고려된 새로운 변수가 필요하다. 위의 그림 15는 고정지점을 갖는 포물선 아치가 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 경우 유한요소해석 결과와 95% 신뢰도 하한치 곡선을 나타낸다. 하한치 곡선은 통계 프로그램인 SAS를 이용하여 구하였으며, 95%의 신뢰도를 갖는다. 하한치 곡선은 세장비가 200미만인 곳에서 수행되었으며, 세장비가 200미만인 곳은 세장비의 2차 함수로 가정 하여 하한치 곡선을 구하였다. 이러한 95% 신뢰도 하한치 곡선을 이용하여 식(2)를 수정하면 다음의 식(3)과 같이 나타난다.

$$q_{cr} = \gamma \beta_1 \frac{EI}{L^3}$$

where $\beta_1 = a + b(S/r) + c(S/r)^2$, $S/r < 200$
 $\beta_1 = 1$, $S/r \geq 200$ (3)

표 1. β_1 의 계수와 결정계수(고정지점)

라이즈비	a	b	c	R - square (S/r < 200)
0.1	-0.07525	0.01076	-0.00002978	0.9877
0.15	0.34579	0.00756	-2.51E-05	0.974
0.2	0.67376	0.00318	-9.52E-06	0.9889

식(3)에서 β_1 은 세장비에 따른 영향계수를 나타내며, 각각에 해당하는 계수는 표 1과 같이 나타난다. 표 1에서 R - square는 결정계수를 나타내며, 1에 가까울수록 상관관계가 증가하는 것이며, 0에 가까울수록 상관관계가 감소하는 것을 나타내며, Curve fitting의 정확도와 연결된다. 위의 표 1에서 볼 수 있듯이 모든 결정계수가 0.9 이상인 것을 알 수 있다. 따라서 위에 수행된 Curve fitting이 상당히 정확한 값을 주는 것을 알 수 있다.

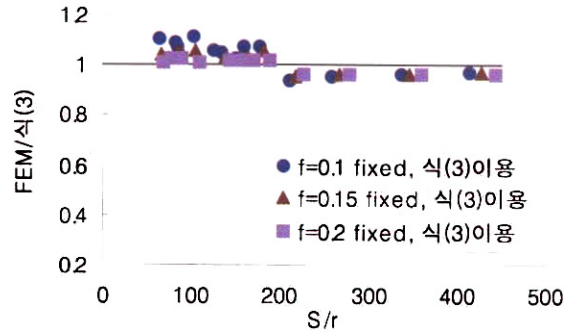


그림 16. 세장비에 따른 FEM결과와 식(3)의 결과 비교

그림 16은 위에 제안된 식(3)을 이용하여 유한요소 해석 결과와 이론식(3)의 값을 비교한 것이다. 위의 그림 16에서 볼 수 있듯이 거의 모든 유한요소 해석 결과가 1주변에 분포하며, 세장비가 200보다 작은 경우 1보다 약간 높은 값을 보이는 것을 알 수 있다. 세장비가 200 미만의 경우 제안식(3)이 안전측으로 탄성 면내 좌굴을 예측하는 것을 나타낸다. 세장비가 200보다 큰 경우에는 식(3)에서 알 수 있듯이 기존의 이론식을 그대로 이용하였으며, 유한 요소 해석 결과가 1보다 작은 것을 알 수 있다. 하지만 오차가 5% 이내로 오차 범위 안에 들어간다.

4. 크라운에 집중하중을 받는 포물선 아치

4.1 고정지점을 갖는 포물선 아치

아치 크라운에 집중하중을 받는 고정지점 포물선 아치는 라이즈비가 0.5와 같이 큰 경우를 제외하고 대칭모드 (Symmetrical mode)로 좌굴 형상이 나타난다. 본 연구에서는 라이즈비 0.1, 0.15, 0.2의 경우에만 연구를 수행 하였으므로 해석 모델은 모두 대칭모드를 유발시켰다. 아치 크라운에 집중 하중을 받는 포물선 아치의 면내 탄성 좌굴 강도는 앞의 아치리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 고정지점 포물선 아치와 유사한 면내 거동을 나타내었다. 식(4)는 아치 크라운에 집중하중을 받는 아치의 탄성 임계 면내 좌굴 강도를 나타낸다. 여기서 Q_{cr} Austin(1976)은 유사 기하 비선형 해석을 이용하여 라이즈비 0.1~0.5에 해당하는 아치 크라운에 집중하중을 받는 포물선 아치에 대하여 좌굴계수를 제안 하였다.

$$Q_{cr} = \gamma \frac{EI}{L^2} \tag{4}$$

식(4)에서 볼 수 있듯이 좌굴 임계하중 Q_{cr} 과 면내 휨강성 EI 가 선형적인 관계를 나타낸다. 하지만 고정지점을 갖는 포물선 아치의 경우 Q_{cr} 과 EI 가 비선형적인 관계를 나타내었다.

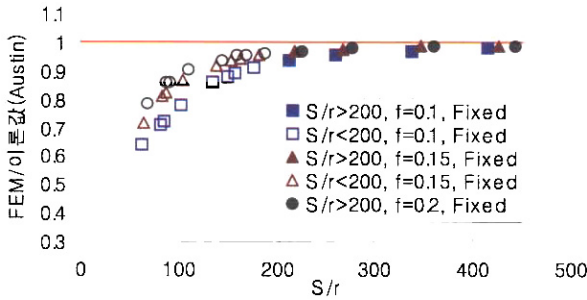


그림 17. 세장비에 따른 FEM결과와 이론식의 차이(고정지점)

그림 17은 유한 요소 해석 결과를 나타내며, 세장비가 200이하가 될 경우 식(4)와 큰 차이를 보이고 있다. 라이즈비 0.1이며 $S/r=84.6$ 인 경우 식(4)와 유한 요소 해석 결과가 약 28%의 오차를 보이고 있다. 만약 Q_{cr} 과 EI 가 선형 관계를 가지고 있다면 y 축이 전 세장비에 대하여 1이 되거나 일정한 차이를 가지고 $y = C$ 와 같은 상수 함수가 되어야 한다. 여기서, C 는 상수를 나타낸다. 하지만 그림 17에서 알 수 있듯이 Q_{cr} 과 EI 의 관계가 비선형적인 것을 알 수 있다.

그림 18은 그림 17의 해석 결과 중 라이즈비 0.1과 0.15 중 대표적인 해석 모델에 관하여 아치 지간 1/4지점에서의 중립축의 변형률을 나타낸 것이다. 그림 18에서 중립축의 변형률이 음의 값을 가지는 것은 아치 리브의 길이가 줄어들었음을 의미한다. 그림 18에서 중립축의 변형률이 음의 값에서 양의 값으로 변화하는 것을 아치 리브가 줄어들다가 좌굴 발생 후 Snap-through가 발생하면서 아치 리브의 길이가 늘어난 것을 나타낸다.

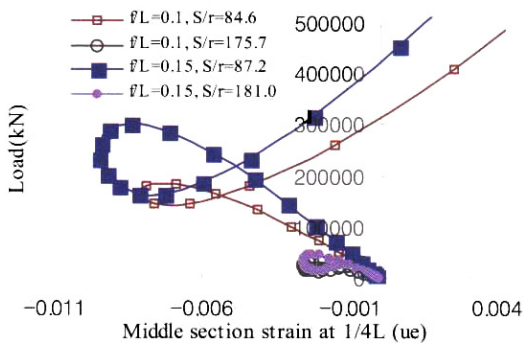


그림 18. 해석 모델의 지간 1/4지점에서 중립축의 변형률(고정지점)

그림 18에서 세장비가 150 보다 큰 경우 중립축의 변형률이 -0.003 보다 작다. 하지만 세장비가 100보다 작은 경우에는 좌굴 발생시 발생하는 중립축의 변형률이 $-0.008 \sim -0.01$ 에 해당하며, 세장비 150인 경우보다 큰 것을 알 수 있다. 위의 그림 18에서 중립축의 변형률이 큰 경우는 앞의 그림 17에서 이론식과 유한 요소 해석 결과의 차이가 큰 경우에 해당한다. 따라서 아치 중립축의 변형률이 아치 크라운에 집중하중을 받는 탄성 포물선 아치의 면내 좌굴 강도에 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 이러한 이유는 Austin이 유사기하 비선형 해석을 사용하여 식(4)에서 좌굴 계수를 산정할 때 중립축의 변형을 고려하지 않았기 때문이다. 또한 세장비가 작을수록 이론식과 차이가 커지는 이유는 세장비가 작은 경우 좌굴 발생전 큰 하중을 받으며, 이러한 하중으로 인하여 좌굴 발생전 중립축의 변형이 크기 때문이다. 위의 그림 17에서 세장비 200이상인 곳에서는 기존의 식(4)와 유한 요소 해석 결과가 오차범위 5% 이내에서 거의 일치한다.

4.2 2-힌지 지점을 갖는 포물선 아치

아치 크라운에 집중 하중을 받는 2-힌지 포물선 아치의 경우 Austin(1976)은 대칭모드와 비대칭 모드 두 가지에 관하여 좌굴계수를 제안 하였으며, 라이즈비가 0.1에서 0.2사이에서는 비대칭 모드의 좌굴하중이 대칭 모드의 경우보다 작다고 하였다. 따라서 아치 크라운에 집중하중을 받는 2-힌지 포물선 아치의 경우 라이즈비 0.1~0.2에서 비대칭 면내 좌굴이 발생한다. 따라서 이번 절에서는 해석모델에 비대칭 좌굴 모드를 발생시켰다.

해석 결과 앞의 집중하중을 받는 고정 지점 포물선 아치와 같이 세장비가 작아질수록 이론식과 유한 요소해석 결과가 차이를 보였다. 하지만 이론식과 유한 요소 해석과의 차이는 고정지점일 때 보다 작았다.

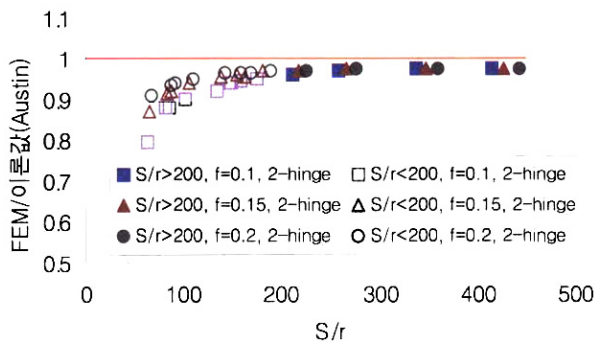


그림 19. 세장비에 따른 FEM결과와 이론식의 차이(2-힌지 지점)

그림 19는 라이즈비 0.1, 0.15, 0.2에 대하여 세장비에 따른 이론식과 유한 요소 해석 결과의 차이를 나타낸 것이다. 그림 19에서 세장비가 작아질수록 차이가 증가하였으며, 이러한 현상은 라이즈비가 작을수록 뚜렷하게 나타났다. 또한 세장비가 200이상인 곳에서는 라이즈비 0.1, 0.15, 0.2 모두에서 오차범위 5%이내에서 이론식과 일치하고 있다. 그림 19는 그림 17과 유사한 경향을 보이고 있음을 알 수 있다.

그림 20은 해석 모델 1/4지점의 중립축의 변형률을 나타낸다. 그림 20은 앞의 고정지점의 그림 18과 유사한 것을 볼 수 있다. 하지만 그림 18의 경우 중립축의 변형률이 음의 값에서 양의 값으로 변하면서 Snap-through현상을 나타내는 반면에 2-힌지를 갖는 포물선 아치의 경우 좌굴 발생 후 중립축의 변형률이 더 이상 감소하거나 증가하지 않으며, 하중이 감소하는 것을 볼 수 있다. 또한 좌굴 발생시 발생하는 변형률의 크기를 그림 18의 고정지점을 갖는 포물선 아치의 중립축 변형률과 비교해보면, 같은 세장비에서 약 2배정도 작은 변형률을 보이는 것을 알 수 있다. 따라서 고정 지점 포물선과 비교를 했을 때 같은 세장비에서 좌굴 발생시 나타나는 변형률이 2-힌지 포물선 아치의 경우 약 2배정도 작게 나타났으며, 이때 발생하는 이론식과의 차이도 고정 지점 포물선 아치에 비하여 작다.

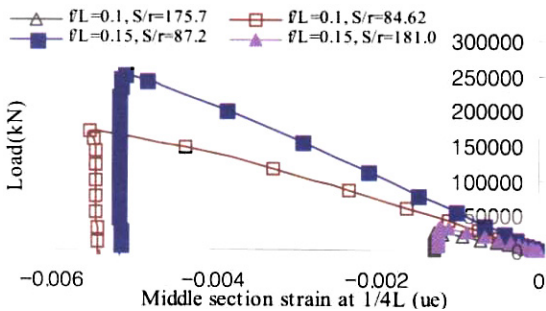


그림 20. 해석 모델의 지간 1/4지점에서 중립축의 변형률 (2-힌지 지점)

4.3. 해석 결과의 분석(아치 크라운에 집중하중 작용)

앞의 4.1과 4.2의 해석 결과 세장비가 작은 경우 좌굴 발생전 큰 하중이 작용하게 되며, 이러한 하중으로 인하여 중립축의 변형이 크게 발생하며, 이론식과 차이를 보였다. 이러한 현상은 라이즈비가 작을수록 크게 나타났다. 고정지점을 갖는 포물선 아치와 2-힌지 포물선 아치 모두 아치 크라운에 집중 하중을 받을 경우 세장비가 200이상인 곳에서는 유한 요소 해석 결과와 이론식의 차이가 오차범위 5% 이내로 일치하였다. 따라서 세장비 200 이상인 곳에서는 기존의 이론식을 그

대로 적용하여도 무방할 것으로 판단된다.

그림 21은 4.1, 4.2절의 해석 결과를 가지고 좌굴 발생시 아치 지간의 1/4지점에서 발생하는 중립축의 변형률과 유한 요소해석 결과와 이론식의 차이의 관계를 나타낸 그래프이다. 그림 21에서 속이 빈 점들은 2-힌지 포물선 아치의 해석 결과를 나타내고, 속이 찬 점들은 고정 지점의 포물선 아치의 데이터를 나타낸다. 2-힌지 포물선 아치의 좌굴 발생시 나타나는 중립축의 변형률이 고정지점의 중립축보다 작은 것을 알 수 있다. 또한 전체적으로 좌굴 발생시 나타나는 중립축의 변형률과 이론식(4)와 유한 요소 해석 결과의 차이가 선형적인 관계가 있는 것을 알 수 있다.

그림 22는 세장비가 200보다 작은 아치 크라운에 집중하중을 받는 고정지점을 갖는 라이즈비 0.1 포물선 아치와 2-힌지 지점을 갖는 라이즈비 0.2 포물선 아치의 유한 요소 해석 결과와 95% 신뢰도 하한치 곡선은 나타낸다. 이러한 하한치 곡선을 이용하여 아치 크라운의 집중하중을 받는 포물선 아치의 탄성 면내 좌굴 강도는 식(4)를 수정하여 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

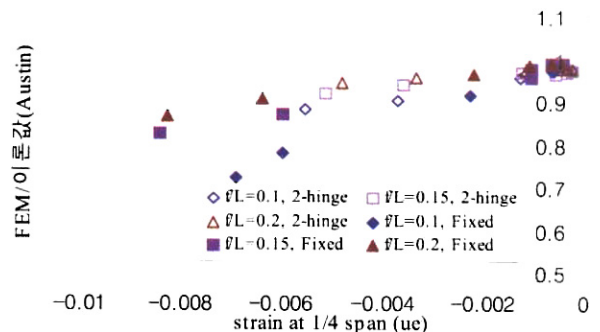


그림 21. 1/4지점에서 중립축의 변형률과 이론식과의 차이

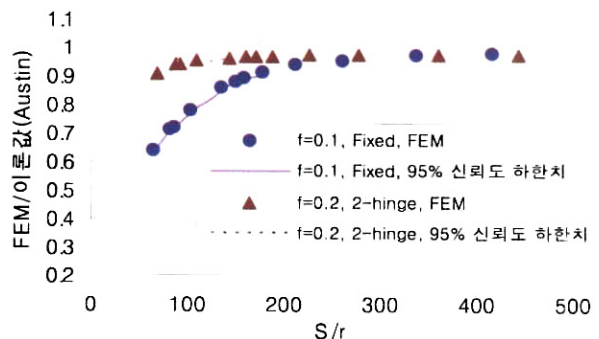


그림 22. 세장비에 따른 FEM결과와 95% 신뢰도 하한치

$$Q_{cr} = \gamma\beta_2 \frac{EI}{L^2}$$

$$\text{where } \beta_2 = a + b(S/r) + c(S/r)^2, \quad S/r < 200$$

$$\beta_2 = 1, S/r \geq 200 \quad (5)$$

식(5)에서 β_2 는 세장비에 따른 보정계수를 나타낸다. β_2 는 경계 조건과 라이즈비에 따라 변하며, 표2에 나타나있다. 3.3절에서 설명하였듯이 *R-square*는 결정계수로 1에 가까울 수록 회귀분석이 신뢰성이 높아진다. 표 2에서 볼 수 있듯이 세장비가 200미만인 경우 모두 결정계수가 0.9이상인 것을 볼 수 있다.

그림 23은 식 (5)를 이용하여 보정된 이론값과 유한요소 해석 결과를 비교한 그래프이다. 이 그림에서 식 (5)는 아치 크라운에 집중하중을 받는 포물선 아치의 탄성 면내 좌굴 강도를 잘 묘사하는 것을 알 수 있다.

표 2. β_2 의 계수와 결정계수

라이즈비		a	b	c	R-square (S/r < 200)
고정 지점	0.1	0.29916	0.00624	-1.6E-05	0.9993
	0.15	0.32692	0.00704	-2.12E-05	0.9862
	0.2	0.47204	0.00542	-1.6E-05	0.9845
2-힌지 지점	0.1	0.50574	0.00507	-1.65E-05	0.9271
	0.15	0.6776	0.00341	-1.09E-05	0.9662
	0.2	0.78735	0.0021	-6.56E-06	0.9708

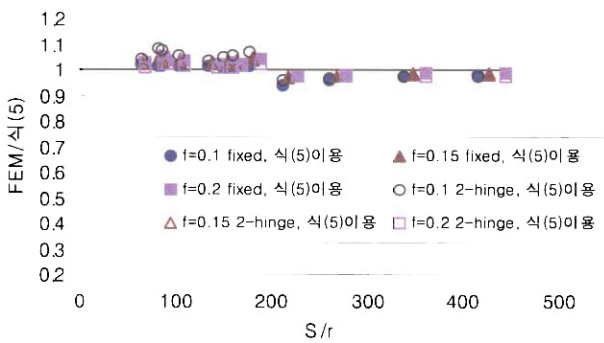


그림 23. 세장비에 따른 FEM결과와 식(5)의 결과 비교

5. 결 론

본 연구에서는 비선형 유한 요소 해석을 이용하여 대칭하중을 받는 포물선 아치리브의 탄성 면내 좌굴 강도에 관하여 연구를 수행하였다. 본 연구의 주요한 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 기존의 대칭하중을 받는 포물선 아치의 탄성 면내 좌

굴 강도식인 식(2)와 식(4)에서는 탄성 면내 좌굴 강도(q_{cr}, Q_{cr})와 면내 면내 휨강성(EI)의 관계가 선형적 관계를 가진다. 하지만 연구 결과 세장비가 낮은 곳에서는 탄성 면내 좌굴 강도와 면내 휨강성의 관계는 비선형의 관계를 보였다.

- (2) 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 고정지점 포물선 아치의 경우 세장비가 작아질수록 이론식(2)와 유한 요소 해석 결과의 차이가 증가 하였다. 또한 이러한 현상은 라이즈비가 200보다 작아질수록 뚜렷하게 발생하였다. 이러한 현상이 발생하는 이유는 세장비가 작은 경우 좌굴 발생전 큰 하중을 받게 되며, 이 때 아치 중립축의 큰 변형이 발생하며, 하중 처짐 곡선이 Snap-through와 같은 현상을 보이기 때문이다. 이와 같은 현상은 아치 크라운에 집중하중을 받는 고정지점, 2-힌지 포물선 아치에서도 같은 현상이 발생한다.
- (3) 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 고정 지점 아치와 아치 크라운에 집중하중을 받는 고정, 2-힌지 아치의 경우 개략적으로 세장비가 약 200보다 큰 경우 유한 요소해석 결과와 이론식(2), (4)의 좌굴 강도가 오차범위 5%이내에서 일치하였다. 또한 위의 경우 세장비가 200보다 작은 경우는 이론식(2), (4)를 그대로 적용할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 이러한 세장비가 200보다 작은 포물선 아치에 대하여 식(3)과 (5)를 제안하였다.
- (4) 아치 리브를 따라 작용하는 수직 등분포 하중을 받는 2-힌지 아치의 경우 해석 전 세장비에서 최대오차 6.8% 이내에서 이론식(2)와 유한 요소 해석 결과가 일치 하였으며, 개략적으로 해석 세장비 전구간에서 ($S/r=80\sim 450$) 식(2)를 그대로 적용하여도 무방한 것으로 판단된다. 또한 같은 세장비에서 발생하는 좌굴 발생전 중립축의 변형률은 고정지점의 경우보다 약 2배 작은 것으로 나타났으며, 하중 처짐 그래프는 Snap-through를 나타내지 않았다.
- (5) 고정 지점을 갖는 포물선 아치 중 세장비가 작으며, 이론식과 큰 차이를 보이는 경우 아치 리브 중립축의 변형률은 음의 값에서 양의 값으로 변화하였으며, 이는 아치 리브가 좌굴 발생전 아치 리브의 길이가 줄어들다가 좌굴 발생 후 Snap-through가 발생하면서 증가한 것을 나타낸다.

감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사 드립니다.

참 고 문 헌

김연태 (1992) 비선형 운동 해석에 의한 낮은 아치의 동적 임계 하중의 결정, 대한 토목학회 논문집, 제12권 2호, pp.43-54

김세영 (2003) 최신 강교 계획과 설계, 과학기술

천대운 (2002) 종합 SAS 통계분석, 교우사

ABAQUS Standard user's manual version 6.2(2001) Hibbit, Karsson and Sorensen Inc.,

Austin, W. J. (1971) In-plane bending and buckling of arches, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 97, NO. ST5, pp.1575-1592.

Austin, W. J. (1976) Elastic buckling of arches under symmetrical loading, *Journal of the Structural*

Division, ASCE, Vol. 102, NO. ST5, pp.1085-1095.

Bradford, M. A. and Pi, Y.-L. (2002) In-plane elastic stability of arches under a central concentrated load, *J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 128, NO. 7, pp. 710-719.

Harrison, H. B. (1982) In-plane stability of parabolic arches, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 108, NO. ST1, pp.195-205.

Pi, Y.-L. and Trahair, N. S. (1998) Non-linear buckling and post buckling of elastic arches, *Eng. Struct.*, Vol. 20 No. 7, pp.571-579.

Timosheko, S., and Gere, J. M. (1961) Theory of elastic stability, 2nd edition, McGraw-Hill, New York.

Yong-Lin Pi & N.S. Trahair (1996) In-plane inelastic buckling and strengths of steel arches *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, Vol. 122, NO. 7, pp.734-747.

(접수일자 : 2005. 1. 5 / 심사일 2005. 1. 24 / 심사완료일 2005. 3. 29)