

# 국부좌굴된 강구조부재의 비탄성 반복 거동

## Inelastic Cyclic Behavior of Locally Buckled Steel Members

이 은 택<sup>1)</sup> . 송 금 정<sup>2)</sup>

Lee, Eun Taik Song, Keum Jung

요 약 : 소성설계에 있어서 국부좌굴 후의 거동은 매우 중요한 고려사항이며, 최종 붕괴상태에 이르는 거동을 설명한다. 지진과 같은 복잡한 하중에 대하여 구조물의 실질적인 신뢰성을 얻기 위해, 국부좌굴 이후의 구조물의 점진적인 소재의 약화와 강성과 강도의 감소, 에너지 소실능력을 평가하여야 한다. 본 연구에서는, two-surface 모델에 근거하여 반복 불비례 하중에서의 국부좌굴 후 거동을 예측하기 위하여 제시된 stress resultant model을 이용하여, 단순화된 국부좌굴해석모델을 제안하였다. 이 모델을 사용한 해석적 모멘트-곡률관계는 일정한 반복 사이클 내에서 실험결과와 적절히 부합하며, 내진설계에 있어 중요한 선형 분포된 에너지 감소를 제안 모델로부터 예측할 수 있다.

ABSTRACT : Post-local buckling behavior is a very important consideration in plastic and seismic design of steel structures. It describes the structural behavior up to the final collapse state. In order to assess the actual reliability of structures under severe repeated loading, such as strong earthquakes, it is necessary to evaluate the progressive cyclic deterioration of stiffness as well as the strength and energy dissipation capacity of the structures after local buckling happens. In this study, a simple analytical model developed for predicting post-local buckling behavior for cyclic and non-proportional loading histories, has been proposed. This analytical model uses the stress resultant model based on the two surface model. Analytical moment-curvature relationship using this model compare well with the experimental results in constant amplitude cycling, and linearized energy deterioration which is very important in seismic design can be predicted from the proposed model.

핵심용어 : 불안정성, 국부좌굴, 반복거동, 소성힌지, two-surface 모델

KEYWORDS : instability, local buckling, cyclic behavior, plastic hinge, two-surface model

### 1. 서론

지진하중이 일어나는 동안 구조물은 반복적이고 역전하는(reversed) 횡하중을 받는다. 강한 지진운동이 발생할 경우, 박판 강구조부재의 일부에서는 국부적인 불안정성이 소성역에서 발생할 수 있다.

최근 몇 년간, 강한 지진이 발생할 때의 구조물의 거동에 대한 집중적인 연구가 수행되어왔으나, 대부분의 연구에서 재료가 균질(homogeneous)하다고 가정된 전체적인 구조물을 고려함으로써 적당한 설계 강도 기준을 정하는 것에 초점을 맞추어 왔으며, 다양한 하중상태에서의 구조물의 소재 약화에 의한 효과와 국부적 기하학적 파괴에 대한 이해는 상대적으로 부족하다. 지진과 같이 난해한 하중상태에서의 구조물의 실질

적인 거동에 접근하기 위하여, 국부좌굴 발생이후의 강성과 강도의 점진적, 주기적인 감소와 에너지 소실능력을 평가할 필요가 있다.

지진발생시 붕괴를 막기 위하여, 구조물은 어떤 요소에서의 비탄성 변형에 의해 여분의 에너지를 발산할 수 있어야 하며, 강도저하를 일으키지 않고 기구(mechanism)를 형성할 수 있어야 한다. 즉, 국부좌굴에 의해 하중전달능력이 조기에 저하되는 것을 방지해야 한다. 반복하중은 안정성 문제(stability problem)에 있어 단조하중보다 심각하며, 박판부재와 보에 있어서의 비탄성 문제, 특히 반복 하중상태에서의 안정성에 대한 더 많은 연구가 필요하다.

판요소의 소성좌굴에 대한 통합된 이론은 기둥 뿐 아니라 판 부재에 있어서도 좌굴의 초기단계에서 하중의 감소가 일어

1) 정회원, 중앙대학교 건축학부 부교수, 공학박사  
(Tel:02-820-5340, Fax:02-812-4150, E-mail:etlee@cau.ac.kr)  
2) 정회원, (주)CS구조엔지니어링, 공학석사(keumjung@cs.co.kr)

본 논문에 대한 토의를 2005년 10월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

나지 않는다고 가정을 했던 Stowell(1958)에 의해서 수립되었다. 그는 탄성국부좌굴응력에 의해서 증가되었을 때, 다른 경계조건을 가진 부재들의 비탄성 좌굴 응력에 대하여 항복하는 소성 index에 관한 표현을 유도했다. Timoshenko & Gere(1961)는 박판부재의 안정성에 대한 1차이론(first-order theory)을 제안하였다. Bulson(1969)은 여러 가지 판, 하중, 구조 단면에서의 판 부재(plate element)를 포함하는 변수(property)에 대한 많은 종류의 해법을 발표하였고, Bijlaard & Fisher(1952, 1953)는 국부좌굴과 전체좌굴의 상호작용에 관한 초기 연구결과를 발표하였다. Graves-Smith(1969)는 큰 처짐에 대한 판 이론(large deflection plate theory)의 측면에서 국부좌굴후의 거동에 대하여 연구하였고, 국부좌굴과 전체좌굴에 있어서의 비탄성 효과를 나타내었으며, 판의 해석에 소성이론을 엄격하게 적용하였다. 전체 좌굴하중은 국부적으로 좌굴된 판요소의 강성에 근거한 접선계수(tangent modulus) 접근법을 이용하여 계산된다. Hancock(1981)은 국부좌굴 영역에서의 거동이 기둥의 기하학적 불완전성의 유형과 크기 뿐 아니라, Euler 좌굴하중과 국부좌굴하중의 비에 따른다는 것을 연구하였으며, 여러 가지 설계방법을 소개하였다. Sharp(1970)는 알루미늄 기둥과 보에 있어서, 조합된 국부좌굴과 전체 국부좌굴에 대한 실험식을 제시하였다. 이러한 유형의 파괴에 있어, 국부좌굴이 없을 때에 부재가 감당할 수 있는 하중보다 국부좌굴이 발생할 때에 더 낮은 하중에서 전체 좌굴이 일어난다는 결과에 따라, 단면이 얇은 부재의 국부좌굴은 부재의 강성을 저하시킨다는 것을 알 수 있다.

본 연구의 주요 목적은 다음과 같다.

- 1) 다양한 재하상태에서 강재의 반복적인 좌굴 후 거동과 점진적인 강성, 강도의 손실을 예측하기 위하여, 실험 데이터를 현재의 two-surface 소성모델(Tseng-Lee 모델(1983)에 근거한 stress resultant 모델(Yang 등, 1995)까지 확장하여 사용한다.
- 2) 국부좌굴 전, 후의 거동에 관한 실험결과를 현재의 two-surface 모델과 반복 국부좌굴이후의 거동에 대하여 제안된 식과 비교하고 현존하는 소성이론에 기초한 구조재의 국부좌굴 후 거동을 예측한다.

## 2. two-surface plasticity model

Phillips & Sierakowski(1965)는 항복면(yield surface)과 하중면(load surface)이 동시에 일어나지 않는 모델에 대한 실험을 수행하였다. Krieg(1975)는 이동,

등방성 경화와 흐름 규칙에 관련하여, 현상적 소성이론 two surface model을 발표하였다. 내부면(inner surface)은 응력의 상태가 소성의 진행 중에 이 면과 접해 있기 때문에 하중면이라 불리며, 외부면은 탄성, 선형 경화와 등방성-동적 소성 조합이론과 같은 경화규칙을 갖고 있는 제한면(limit surface)으로 불린다.

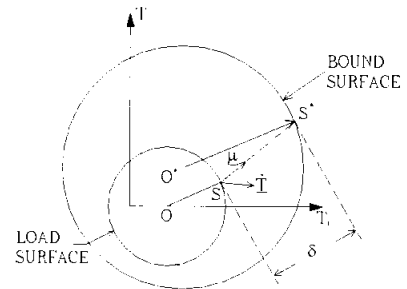


그림 1. Dafalias & Popov Model

또한, Dafalias & Popov(1975, 1976)는 항상 하중면을 둘러싸고 있는 응력장(stress space)에서 경계면의 개념을 도입한 two surface 모델을 제안하였다. 그림1에서의 두 면(two surface)은 재료의 거동을 세 개의 뚜렷한 영역, 즉 소성계수  $E'' = \infty$ 를 갖는 내부면인 탄성역(elastic zone),  $E'' = E''_0$ 인 경계면의 경계 근처 점근 소성역(asymptotic plastic zone), 완만하게 증가하는  $E''$ 를 가진, 앞의 두 가지 면의 중간에 있는 전이영역(transition zone)으로 구분한다. 소성변형의 진행과정은 응력의 차원을 갖고 있으며 현재의 하중점과 경계면의 반응점 사이의 상대거리  $\delta$ 에 의하여 결정된다. 초기 소성 재하 혹은 제하(unloading)-재가력(reloading)의 과정에서의 소성변형이 발생하는  $\delta$ 의 초기값은  $\delta_{mi}$ 로 나타낸다. 두 면 사이의 초기와 현재의 거리차이는 소성계수를 결정하는 소성 내부변수의 역할을 한다. 소성계수  $E''$ 는 다음과 같다.

$$E'' = E''_0 \left( 1 + \mu \frac{\delta}{\delta_{mi} - \delta} \right) \quad (1)$$

여기서,  $E''_0$ 와  $\mu$ 는 실험결과에 의하여 결정되는 재료상수이다. 이 모델에서 항복면과 제한면의 크기는 일정하다고 간주된다.

Tseng & Lee(1983)그리고 Chang & Lee(1986)는 반복 불비례 하중상태에 대한 또 다른 two-surface 모델을 사용하였다.

### 3. 국부좌굴에 대한 해석모델

#### 3.1 Tseng-Lee 모델에 기초한 stress resultant 소성 모델

1995년, Yang 등은 stress resultant space에서의 소성 모델을 제안하였다. 그것은 Tseng-Lee 모델(1983)에 기초한 것으로, 응력-변위 관계 대신 stress resultant와 변형률의 관계로 나타내었다. Two-surface 소성 응력 모델의 특징은 다음과 같다.

- i) 항복조건: von Mises
- ii) 이동규칙: 항복면-이동경화(kinematic hardening)  
경계면-등방경화(isotropic hardening)

iii) 경화 규칙:  $H = \left(1 + h \frac{\delta}{\delta_{mi} - \delta}\right) \hat{H}$

- $H$ : 일반화된 소성계수
- $\hat{H}$ : 경계면과 관련된 소성계수
- $\delta$ : 현재의 하중점과 경계면에서 반응점사이의 거리.
- $\delta_{mi}$ : 초기 소성재하 시의  $\delta$ .
- $h$ : 형태변수.(실험 데이터에 의하여 정의되는 값.)

iv) 항복면의 이동:

항복면 이동의 방향은 현재 응력상태에서의 항복면에 수직인 하중  $n$ 이 작을 때 응력 증가분의 방향에 의하여 결정된다. 만약 각도가 크면, 항복면의 이동은 일반적으로 응력 증가분과 수직하중  $n$ 의 사이이며, 응력증가분이 이동을 지배한다(김덕재 이은택 2000).

#### 3.1.1 I-형 단면의 구성 관계(constitutive relations)

그림 2에서 stress resultant  $F$ 의 함수인 단일 항복면을 고려해보면, stress resultant는 세 가지 외력  $M_x, P, V_y$ 으로 구성되어 있다.  $M_x$ 는 주축에 대한 모멘트,  $P$ 는 축력, 그리고  $V_y$ 는 약축 방향에서의 전단력이다. 그러나 다음의 식의 유도과정에서  $M_x, P, V_y$  대신  $M, P, V$ 가 사용된다. 일반화된 stress resultant  $F$ 는 다음과 같이 정의된다.

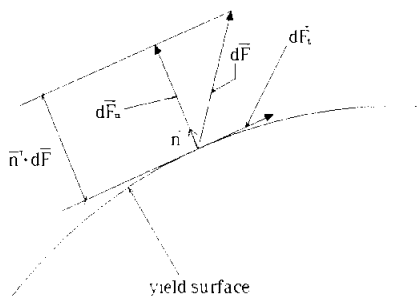


그림 2. stress resultant increment and unit outward normal

$$F^T = [P, V, M] \tag{2}$$

항복면 바깥쪽의 수직방향(normal) 벡터는 항복함수  $\phi$ 의 기울기이다.

$$\vec{n} = \frac{\phi_{,F}}{[\phi^T_{,F} \cdot \phi_{,F}]^{1/2}} \tag{3}$$

여기서,  $\phi^T_{,F} = [\partial\phi/\partial P, \partial\phi/\partial V, \partial\phi/\partial M]$ 이다. 처짐의 증가분  $du_p$ 는 다음의 normality rule에 의하여 정의된다.

$$d\vec{u}_p = \vec{n} \cdot du_p \tag{4}$$

여기서  $du_p$ 는 소성 변형의 크기이고,  $d\vec{F}_n$ 는  $\vec{n}$ 방향으로의 힘의 증가분이므로,

$$d\vec{F}_n = K_p d\vec{u}_p \tag{5}$$

$K_p$ 는 다음 식에 의해 정의되는 각각의 힘-변형 관계로부터의 소성강성 매트릭스이다.

$$K_p = \begin{pmatrix} (EA)_p & 0 & 0 \\ 0 & (GA/\alpha)_p & 0 \\ 0 & 0 & (EI)_p \end{pmatrix} \tag{6}$$

그럼 2로부터,

$$\vec{n}^T \cdot d\vec{F} = \vec{n}^T \cdot d\vec{F}_n = \vec{n}^T \cdot K_p d\vec{u}_p = \vec{n}^T \cdot K_p (\vec{n} \cdot du_p) \tag{7}$$

$du_p$ 에 대하여 풀면,

$$du_p = \frac{\vec{n}^T \cdot d\vec{F}}{\vec{n}^T K_p \vec{n}} \tag{8}$$

(8)식을 (4)식에 대입하면,

$$d\vec{u}_p = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}^T}{\vec{n}^T K_p \vec{n}} d\vec{F} \tag{9}$$

소성 증가 이론에서, 처짐의 증분  $d\vec{u}$ 는 탄성 변형 증가분  $d\vec{u}_e$ 와 소성 변형 증가분  $d\vec{u}_p$ 로 구성된다.

$$d\vec{u} = d\vec{u}_c + d\vec{u}_p \tag{10}$$

따라서,

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= d\vec{u}_c + d\vec{u}_p \\ &= K_c^{-1} d\vec{F} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}^T}{\vec{n}^T K_p \vec{n}} d\vec{F} \\ &= K_c^{-1} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}^T}{\vec{n}^T K_p \vec{n}} d\vec{F} \end{aligned} \tag{11}$$

여기서,  $K_c$ 는 탄성 강성 매트릭스이다.

$$K_c = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \tag{12}$$

따라서, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= K_c^{-1} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}^T}{\vec{n}^T K_p \vec{n}}^{-1} d\vec{u} \\ &= K_{cp} d\vec{u} \end{aligned} \tag{13}$$

$K_{cp}$ 는 단면의 소성화로 인한 강성  $K_c$ 의 수정된 강성이다.  $K_{cp}$ 는 Sherman-Morris의 식을 이용하여 쉽게 구할 수 있다. Sherman-Morris 식은 다음과 같다.

$$[G + u \cdot u^T]^{-1} = G^{-1} - \frac{G^{-1}u \cdot u^T G^{-1}}{u^T G^{-1}u + 1} \tag{14}$$

$u = \frac{\vec{n}}{(\vec{n}^T K_p \vec{n})^{1/2}}$  라 가정하면, (13)식은 다음과 같다.

$$K_{cp} = K_c - \frac{K_c \vec{n} \cdot \vec{n}^T K_c}{\vec{n}^T K_c \vec{n} + \vec{n}^T K_p \vec{n}} \tag{15}$$

$K_{cp}$ 는 단면 소성화로 인한  $K_c$ 의 수정 강성이다.

### 3.1.2 항복함수의 선택

초기 항복의 상호작용곡선은 잔류응력이 없는 경우에 항복 함수로 사용될 수 있다. 잔류응력에 대하여 고려하지 않고 stress resultant 항복면을 구할 수 있는 여러 가지 방법이 있다. 예를 들어, 다면(multifaceted surface), 다면체의 항복면, 혹은 단일함수면(single-function) 등이다.

multifaceted surface를 이용하여 이러한 방법들을 평가하는 데 있어, 탄성요소의 힘을 검토하여야 한다. 많은 논문에서 논의되듯이, multifaceted surface는 면의 상호작용에서의 올바른 부재의 강성 매트릭스의 결정에 있어 부가적인 문제를 야기할 수 있다. Orbison 등(1982)은 I-형 강재 단면의 소성 한지의 생성에 기초한 연속함수 뿐 아니라 단일함수에서의 항복면의 표현에 대하여 연구하였다. 단일함수와 연속함수를 얻기 위하여, trial과 curve fitting을 조합하는 방법을 사용하였다. 삼차원 공간에서의 항복면은 다음의 형태를 갖는다.

$$1.15p^2 + m_x^2 + m_y^2 + 3.67p^2m_x^2 + 3.0p^4m_y^2 + 4.65m_x^4m_y^2 = 1.0 \tag{16}$$

여기서,  $p = p/p_y$ , 항복하중에 대한 축력의 비

$m_x = M_x/M_{px}$ , 강축 휨모멘트의 비

$m_y = M_y/M_{py}$ , 약축 휨모멘트의 비

휨 모멘트에 대한 (16)식에서 약축효과는 없으며, 따라서 감소된 항복면의 식은 다음과 같다.

$$1.15p^2 + m_x^2 + 3.67p^2m_x^2 = 1.0 \tag{17}$$

(17)식에서의 계수의 초기값은 다른 단면에 대하여 결정되고 바뀔 수 있다. (3)식과 (15)식을 사용하면, 다음과 같다.

$$K_{cp} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{S} - \frac{(n_1 EA)^2}{S} & -\frac{n_1 n_2 (EA)(GA/\alpha)}{S} & -\frac{n_1 n_3 (EA)(EI)}{S} \\ -\frac{n_1 n_2 (EA)(GA/\alpha)}{S} & \frac{GA}{\alpha} - \frac{(n_2 GA/\alpha)^2}{S} & -\frac{n_2 n_3 (GA/\alpha)(EI)}{S} \\ -\frac{n_1 n_3 (EA)(EI)}{S} & -\frac{n_2 n_3 (GA/\alpha)(EI)}{S} & EI - \frac{(n_3 EI)^2}{S} \end{bmatrix} \tag{18}$$

여기서,

$$S = n_1^2[EA + (EA)_p] + n_2^2[GA/\alpha + (GA/\alpha)_p] + n_3[EI + (EI)_p] \text{ 이다.}$$

### 3.1.3 항복면의 이동 규칙

소성모델의 주된 목적은 일반화된 단면계수를 구하는 것이다. Yang 등의 모델에서, 일반화된 단면계수는 two-surface 소성모델에서와 같이 구한다.

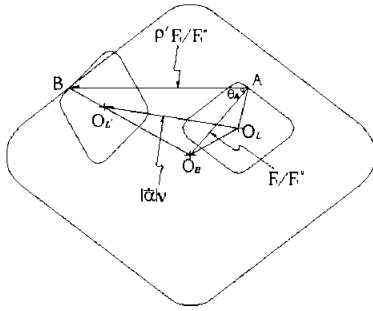


그림 3. motion of the load surface in the normalized stress resultant space

그러나 항복함수의 singularity와 같은 예상하지 못한 문제를 피하려는 관점에서, 그림3에서처럼 모든 유도는 표준화된 stress resultant 공간에서 얻는다. 만약  $P/P_u$ ,  $V/V_u$ ,  $M/M_u$ 를  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ 으로,  $\dot{P}/P_u$ ,  $\dot{V}/V_u$ ,  $\dot{M}/M_u$ 을  $\dot{F}_1$ ,  $\dot{F}_2$ ,  $\dot{F}_3$ 으로 나타낸다면 다음을 얻을 수 있다.

$$AB = \rho' (\dot{F}_1 \cdot \dot{F}_1)^{1/2} \tag{19}$$

$\rho'$ 에 대하여 풀면,

$$\rho' = \frac{-(F_1 \cdot \dot{F}_1) + \sqrt{(F_1 \cdot \dot{F}_1)^2 - (\dot{F}_1 \cdot \dot{F}_1)(F_1 \cdot F_1 - F_1 T B^2)}}{\dot{F}_1 \cdot \dot{F}_1} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \delta' &= \rho' \cdot \sqrt{\left(\frac{\dot{P}}{P_u}\right)^2 + \left(\frac{\dot{V}}{V_u}\right)^2 + \left(\frac{\dot{M}}{M_u}\right)^2} \\ &= \rho' \cdot (F_1 \cdot \dot{F}_1)^{1/2} \end{aligned} \tag{21}$$

비표준화된 stress resultant 공간은  $(EA)_p$ ,  $(EI)_p$ ,  $(GA/\alpha)_p$ 을 같은 방식으로 계산할 수 있을 때에,  $\delta_{mi} = \delta' P_u$ 와  $\delta = \delta_{mi} P_u$ 와 같이 구할 수 있다.  $\delta$ 와  $\delta_{mi}$ 를 결정하는데 있어 하중면의 이동은 중요하다. 그러므로 하중면의 이동규칙은  $\delta$ 와  $\delta_{mi}$ 를 결정하는데 매우 중요한 역할을 한다. 그림3에서 응력점이 A에서 B로 이동하는 반면 하중면의 중심은  $\delta$ 에서  $\delta'$ 로 이동한다.

다음 벡터를 삼각법으로 구한 것이다.

$$\begin{aligned} \overline{O_i O_v} &= \overline{O_B O_v} - \overline{O_B O_i} \\ &= (O_i O_v)_1 \vec{i} + (O_i O_v)_2 \vec{j} + (O_i O_v)_3 \vec{k} \end{aligned} \tag{22}$$

$\overline{O_i O_v}$  방향으로의 단위 벡터는 다음과 같다.

$$v' = \frac{(\sqrt{K_{ii}^2} - \sqrt{K_{jj}^2})(F_j + \rho \dot{F}_j)}{[(F_j + \rho \dot{F}_j) \cdot (F_j + \rho \dot{F}_j)]^{1/2}} - \alpha_j / O_i O_v \tag{23}$$

$F_i = (P/P_u, V/V_u, M/M_u)$ ,  $\dot{F}_i = (\dot{P}/P_u, \dot{V}/V_u, \dot{M}/M_u)$ 이다.

표준화된 stress resultant 공간에서의 하중면의 중심의 이동은 다음과 같이 표현한다.

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} \tag{24}$$

여기서  $\alpha_j$ 는 응력장에서의 소성모델에 적용된 것처럼 연속 규칙으로부터 구할 수 있다. 연속규칙은 다음을 요구한다.

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial \phi}{\partial V} \dot{V} + \frac{\partial \phi}{\partial M} \dot{M} + \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \dot{X}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial X_2} \dot{X}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial X_3} \dot{X}_3 = 0 \tag{25}$$

비표준화된 stress resultant 공간에서의 항복면 중심의 이동은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{X} &= X_1 \vec{i} + X_2 \vec{j} + X_3 \vec{k} \\ &= \alpha_1 P_u \vec{i} + \alpha_2 V_u \vec{j} + \alpha_3 M_u \vec{k} \\ &= \bar{\alpha}_1 v' P_u \vec{i} + \bar{\alpha}_2 v' V_u \vec{j} + \bar{\alpha}_3 v' M_u \vec{k} \end{aligned} \tag{26}$$

### 3.2 충분한 소성변형을 얻기 위한 폭-두께비 제한

관부재의 좌굴에 대한 저항은 폭-두께비( $b/t$ )와 관계가 있다. 이 제한값은 플랜지가 적어도 변형도 경화에서의 변형률  $\epsilon_{cr}$  값까지는 좌굴하지 않고 압축력을 받을 수 있다는 것을 보장한다.

축력을 받는 기둥에서  $KL/r$ 에 근거한 기둥의 전체강도가 소성 변형을 요구하지 않기 때문에 소성 변형률을 견딜 능력은 필요가 없다. 그러나 보에서는, 플랜지가 국부좌굴이 발생하지 않으면서 상당한 소성변형을 요구할 수 있다.

본 연구는 상기에서 기술한 Tseng & Lee(1983)에 의해 개발된 two-surface 소성모델과 Yang 등(1995)에 의해 발전된 stress resultant model에 아래와 같이 국부좌굴거동을 예측하는 모델을 제시하는데 그 목적이 있다.

## 4. 반복 국부좌굴로 인한 강성 저하의 적용

### 4.1. 반복 거동에서의 국부좌굴의 예측

단조하중에 대한 좌굴식을 반복 응력-변형도 실험에서 나타나는 상위 항복 응력과 더 작은 접선계수를 사용하는, 반복 하중에 대하여 수정한 식이 제안되었다. 이것은 일반적인 하위항복응력과 변형도-경화 계수를 대체할 것이다. 그러나 반복적으로 재하된 부재는 짧은 비탄성 거동 이후의 항복 평탄면을 보이지 않는다. 한두 번의 하중역전 이후의 잔류변형과 처짐이 상당할 것이고, 거동은 하중이력과 변형률에 민감하다. 이러한 이유로, 단순한 모델을 반복재료변수를 사용하여 전환하려는 시도는 아직 그 근거가 미흡하고, 성공적이지 못하다.

### 4.2. 일정한 단부 압축을 받는 판의 강도

조립형강과 마찬가지로 압연 형강도 판요소로 구성되어 있기 때문에, 전체 부재의 세장비에 따른 전체기둥의 강도는 판요소가 국부좌굴하지 않을 때에만 발휘될 수 있다. 판요소의 국부좌굴은 전체 단면의 조기 파괴를 초래하거나, 응력을 불균일하게 하고 전체 강도를 감소시킨다. 판에 대한 이론적인 탄성좌굴응력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)(b/t)^2} \quad (27)$$

여기서,  $k$ 는 응력의 형태, 단부 지지조건, 판의 형상비, 탄성계수  $E$ , 프와송비  $\mu$ , 폭-두께비  $b/t$ 에 따르는 상수이다.

압축력을 받는 실제 판의 강도는 전체 기둥강도에 영향을 주는 요소와 같은 요소들, 특히 잔류응력의 영향에 따른다. 잔류응력을 갖고 있지 않는 이상적인 탄성-비탄성 재료라고 가정하면 탄성좌굴응력  $F_{cr}$ 에 이를 때 까지는 응력분포는 일정한 상태로 유지된다. 하중은 더 증가할 수 있지만 지점에서 가장 먼 부분의 판은 면외변형을 일으킬 것이다. 이 면외변형은 응력 분포를 불균일하게 한다.

만약  $F_{cr}/F_y$ 를  $1/\lambda_r^2$ 이라고 정의하면, 다음과 같다.

$$\lambda_r = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{F_y(12)(1-\mu^2)}{\pi^2 Ek}} \quad (28)$$

단부 압축을 받는 판의 강도는 (1) 작은  $\lambda_r$  값에서의 변형도 경화, (2)  $\lambda_r = 0.5 \sim 0.6$ 에서의 항복, (3) 전이곡선에 의해 표

현되는 비탄성 좌굴, (4)  $\lambda_r$ 가 약 1.4정도인 Euler 쌍곡선으로 표현되는 탄성좌굴, (5)  $\lambda_r$  값이 1.5이상인 응력 재분배와 큰 처짐을 갖는 좌굴 후 강도에 의하여 결정된다.

### 4.3 폭-두께비 제한

#### 4.3.1 거동의 기본 요구사항

작은  $b/t$  값에서는, 좌굴이 일어나지 않고 변형도 경화에 이르고, 중간정도의  $b/t$  값에 대해서는 잔류응력과 초기의 불완전성이 전이곡선에 의해 나타나는 비탄성좌굴을 일으키며, 큰  $b/t$  값에 대해서는 좌굴이 발생한다. 즉, 큰  $b/t$  를 가지고 있는 판의 실제 강도는 좌굴강도를 초과한다.

설계요구사항을 수립하기 위하여, 의도하는 거동이 확실히 되어야 한다. 기둥요소의 국부좌굴은 전체 세장비  $KL/r$ 에 근거하여 전체강도에 선행하는 것을 논리적으로 방지할 수 있다. 거동의 기본 요구사항은 다음과 같다.

$$F_{cr}(\text{component element, i.e., plate}) \geq F_{cr}(\text{overall column})$$

이것은 적절한  $b/t$  값이 기둥의 전체 세장비에 좌우된다는 것을 의미한다. 만약 좌굴 후 강도를 고려하면, 이 관계는 더욱 복잡해질 것이다.

설계 기준은, 기둥의 세장비가 부재가 항복응력에 이르지 않게 할 때에도 일반적으로 압축재가 국부좌굴을 일으키지 않고 항복응력  $F_y$ 에 이르도록 단순화되어 있다. 국부좌굴을 일으키지 않고 항복응력에 이르는 조건은 다음과 같다.

$$F_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\mu^2)(b/t)^2} \geq F_y \quad (29)$$

#### 4.3.2 판 부재의 좌굴과 좌굴 후의 강도를 설명하는 규정

구속부재(stiffened element)의 강도는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$P_{ult} = t \int_0^b f(x) dx \quad (30)$$

이것은 불균일한 응력 분포의 적분을 포함한다. 혹은 다음과 같이 "유효폭" 개념이 사용된다.

$$P_{ult} = t b_e f_{max} \quad (31)$$

여기서,  $b_e$ 는 최대 응력이 균일한 부재의 유효폭이며, 정확

한 전체 능력을 구할 수 있다.

만약 감소된 응력  $f_{avg} (< f_{max})$ 가 사용된다면, 비구속 부재 (unstiffened element)의 능력은 다음과 같이 표현한다.

$$P_{ult} = tb f_{avg} \quad (32)$$

구속부재의 큰 좌굴 후 강도로 인하여, 부재가 좌굴한 후의 부재의 일부는 더 이상 소용이 없음을 알 수 있다. 반면에, 상대적으로 작은 좌굴 후의 강도를 갖고 있는 비구속부재는 감소된 응력의 사용으로 인하여 좌굴하지 않았다고 생각할 수 있다. 설계응력에 대하여 단면의 특성을 사용하는 것이 바람직하다. 즉, 구속부재는

$$\begin{aligned} \frac{P_{ult}}{A_{gross}} &= \frac{bt f_{max}}{A_{gross}} \\ &= \frac{A_{eff}}{A_{gross}} f_{max} \\ &= Q_s f_{max} \end{aligned} \quad (33)$$

비구속부재에 대하여,

$$\begin{aligned} \frac{P_{ult}}{A_{gross}} &= \frac{f_{avg} \cdot bt}{A_{gross}} = f_{avg} \cdot \frac{A_{gross}}{A_{gross}} \\ &= \frac{f_{avg}}{f_{max}} f_{max} \frac{A_{gross}}{A_{gross}} \\ &= \frac{f_{avg}}{f_{max}} \cdot f_{max} \\ &= Q_s f_{max} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서,  $Q_s$ 와  $Q_e$ 는 감소계수이다.

구속부재와 비구속부재로 이루어진 구조부재는 응력  $f_{avg}$ 을 정하는데 있어서 모두 비구속부재로 취급할 수 있다. 그 후에, 구속된 부재의 유효폭은  $f_{max} = f_{avg}$ 를 사용하여 결정한다. 그러므로 전체 능력은 다음과 같다.

$$P_{ult} = f_{avg} \cdot A_{eff} = f_{avg} (A_{unstiffened} + A_{eff, stiffened}) \quad (35)$$

이 식을  $A_{gross}$ 로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{P_{ult}}{A_{gross}} = \frac{f_{avg}}{f_{max}} f_{max} \frac{A_{eff}}{A_{gross}} = Q_s Q_e f_{max} \quad (36)$$

위의 식들로부터 국부좌굴의 효과는 최대응력에 감소계수  $Q (= Q_s Q_e)$ 를 곱하여 구할 수 있다는 것을 명백히 알 수 있다. 국부좌굴강도와 관련된 설계의 실행에 있어,

AISC(2001)는 국부좌굴로 인한 강도의 감소를 설명할 수 있도록 다양한 단면의  $b_E$ 뿐 아니라  $Q_s$ 를 구하는 식을 포함하고 있다.  $b_E$ 는 구속된 부재의 유효폭이며,  $A_{eff}$ 는  $b_E$ 가 유효할 때, 쉽게 구할 수 있으며 결론적으로,  $Q = Q_s Q_e$ 이기 때문에  $Q_e$  또한 쉽게 구할 수 있다. 그러므로 감소계수  $Q$ 는 국부좌굴로 인한 응력의 감소를 반영한다. AISC-LRFD(3rd Ed., 2001)는 압축 플랜지 부재를 계획 할 때 다음과 같이 규정한다.

### (1) 비구속된 압축 요소

설계 휨 강도는  $\phi_b F_y Q_s$ 를 사용하여 계산한다. 이때  $\phi_b$ 는 0.90이다.

$$\begin{aligned} 0.56\sqrt{E/F_y} < b/t < 1.03\sqrt{E/F_y} \text{ 일 때,} \\ Q_s = 1.415 - 0.74(b/t)\sqrt{F_y/E} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} b/t \geq 1.03\sqrt{E/F_y} \text{ 일 때,} \\ Q_s = 0.69E/[F_y(b/t)^2] \end{aligned} \quad (38)$$

### (2) 구속 압축 요소

일정한 압축력을 받는 구속된 부재의 폭 두께비가  $\lambda_r$ 를 초과할 때, 감소된 유효폭  $b_e$ 가 그 부재를 포함하는 단면을 설계할 때 사용된다.

$$\begin{aligned} \frac{b}{t} \geq 1.49\sqrt{\frac{E}{f}} \text{ 일 때,} \\ b_e = 1.91t\sqrt{\frac{E}{f}} \left[ 1 - \frac{0.34}{(b/t)}\sqrt{\frac{E}{f}} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

여기서,  $b$ 는 구속압축요소의 실제 폭,  $b_e$ 는 감소된 유효폭,  $t$ 는 부재의 두께,  $f$ 는 구속요소에서의 계산된 탄성압축응력이다. 만약 전체단면에 비구속요소가 포함되어 있다면, 구속요소에 대한  $f$ 는  $Q = Q_s$ ,  $\phi_c = 0.85$ 인  $\phi_c F_{cr}$ , 혹은  $\phi_b = 0.90$ 인  $\phi_b F_y Q_s$ 를 초과하지 않는 비구속요소에서의 최대 압축응력으로 한다.

### (3) 설계 특성

단면의 비구속요소에 대한  $Q_s$ 의 계산 후, 단면의 구속요소에 대한 감소계수는 다음과 같다.

$$Q_s = \frac{\text{effective area}}{\text{actual area}}$$

여기서, 유효면적은 각 단면의 유효면적의 합과 같다. 식(37)에 대한  $Q_a$ 는 다음과 같다.

$$Q_a = \frac{A_{eff}}{A_{gross}} = \frac{b_c t}{b t} = \frac{b_c}{b} = 1.91 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{f}} \left[ 1 - \frac{0.34}{(b/t)} \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \quad (40)$$

(4) 설계강도

축력을 받는 압축부재의 전체 단면적과 회전반경  $r$ 은 실제의 단면에 근거하여 계산되어야 한다. 국부좌굴의 임계응력  $F_{cr}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$(a) \lambda_{\sqrt{Q}} \leq 1.5 \text{ 일 때, } F_{cr} = Q(0.658^{Q\lambda^2}) F_y \quad (41)$$

$$(b) \lambda_{\sqrt{Q}} > 1.5 \text{ 일 때, } F_{cr} = \frac{0.877}{\lambda_c^2} F_y \quad (42)$$

여기서,  $Q = Q_s Q_a$  이다.

비구속 요소로만 구성된 단면:  $Q = Q_s$ , ( $Q_a = 1.0$ )

구속요소로만 구성된 단면:  $Q = Q_a$ , ( $Q_s = 1.0$ )

비구속 요소와 구속요소로 구성된 단면:  $Q = Q_s Q_a$

5. 반복 국부좌굴 거동을 나타내는 제안모델

5.1 소성단면계수

소성 모델의 주요 목적은 일반화된 소성단면계수를 구하는 것이다.

반복 국부좌굴 후의 거동에 대하여  $Q_a$ ,  $Q_s$ 와 같은 감소계수는 강성저하를 설명하는 일반화된 소성 단면계수( $(EA)_{pb}$ ,  $(GA/\alpha)_p$ ,  $(EI)_p$  등)와 상호 관련이 있다.

식(40)을 사용하여, 휨, 축력 전단강성의 국부좌굴로 인해 감소된 일반 단면계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(EI)_{pb} = (EI)_p \{ C_1 Q_s Q_a \} = (EI)_p C_1 \left\{ 1.91 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{f}} \left[ 1 - \frac{0.34}{(b/t)} \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \right\} Q_s \quad (43a)$$

$$(EA)_{pb} = (EA)_p \{ C_2 Q_s Q_a \} = (EA)_p C_2 \left\{ 1.91 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{f}} \left[ 1 - \frac{0.34}{(b/t)} \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \right\} Q_s \quad (43b)$$

$$(GA/\alpha)_{pb} = (GA/\alpha)_p \{ C_3 Q_a \} = (GA/\alpha)_p C_3 \left\{ 1.91 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{f}} \left[ 1 - \frac{0.34}{(b/t)} \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \right\} \quad (43c)$$

여기서,  $C_1, C_2, C_3$ 는 강성저하 상수이고, 실험 결과에 의하여 구한다.  $(EI)_{pb}$ ,  $(EA)_{pb}$ , 그리고  $(GA/\alpha)_{pb}$ 는 소성 단면계수의 감소를 나타내며,  $(EI)_p$ ,  $(EA)_p$ ,  $(GA/\alpha)_p$ 는 소성 단면계수를 나타낸다.

5.2 실험값에 의한 보정

선형 regression method에 의하여, 선형화된 감소함수는 다음과 같이 구해진다.

$$q_1 = 1.004503 - 0.00280n \quad (44a)$$

$$q_2 = 0.980499 - 0.010059n \quad (44b)$$

$$q_3 = 1.00845 - 0.00473n \quad (44c)$$

$$q_4 = 1.007207 - 0.017615n \quad (44d)$$

여기서,  $q_1$ 과  $q_2$ 는 강성 저하 함수이고,  $q_3$ 과  $q_4$ 는 휨과 축력의 조합상태에 대한 모멘트(강도) 저하함수이며,  $n$ 은 국부좌굴 이후의 사이클의 횟수이다.

$Q_s$ 와  $Q_a$ 를 W8x10 강재에 적용하면 다음과 같다.

$$(EI)_{pb} = (EI)_p \{ C_1 Q_s Q_a \} = C_1 (0.967) (EI)_p \quad (45)$$

부재의 가력 방향을 고려하여, 계수  $C_1$ 를 측정할 수 있다.  $C_1 = 1.0159$ 이라하면,  $(EI)_{pb} = 0.9824 (EI)_p$ 이다.

실험결과로부터, 휨과 축력의 조합에서 감소비율은 더 심각함을 알 수 있다. 그러나 본 연구에서 세 가지 다른 하중 상태에서 감소비율의 차이는 작다. 그러나 강성과 감도의 감소비율은 부재의 위상, 초기 불완전성, 하중상태, 경계조건, 그리고 재료의 구성관계(constitutive relationship)에 따른다. 따라서, 다양한 하중상태와 경계조건에 대한 선형화된 감소함수의 평가에 대한 연구가 필요하며, 그에 따른 다양한 실험데이터가 필요하다.

5.3 실험결과와 해석결과의 비교

실험은 W8x10(폭두께비=9.61) 부재를 절단하여 순수휨을 받는 실험과 압축력과 모멘트를 동시에 받는 실험으로 나누어 수행되었다. 실험은 순수휨실험의 경우 strain gage 제어로 수행되었으며, 압축력과 모멘트를 동시에 받는 실험의 경우 변위제어로 실험되었다. 또한 정해진 변위값에서 3에서 6 사이클의 반복하중실험을 하였다. 자세한 실험내용과 실험장치



는 참고문헌(이은택 김철환, 1999)에 자세히 기술되어있다.

위의 실험값과 비교하여 제안모델은 박판 구조부재의 반복 국부좌굴 후 거동의 중요 요소인 강도와 강성의 저하를 설명할 수 있으며, 실험 결과를 성공적으로 예측한다.

해석결과가 압축과 인장측에서 일정한 감소비율을 갖고 있음에도 불구하고, 상대적으로 좋은 상호 관계를 관찰 할 수 있다. 만약 실험결과 곡선에서 형태와 감소의 더 정확한 예측이 필요하다면, 강성 감소함수와 강성 감소 상수를 다시 조절하여야 한다. 그림4~그림7은 순수 휨 상태와 휨, 압축의 조합 상태에서의 해석과 실험의 반복국부좌굴 거동을 비교한 것이다.

### 5.3.1 좌굴 전 거동

그림 5는 stress resultant 소성모델의 수치적 예측을 보여준다. 이 데이터는 그림 4의 실험곡선과 비교하였다. stress resultant 소성모델은 실험결과를 충분히 예측한다. 사용된 형태 변수  $h$ 는 40이다. 만약 실험결과와 곡선의 형태의 더욱 정확한 예측이 요구된다면, 형상변수를 더 조절하여야 한다.

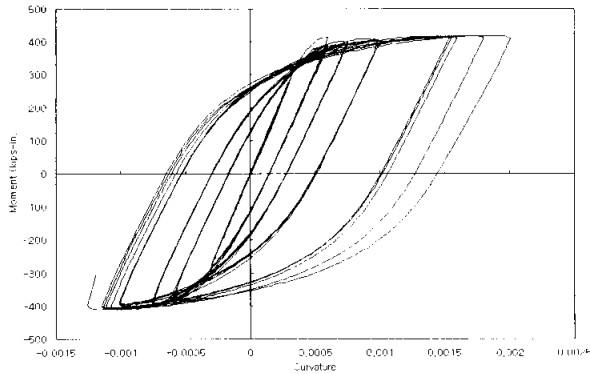


그림 4. experimental result of pure bending

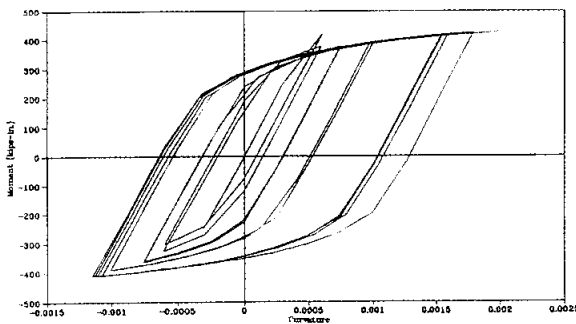


그림 5. Analytical result of pure bending

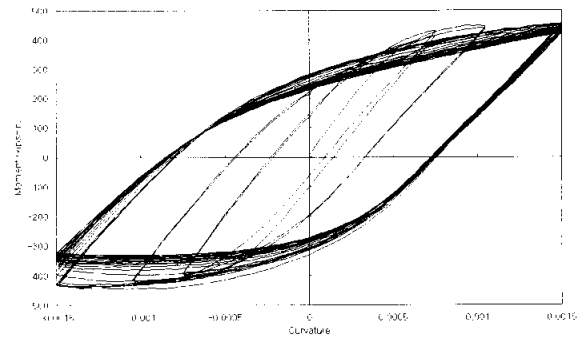


그림 6. Moment-curvature relationship of bending and axial load (experimental)

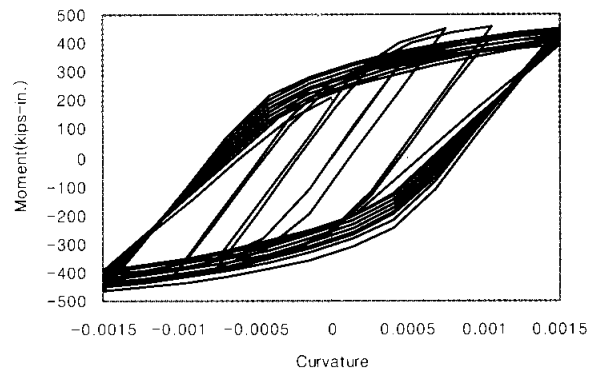


그림 7. Moment-curvature relationship of bending and axial load (theory)

### 5.3.2 좌굴 후 거동

그림 6은 일정 크기의 사이클에서 휨과 축력을 받는 W8x10 부재의 실험적 모멘트-곡률관계를 나타낸다. 그림 7은 반복 국부좌굴 후 거동의 수치적 예측을 나타낸다. 해석결과가 압축과 인장측에서 일정한 감소비율을 갖고 있음에도 불구하고, 상대적으로 좋은 상호 관계를 관찰 할 수 있다. 강성 저하 상수  $C_1$ 은 0.998로 사용되었고, 탄성 강성의 선형화된 감소함수는  $1.03566 - 0.00566x$ 이다. 만약 실험결과 곡선에서 형태와 감소의 더 정확한 예측이 필요하다면, 강성 감소함수와 강성 감소 상수는 더욱 조절되어야 한다. 매 사이클마다 감소된 에너지의 선형 감소비율은 실험결과를 적절히 예측한다.

국부좌굴 이후 반복하중의 에너지저하를 평가하기위하여 그림 6과 7의 모멘트-곡률관계그래프를 이용하여 그림 8에서 보이는 것처럼 한 사이클 당 면적을 계산하였다. 그림 8에서 보이는 것처럼 본 연구의 이론값은 선형의 형태를 취하고 있으며, 추후 지속적인 연구를 통하여 국부좌굴이후의 거동을 예측할 수 있으리라 사료된다.

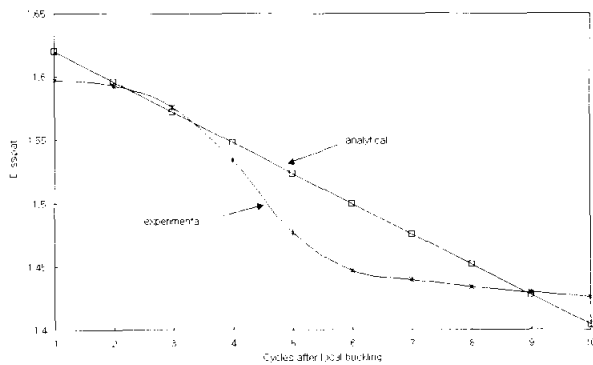


그림 8. 국부좌굴이후 흡수에너지의 비교

### 5.4 반복 국부좌굴 후의 설계 시 고려사항

지진이 발생할 경우 구조물의 붕괴를 막기 위해, 연성 골조의 주요 부재는 하중전달능력을 크게 상실하지 않으면서 큰 비탄성 변형을 지지할 수 있어야 한다.

소성해석에서의 기본적인 가정은 힌지가 일어난 부재의 모멘트 능력이 붕괴 메커니즘을 형성할 만큼 충분한 힌지가 발생하기 전에, 국부좌굴 혹은 횡-비틀림 좌굴에 의하여 감소하지 않는다는 것이다. 기초적인 이론으로부터 구한 최대 허용 가능한 플랜지의 세장비는 플랜지의 두께가 최대일 경우, 변형도 경화의 시작점에서 국부좌굴이 일어나도록 채택된다. 보-기둥에서의 웨브의 세장비 제한은 원래 Haaijer & Thurlimann(1958)의 연구에 근거한다.

반복하중상태에 대하여, 부재는 약간의 비탄성역으로의 전이 이후에 항복 평탄면을 나타내지 않는다. 몇 번의 사이클 이후에 상당한 잔류응력과 변형이 존재할 것이고, 그 거동은 부재의 위상, 초기 불완전성, 잔류응력, 하중상태, 경계조건, 재료의 구성관계 그리고 변형을 비와 같은 많은 변수에 민감할 것이다. 이러한 이유로, 단순한 모델을 재료의 특성을 사용하여 변환하려는 시도는 성공적이지 못했다.

구조의 손상은 일반적으로 비탄성 변형을 통해 감소된 에너지에 의하여 나타낼 수 있다. 반면에, 이러한 에너지의 감소는 부재가 완전 탄성적으로 거동한다면 요구될 탄성 강도 저하의 주요 원인이다.

단면의 곡률연성계수는 곡률  $\psi$ 의 소성곡률  $\psi_p$ 에 대한 비율이다. 회복의 특징은 다음의 비율에 의하여 정의한다.

$$w = \frac{K_p}{K_e} \tag{46}$$

여기서,  $K_p$ 와  $K_e$ 는 각각 소성역과 탄성역에서의 골조의 강성이다.

단조하중상태를 가정하여, 내진설계 코드는 플랜지와 웨브의 폭-두께비를 사용한다. 그러나 반복하중 재하시의 거동은 국부좌굴에 영향을 주는 많은 변수를 가지고 있기 때문에, 코드를 설계에 직접 사용할 수 없다. 반복하중을 받는 부재의 국부좌굴이 하중전달 능력의 한계를 의미하지는 않기 때문에, 부재는 판요소의 국부좌굴 이후에도 추가적인 압축이나 휨을 견딜 수 있다.

본 연구에서, 강재의 반복 국부좌굴 후 거동을 예측하기 위한 방법이 발표되었다. 이것은 박판 강구조 부재의 비선형 동적 해석과 국부좌굴 후의 설계를 수행하는 데에 유용할 것이다. 제안모델은 박판 구조용 부재의 반복 국부좌굴 후 거동의 중요 요소인 강도와 강성의 저하를 설명할 수 있다. 각각의 구조재의 에너지 감소 능력은 이 방법을 내진설계에 이용하여 근사적으로 예측할 수 있다.

### 6. 결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) stress resultant 모델을 이용한 제안된 국부좌굴모델은 반복 국부좌굴 후의 모멘트-곡률관계를 이용하여 박판 구조부재의 반복 국부좌굴 후 거동을 설명하는 중요한 요소인 강도와 강성의 저하를 나타낼 수 있다. 해석적 모멘트-곡률관계는 일정한 반복사이클 내에서 실험결과와 잘 일치하며, 내진설계에 있어 중요한 선형분포된 에너지 감소를 제안모델로부터 예측할 수 있다. 그러나, 국부좌굴 발생 이후의 비대칭 루프는 이 제안 모델에서 고려되지 않았다.
- (2) 국부좌굴 이전의 거동에서 재료의 항복면은 등방-이동경화 법칙 혹은 이동경화 법칙을 따른다. 그리고 소성계수는 현재 재하점과 이 점에 상응하는 경계면과의 상대적 거리  $\delta$ 와 재하 또는 재하 시 초기 항복점과 이 점에 상응하는 경계면과의 거리  $\delta_{m1}$ 의 함수라는 것이 실험을 통하여 나타났다.
- (3) 국부좌굴이전 및 이후 거동에 대한 본 연구는 기본적인 소성상태의 거동으로부터 복잡한 소성거동까지를 나타내고 있다. 그러나 심한 지진과 같은 하중 때문에 발생하는 불비례하중(nonproportional loading) 등에 대한 더욱 정교한 실험이 다양하게 이루어져야하고 지진에 맞는 하중이력의 검토가 이루어져야한다. 또한, 반복하중 상태에서 국부좌굴 발생이후의 부재의 길이 효과, 잔류응력의 영향, 다양한 하중조건, 여러 가지 폭-두께비에 대한 다양한 단면에서의 실

협적 이론적 연구가 필요하다.

### 감사의 글

이 논문은 2004학년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것입니다. 연구비지원에 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

- 김덕재 이은택(2000) 강구조 이론과 한계상태설계, 기문당
- 이은택 김철환(1999) 반복하중을 받는 I-형강의 국부좌굴, 대한건축학회지회 연합논문집, 제1권, 제1호, 10월, pp. 201-209.
- AISC(2001) Manual of Steel Construction, Load & Resistance Factor Design, 3rd Ed..
- Bijlaard, P. P. and Fisher, G. P.(1952) Interaction of Column and Local Buckling, NACA TN No. 2640, March.
- Bijlaard, P. P. and Fisher, G. P.(1953) Column Strength of H-Sections and Square Tubes in Post Buckling Range of Component Plates, NACA TN No. 2994, Aug..
- Bulson, P.S.(1969) The Stability of Flat Plates, American Elsevier Pub. Co.
- Chang, K. C. and Lee, G. C.(1986) Constitutive Relations of Structural Steel Under Nonproportional Loading, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 112, No. 8, August, pp.806-820.
- Dafalias, Y. F., and Popov, E. P.(1975) A Model for Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading, *Acta Mechanica*, Vol. 21, No. 3, pp.173-192.
- Dafalias, Y. F., and Popov, E. P.(1976) Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 98, No.4, December, pp.645-651.
- Graves-Smith, T. R.(1969) The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Arbitrary Length, Thin Walled Steel Structures, Eds. Rockey and Hill, Crosby Lockwood, London, pp.35-60.
- Haijjer, G. and Thurlimann, B.(1958) On Inelastic Buckling in Steel, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 84, No. EM2, Proc. Paper 1581.
- Hancock, G. J.(1981) Interaction Buckling in I-Section Columns, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 107, ST1, January, pp.165-179.
- Krieg, R. D.(1975) A Practical Two Surface Plasticity Theory, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 97, September, pp.641-646.
- Orbison, J.G., McGuire, W. and Abel, J.F.(1982) Yield Surface Applications in Nonlinear Steel Frame Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 33, pp.557-573.
- Phillips, A. and Sierakowski, R. L.(1965) On the Concept of the Yield Surface, *Acta Mechanica*, Vol. 1, pp.29-35.
- Sharp, M. L.(1970) Strength of Beams or Columns with Buckled Elements, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 96, No. ST5, May, pp.1011-1015.
- Stowell, E. Z.(1958) A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates, NACA TN No. 1556.
- Timoshenko, S. P. and Gere, J. N.(1961) Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Co.
- Tseng, N. T. and Lee, G. C.(1983) Simple Plasticity Model of Two-Surface Type, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 109, No. 3, June.
- Yang, C. F., Lee, E. T, Chang, K. C., Lee, G. C..(1995) Inelastic Behavior of Steel Members under Nonproportional Loading, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 121, No. 1, January, pp.131-141.

(접수일자 : 2005. 1. 15 / 심사일 2005. 1. 24 /  
심사완료일 2005. 3. 29)