자유단 집중질량을 갖는 변단면 캔틸레버 기둥의 임계하중

Critical Loads of Tapered Cantilever Columns with a Tip Mass

정 진 섭[1] · 이 병 구[2] · 김 권 식[3] · 김 종 웅[3]
Jeong, Jin Seob *Lee, Byoung Koo* *Kim, Gwon Sik* *Kim, Jong Ung*

요 약 : 이 논문은 자유단에 집중질량을 갖고 종동력이 작용하는 변단면 캔틸레버 기둥의 임계하중에 관한 연구이다. 기둥의 단면을 중실 직사각형 단면을 갖는 선형 변단면으로 채택하고, Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 자유단 집중질량을 갖고 종동력을 받는 소위 Beck 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식을 수치해석하여 하중-고유진동수 곡선을 얻고 이로부터 발산임계하중 및 동요임계하중을 산출하였다. 수치해석의 결과로부터 변단면 형태, 경사변수 및 질량비가 임계하중에 미치는 영향을 고찰하였다.

ABSTRACT : This paper investigates critical loads of tapered cantilever columns with a tip mass, subjected to a follower force. The linearly tapered solid rectangular cross-sections are adopted as the column taper. The differential equation governing free vibrations of such columns, also called Beck's columns, is derived using the Bernoulli-Euler beam theory. Both divergence and flutter critical loads are calculated from the load-frequency curves that are obtained by solving the differential equation. The critical loads are presented as functions of various non-dimensional system parameters, namely, the taper type, the subtangential parameter, and the mass ratio.

핵 심 용 어 : Beck 기둥, 발산임계하중, 동요임계하중, 경사종동력, 접선종동력
KEYWORDS : Beck's column, divergence critical load, flutter critical load, subtangential follower force, tangential follower force

1. 서 론

기둥은 보, 평판 등과 함께 구조물을 형성하는 가장 기본적인 구조요소이므로 다양한 조건을 갖는 기둥요소의 자유진동 및 안정성 문제에 관한 많은 연구가 활발하게 이루어져 왔다. 이 연구들에서는 기둥을 연속계 또는 이산계로 모형화하여, 기둥에 작용하는 축하중으로는 그림 1(a)와 같은 보존력 또는 그림 1(b), (c)와 같은 비보존력을 고려하였다(Bokaian 1988; 류 등 1999).

최근에 제어 기술의 발전으로 구조계에 작용하는 하중의 방향을 제어할 수 있게 되었다. 이와 같이 자동제어가 이루어지는 대부분의 구조계는 비보존력계를 형성하고 있어 Beck 기둥과 같이 비보존력이 작용하는 구조물의 안정 문제가 현대공학에서 매우 중요하게 다루어지게 되었다(Bolotin 1964; Leipholz 1987).

Beck(1952)이 그림 1(c)에 보인 것과 같은 접선종동력(tangential follower force)을 받는 캔틸레버 기둥의 임계하중을 처음으로 구한 이후에 비보존력인 종동력(follower force)을 받는 기둥의 진동 및 안정 특성에 관한 많은 연구가 이루어졌다. Sankaran과 Rao(1976)는 유한요소법을 이용하여 접선종동력을 받는 변단면 캔텔레버 기둥의 동요임계하중(flutter critical load)을 산출하였고 Pedersen (1977)은 Newton-Raphson법을 이용하여 그림 1(b)와 같은 경사종동력(subtangential follower force)이 작용하고 자유단이 스프링으로 지지되어 있는 집중질량을 갖는 등단면 캔틸레버 기둥의 안정성에 관한 연구를 수행하였다. Rosa와 Franciosi (1990)는 종동력이 작용하는 중간 지지 점을 갖는 캔틸레버 보의 안정성에 대하여 연구하였다.

Chen과 Ku(1992)는 자유단 집중질량을 갖는 Beck 기둥의 고유진동수 및 임계하중을 산출하기 위한 유한요소 모델을 제시하였다. Lee와 Yang(1993)은 변환행렬법을 이용하여 비보존력이 작용하는 탄성지반으로 지지된 Timoshenko 보의

1) 원광대학교 토목환경공학과 교수
(Tel: 063-850-6719, Fax: 063-857-7204, E-mail: jsjeong@wonkwang.ac.kr)
2) 정회원, 원광대학교 토목환경공학과 교수(bkleest@wonkwang.ac.kr)
3) 원광대학교 대학원

본 논문에 대한 토의를 2006년 6월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

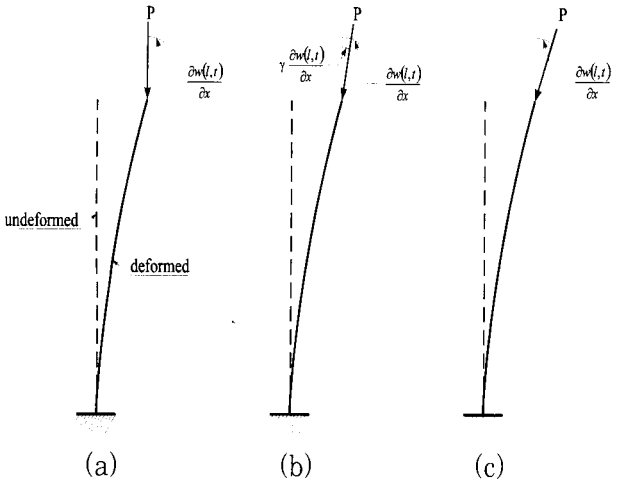

그림 1. (a) 보존력과 (b), (c) 비보존력이 작용하는 Beck 기둥

고유진동수 및 임계하중을 산출하였다. Lee(1996)는 접선종동력이 작용하는 탄성지반 위에 놓인 캔틸레버 보의 동적 안정성에 관한 연구에서 보의 내적 감쇠와 지반의 점성감쇠가 동적 안정영역에 미치는 영향을 고찰하였다. Sato(1996) 는 회전관성과 전단변형을 고려한 Timoshenko 보 이론을 적용하여 Pedersen(1977)에 의하여 연구된 경사종동력이 작용하는 캔틸레버 기둥의 안정성 문제를 해석하였다. Langthjem과 Sugiyama(1999)는 종동력이 작용하는 캔틸레버 기둥의 동적 안정에 대한 최적 형상을 산출하였다.

보존력이 작용하는 구조물은 반드시 발산임계하중(divergence critical load)을 갖으나 비보존력이 작용하는 구조물은 경계조건, 기하적 형상 및 비보존력의 특성에 따라 발산임계하중 또는 동요임계하중을 갖는다. 이와 같은 비보존력을 받는 구조물의 안정성 해석은 정적 해석으로는 불가능하고, 관성효과가 고려된 동적 개념에 의한 해석이 수행되어야 한다.

이 논문은 자유단에 집중질량과 비보존력인 경사종동력이 작용하는 변단면 캔틸레버 기둥인 소위 Beck 기둥의 고유진동수와 임계하중에 관한 연구이다. 이러한 Beck 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 이 연구에서 얻어진 하중-고유진동수 관계를 이용하여 발산임계하중과 동요임계하중을 산출하고, Beck 기둥의 제변수 변화에 따른 임계하중의 영향을 고찰하고 이를 그림에 나타내었다.

2. 수학적 모형

2.1 기둥의 변단면

변단면 형태는 구조물의 특성에 따라 여러 가지의 형태를 가질 수 있다. 이 연구에서는 기둥의 변단면으로 직사각형 단면을 갖는 선형 변단면으로 채택하였다. 선형 변단면의 형태는 구조물의 정 · 동적 및 안정 해석에서 자주 이용되고 있으며 그림 2와 같이 폭 변단면, 깊이 변단면 및 정방형 변단면의 3 가지 형태가 있다.

이 그림에서 l은 기둥 길이이고, x 축은 기둥의 종방향 좌표이며 이와 수직한 d축은 변단면의 변화제원을 나타낸다. 따라서 그림 2(a)의 폭 변단면은 d축과 휨 축인 z축이 일치하고 변위 w축은 d, z축에 수직한다. 그림 2(b), (c)에 높이 및 정방형 변단면이 기술되어 있다. 기둥하단 ($x=0$)에서 $d=d_a$ 이고 기둥상단 ($x=l$)에서 $d=d_b$이다. 변화제원 d는 직선적으로 변화하는 선형이므로 기둥축의 임의점 x에서 d는 다음과 같이 표시된다.

$$d=d_a(\beta-1)x/l+d_a \tag{1}$$

여기서 β 는 단면비이며 다음 식과 같이 정의되는 무차원 양이다.

$$\beta=d_b/d_a \tag{2}$$

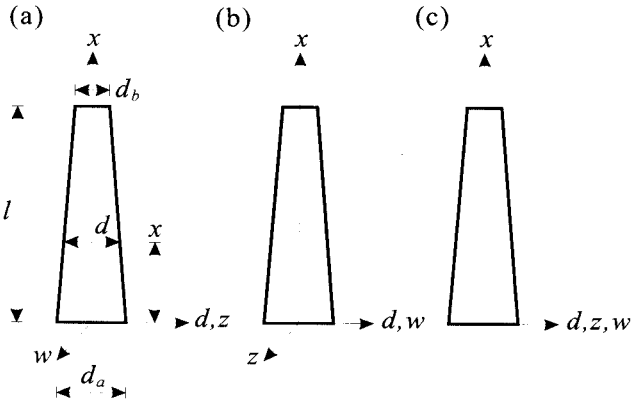

그림 2 선형 변단면: (a) 폭 변단면 (b) 깊이 변단면 및 (c) 정방형 변단면

식 (1)과 같은 변화제원을 갖는 변단면의 단면적 A 및 단면2차모멘트 I는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다(Kupta 1985).

$$A=A_a[1+(\beta-1)x/l]^m \tag{3}$$

$$I=I_a[1+(\beta-1)x/l]^n \tag{4}$$

위에서 A_a, I_a는 고정지점 ($x=0$)에서 기둥의 단면적과 단면2차모멘트를 나타내고, (m, n)은 변단면의 기하적

특성을 나타내는 단면형상계수이며 이 값은 변단면 형상별로 다음과 같다(Kupta 1985).

폭 변단면: $m=1,\ n=1$ (5a)

깊이 변단면: $m=1,\ n=3$ (5b)

정방형 변단면: $m=2,\ n=4$ (5c)

2.2 지배 미분방정식

그림 3에서 점선은 길이가 l 이며 자유단 집중질량을 갖고 있는 변단면 캔틸레버 기둥을 나타내며, 실선은 자유단에 경사종동력 P가 작용하고 있는 소위 Beck 기둥의 진동형의 예를 나타낸다.

이 그림에서 A와 I는 2.1절에서 정의한 바와 같이 기둥축 x에서 단면적과 단면2차모멘트를 나타내며, A_a와 I_a는 기둥하단($x=0$)에서 단면적과 단면2차모멘트를 나타낸다. M은 질량관성모멘트가 J인 집중질량의 크기이다. α는 자유단의 단면회전각이며 기둥의 해석결과로부터 얻어지는 값이며 입력변수는 아니다. γ는 하중 P의 경사 정도를 나타내는 경사변수(subtangential parameter)이다. 또한 $w(x,t)$는 횡방향 진동변위이고 t는 시간이다.

Bernoulli-Euler 보 이론에 의한 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식 (6)과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]+P\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{6}$$

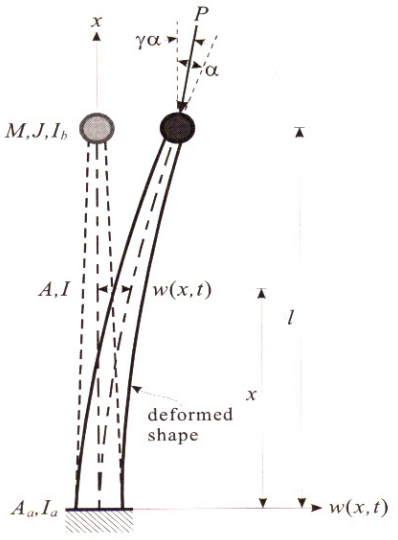

그림 3. Beck 기둥 진동형의 예 및 제 변수

여기서 E와 ρ는 기둥 재료의 탄성계수 및 밀도이다.

기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면, 횡방향의 동적 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x,t)=w_x\sin(\omega_i t) \tag{7}$$

여기서 w_x는 조화진동의 진폭으로 x만의 함수이며, ω_i는 고유각진동수(r/s), i는 모드 번호이다.

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi=x/l \tag{8}$$

$$\eta=w_x/l \tag{9}$$

$$p=Pl^2/(EI_a) \tag{10}$$

$$C_i=\omega_i l^2\sqrt{\rho A_a/(EI_a)} \tag{11}$$

여기서 식 (8), (9)의 (ξ, η)는 직교좌표계 (x, w_x)를 기둥 길이 l로 정규화한 무차원 직교좌표계이며, p는 무차원 하중, C_i는 무차원 고유진동수이다.

식 (6)에 식 (3), (4), (7)을 대입하고, 식 (8) ~ (11)의 무차원 변수를 이용하여 정리하면 식 (12)와 같이 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4}=-\frac{2n(\beta-1)}{[1+(\beta-1)\xi]}\frac{d^3\eta}{d\xi^3}-\left\{\frac{n(n-1)(\beta-1)^2}{[1+(\beta-1)\xi]^2}+\frac{p}{[1+(\beta-1)\xi]^n}\right\}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+C_i^2[1+(\beta-1)\xi]^{m-n}\eta \tag{12}$$

2.3 경계조건

Beck 기둥의 하단($x=0$)은 고정지점이므로 자유진동의 진폭 $w_x=0$ 및 단면회전각 $dw_x/dx=0$이 되고, 식 (8), (9)의 무차원 변수식을 적용하면 다음의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$\eta=0,\ \xi=0$ 에서 (13)

$\frac{d\eta}{d\xi}=0,\ \xi=0$ 에서 (14)

Beck 기둥의 자유단($x=l$)에는 질량관성모멘트가 J인 집중질량 M과 경사종동력 P가 작용하고 있으므로 휨 모멘트는 $EI_b d^2w_x/dx^2 = \omega_i^2 J dw_x/dx$ 로 나타낼 수 있고, 전단력은 $EI_b d^3w_x/dx^3 = -P(1-\gamma)dw_x/dx - \omega_i^2 M w_x$ 로 쓸 수 있다. 여기서 I_b는 자유단의 단면2차모멘트이다. 이 식들에 무차원 변수인 식 (8) ~ (11)을 적용하면 무차원 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{j\theta C_i^2}{\beta^n}\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \xi = 1 \text{ 에서} \tag{15}$$

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \frac{p(1-\gamma)}{\beta^n}\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\mu\theta C_i^2}{\beta^n}\eta = 0, \quad \xi = 1 \text{에서} \tag{16}$$

위에서 μ는 식 (17)로 나타내지는 기둥상단의 집중질량 M과 기둥 재료의 질량비이며, j는 식 (18)로 표시되는 무차원 질량관성모멘트이다. 식 (16)에서 θ는 등단면($\beta=1$) 기둥의 단면적 A_m과 기둥하단에서 단면적 A_a의 비 (A_a/A_m)로 표현되는 변단면의 기하적 특성을 나타내는 무차원계수이다. 따라서 θ 값은 단면비 β항으로 표시될 수 있으며, 폭 및 깊이 변단면은 식 (19a)로, 정방형 변단면은 식 (19b)로 표현된다.

$$\mu = M/(\rho A_m l) \tag{17}$$

$$j = J/(\rho A_m l^3) \tag{18}$$

$$\theta = (\beta+1)/2 \tag{19a}$$

$$\theta = (\beta^2+\beta+1)/3 \tag{19b}$$

2.4 수치해석 방법

유도된 상미분방정식을 식 (13) ~ (16)의 경계조건을 이용하여 수치해석하면 무차원 고유진동수 C_i 및 진동형 $\eta(\xi)$을 구할 수 있다.

진동형 $\eta(\xi)$를 산출하기 위해서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하고 미분방정식의 고유치인 C_i를 산출하기 위해서는 Regula-Falsi법과 결합한 시행착오적 행렬값 탐사법을 이용하였다(Lee and Oh 2000; 이 등 2001).

본 연구에서는 $i=1$, 2의 2개의 최저차 C_i를 산출하였다. 이렇게 산출된 하중 단계별 고유진동수를 이용하여 전형적인 하중-고유진동수 관계를 예로 들면 다음 그림 4와 같다.

이 그림에서 종동력 p가 증가함에 따라 C_i는 감소하고 $C_1=0$이 되는 □로 표시된 좌표의 p값이 발산임계하중 p_d이다. 발산임계하중에서 기둥은 정적으로 좌굴한다. 그림 1(a)에서 $\gamma=0$인 기둥 즉 Euler기둥은 반드시 발산임계하중을 갖는다.

이 그림의 또 다른 곡선에서 $C_1=C_2$가 되는 ■로 표시된 좌표의 p 값이 동요임계하중 p_f이고, 이 C_i 값이 동요고유진동수(flutter frequency) C_f 이다. 동요임계하중에서는 $i=1$, 2의 진동형이 같기 때문에 기둥이 자유진동하게 되면 기둥은 동요하여 동적 불안정 상태에 빠진다. 그림 1(c)에 보인 $\gamma=1$인 접선종동력이 작용하는 경우에는 반드시 동요임계하중을 갖는다.

한편, 그림 1(b)에 보인 $0<\gamma<1$인 경사종동력이 작용하는 기둥에서는 γ값의 크기에 따라서 임계하중의 형태가 발산임계하중 또는 동요임계하중으로 달라질 수 있다.

본 연구에서는 전술한 수치해석 방법을 이용하여 하중단계별 고유진동수를 얻고 이로부터 $C_1=0$가 되는 최저 발산임계하중 p_d와 $C_1=C_2$가 되는 최저 동요임계하중 p_f를 산출하였다. 수치해석 과정에서 엄밀하게 정확한 임계하중을 산출할 수 없기 때문에 $C_1 \leq 1\times10^{-3}$ 및 $C_2-C_1 \leq 1\times10^{-3}$의 오차한계를 고려하여 p_d 및 p_f를 각각 산출하였으며, $C_f=(C_1+C_2)/2$ 를 동요고유진동수로 결정하였다.

단면형상계수 (m,n), 단면비 β, 질량비 μ, 무차원 질량관성모멘트 j 및 경사변수 γ 값이 입력되면 $i=1$, 2 의 2개의 무차원 고유진동수 C_i와 최저 임계하중(p_d 또는 p_f)이 계산되도록 2개의 컴퓨터 프로그램을 FORTRAN어로 작성하였다.

이상에서 작성한 프로그램으로 수렴해석을 실시하였다. 기둥의 지간길이를 20등분하여 미분방정식을 수치적분하면 유효숫자 3자리 정도의 수치해를 얻을 수 있음을 알았다.

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구결과를 검증하기 위하여 본 연구와 문헌(Sato 1996; Sankaran and Rao 1976)의 동요임계하중을 표 1에서 비교하였다. 본 연구결과는 문헌 값과 매우 우수하게 근접하여 이 연구에서 개발한 이론적 방법 및 수치해석 방법이 모두 타당함을 알 수 있다. 이 표에서 보이지 않은 발산임계하중의 경우에도 많은 문헌 값과 우수하게 접근하는 것을 확인할 수 있었다.

그림 5는 깊이 변단면, $\beta=0.7$, $u=0.5$, $j=0.1$, $\gamma=0.3/0.43/0.44/0.7$에 대하여 하중-고유진동수 곡선을 나타낸 그림이다. 이 그림에서와 같이 $\gamma=0.3$, 0.43에 대해서는 p가 증가함에 따라 C_i는 계속 감소하며 □로 표시된 $C_1=0$가 되는 발산임계하중 $p_d=3.09$, 5.34를 갖는다. 이 기둥에 발산임계하중이 작용하면 정적으로 좌굴한다. 이 그림

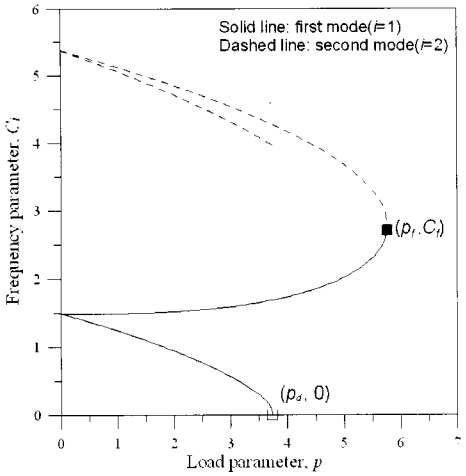

그림 4. 하중-고유진동수 곡선의 예

의 $\gamma=0.44$, 0.7에 대해서는 ■로 표시된 $C_1=C_2$ 가 되는 동요고유진동수 $C_f=1.80$, 2.77 를 갖고 이에 대응하는 동요임계하중은 $p_f=8.26$, 5.78 이다. 동요임계하중이 작용하는 기둥이 외부 충격을 받아 자유진동하게 되면 동요하여 동적으로 안정성을 잃게 된다. 이 그림에서 γ 값의 범위 $0.43<\gamma<0.44$에서 임계하중이 발산임계하중에서 동요임계하중으로 변환된다.

그림 6은 그림 5에서 보여준 하중-고유진동수 곡선에서 $(\gamma=0.3,\ p=2)$ 와 $(\gamma=0.7,\ p=4)$ 의 진동형의 예를 나타낸 그림이다. 전자의 경우는 발산임계하중을 갖는 γ 값의 범위이며, 후자의 경우는 γ 값의 범위가 동요임계하중을 갖는 범위이다. 제1모드 및 제2모드가 모두 무변위 절점(nodal point)을 갖지 않는다. 일반적인 경우에 제2모드는 무변위 절점을 갖는다.

그림 7은 $\beta=0.7$, $u=0.5$, $j=0.1$ 에 대하여 폭/깊이/정방형 변단면 기둥의 γ 값 변화에 따른 임계하중의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 ●로 표시된 γ 값에서 임계하중은 발산임계하중에서 동요임계하중으로 변환되며, ●로 표시된 γ 값 이하에서는 발산임계하중을 그 이상에서는 동요임계하중을 갖는다. γ 값이 증가하면 발산임계하중은 증가하고 동요임계하중은 감소한다. 발산임계하중 및 동요임계하중 모두 폭 변단면>깊이 변단면>정방형 변단면의 순서로 크다.

그림 8은 $\beta=0.7$, $j=0.1$, $\gamma=0.5$ 에 대하여 깊이/폭/정방형 변단면 기둥의 질량비 u 값의 변화에 따른 동요임계하중 p_f 의 변화를 나타낸 그림이다. u가 증가하면 p_f 도 증가한다.

그림 9는 그림 8에서 산출된 동요임계하중 p_f 에 대응하는 동요고유진동수 C_f 와의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 (p_f, C_f) 는 특정 u 값에서 산출된 값이 아니고 그림 8에

표 1. 본 연구와 문헌의 결과 비교

기하적 형상	동요임계하중, p_f	
	본 연구	문 헌
등단면 $\beta=1.0$, $\gamma=0.5$ $\mu=1.0$, $j=0.1$	14.19	14.20[a]
깊이 변단면 $\beta=0.9$, $\gamma=1.0$ $\mu=0.0$, $j=0.0$	17.36	17.36[b]
폭 변단면 $\beta=0.4$, $\gamma=1.0$ $\mu=0.0$, $j=0.0$	14.81	14.81[b]
정방형 변단면 $\beta=0.6$, $\gamma=1.0$ $\mu=0.0$, $j=0.0$	8.422	8.422[b]

[a] Sato 1996; [b] Sankaran and Rao 1976

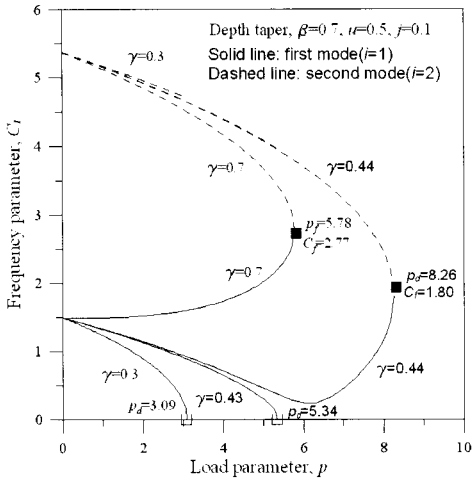

그림 5. 하중-고유진동수 곡선

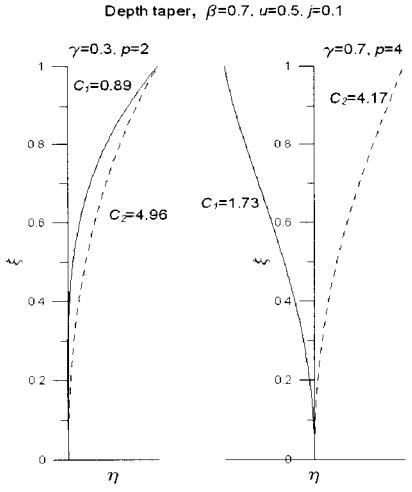

그림 6. 진동형의 예

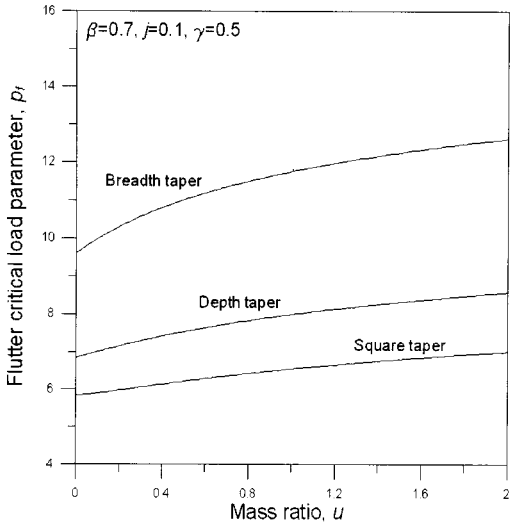

그림 7. 질량비-동요임계하중 곡선

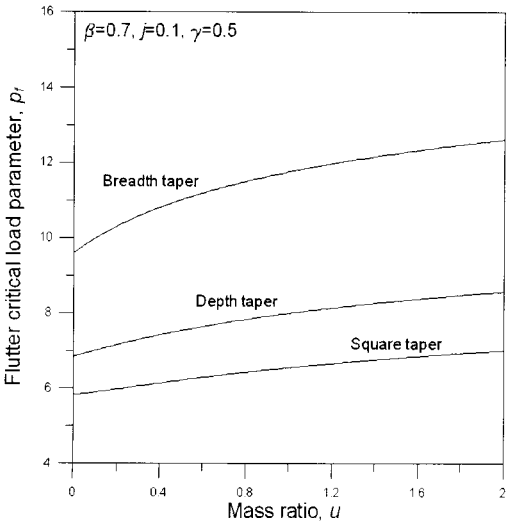

그림 8. 질량비-동요임계하중 곡선

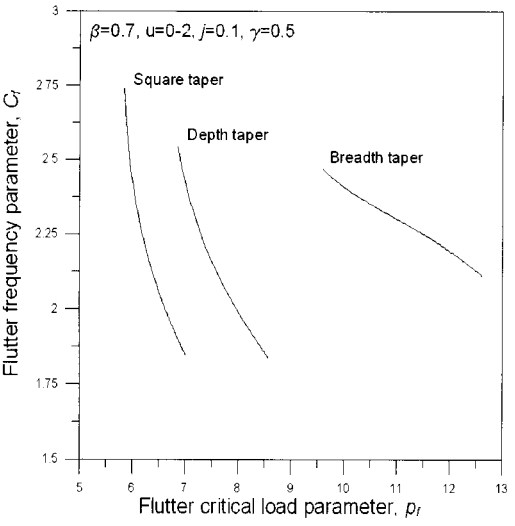

그림 9. 동요임계하중-동요고유진동수 곡선

서 보인 $0 \leq u \leq 2$ 의 범위에서 산출된 값들이다. p_f 가 증가하면 C_f는 감소한다. C_f의 감소율은 정방형 변단면〉깊이 변단면〉폭 변단면의 순서로 크며 특히, 정방형 및 깊이 변단면은 폭 변단면에 비하여 C_f에 대한 p_f의 영향력이 더 크다.

4. 결 론

이 논문은 자유단 집중질량을 갖고 경사종동력이 작용하는 캔틸레버형 변단면 기둥의 안정성에 관한 연구이다. 이러한 Beck 기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식과 경계조건을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 수치적 기법을 개발하였다. 이 연구에서 얻어진 하중-고유진동수 곡선으로부터 발산임계하중 및 동요임계하중을 산출하였다. 본 연구와 타문헌의 결과를 비교하여 본 연구 결과의 타당성을 검증하였다. 수치해석의 결과를 분석하여 경사변수와 질량비가 고유진동수, 진동형 및 임계하중에 미치는 영향을 고찰하였다. 이 연구의 결과는 변단면 Beck 기둥의 정·동적 안정해석에 유용한 자료를 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

감사의 글

이 연구는 2004년도 원광대학교 교내 연구비의 지원을 받았으며 대학 당국에 감사드립니다.

참 고 문 헌

류봉조, 임경빈, 이종원, 한재섭 (1999) 2층 탄성기초 위에 놓인 불균일 테이퍼진 보의 진동과 안정성, **한국소음진동공학회 논문집**, 한국소음진동공학회, 제9권, pp. 828-834.

이병구, 이태은, 안대순, 김무영 (2001) 두 변수 탄성지반으로 지지된 불연속 변단면 수평 곡선부재의 자유진동, **한국강구조학회 논문집**, 한국강구조학회, 제 13권, 제 6호, pp. 651-659.

Beck., M (1952) Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 3, pp. 225-228.

Bokaian, A. (1988) Natural frequencies of beams under compressive axial loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp. 49-65.

Bolotin, V.V. (1964) The dynamic stability of elastic system, Hoden-Day, Inc.

Chen, L.W. and Ku, D.M. (1992) Eigenvalue

sensitivity in the stability analysis of Beck's column with a concentrated mass at the free end, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, pp. 403-411.

De Rosa, M.A. and Franciosi, C. (1990) The influence of an intermediate support on the stability behaviour of cantilever beams subjected to follower forces, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, pp. 107-115.

Kupta, A.K. (1985) Vibrations of tapered beams, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113, pp. 1244-1247.

Langthjem, A. and Sugiyama, Y. (1999) Optimum shape design against flutter of a cantilevered column with an end-mass of finite size subjected to a non-conservative load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, pp. 1-23.

Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 2507-2518.

Lee, H.P. (1996) Dynamic stability of a tapered cantilever beam on an elastic foundation subjected to a follower force, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 1409-1424.

Lee, S.Y. and Yang, C.C. (1993) Non-conservative instability of a Timoshenko beam resting on Winkler elastic founda- tion, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, pp. 177-184.

Leipholz, H. (1987) Stability theory, 2nd Edition, John Wiley and Sons.

Pedersen, P. (1977) Influence of boundary conditions on the stability of a column under non-conservative load, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, pp. 445-455.

Sankaran, G.Y. and Rao, G.V. (1976) Stability of tapered cantilever columns subjected to follower forces, *Computers and Structures*, Vol. 6, pp. 217-220.

Sato, K. (1996) Instability of a clamped-elastically restrained Timoshenko column carrying a tip load, subjected to a follower force, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, pp. 623-630.

(접수일자: 2005. 8. 2/심사일: 2005. 9. 2/
심사완료일: 2005. 10. 26)