

조달기간수요에 대한 실험적 분석

박창규[†]

울산대학교 경영대학 경영학부

On the Lead Time Demand in Stochastic Inventory Systems

Changkyu Park

Department of Management, University of Ulsan, Ulsan, 680-749

Due to the importance of lead time demand in the design of inventory management systems, researchers and practitioners have paid continuous attention and a few analytic models using the compound distribution approach have been reported. However, since the nature of compound distributions is hardly amenable, the analytic models have been done by non-recognition of the compound nature of some components to reduce the analytic task. This study concerns some of the important aspects in the analytic models. Through the theoretic examination of the analytic model approach and the comparison with the rigid compound stochastic process approach, this study clarifies the assumptions implicitly made by the analytic models and provides some precautions in using the analytic models. Illustrative examples are also presented.

Keyword: inventory, lead time demand, compound stochastic process, renewal process

1. 서론

재고관리시스템을 설계함에 있어서 조달기간수요(Lead Time Demand; LTD)에 대한 정보는 필수적인 사항이기 때문에 연구자들뿐만 아니라 실무자들도 LTD에 대해 지대한 관심을 쏟아왔다. LTD 분포를 유도하기 위해서는 수요와 조달기간에 대한 분포를 동시에 고려하여야 하며, 이 작업은 아주 복잡하고 어려운 수리적 과정을 거쳐야 한다. 따라서 종종 LTD가 특정의 편리한 분포(예를 들어, 포아송, 정규, 감마, 와이블 등)를 따른다는 가정하에 많은 연구들이 재고문제를 풀어왔다(Kumaran and Achary, 1996).

그러나 Bagchi *et al.*(1984), Carlson(1982), McFadden(1972) 등과 같은 연구자들은 복합분포(Compound Distribution)를 이용하여 LTD 분포를 명시적으로 유도하였다. Bagchi *et al.*(1984) 등이 주장하듯이 복합분포를 이용하면 다음과 같은 장점이 있다. (1) 복합분포의 각 구성요소들을 개별적으로 모형화하여 쉽게 모수를 추정할 수 있다. 그리고 (2) 각 구성요소들을 개별적으로 모형화하면 모형구조가 간단해지고 데이터의 이용이 수월해지므로 직접적으로 LTD 분포를 모형화하려는

시도보다 더 체계적인 접근방법이 된다.

Bagchi *et al.*(1984)는 발표한 연구들을 검토한 후에 LTD를 유도하는 방법을 정형화하였다(이하 'BHO 접근방법'이라고 함). 그들이 검토한 연구들에서는 수요와 조달기간이 각각 독립적이고 동일한 분포를 따르는 확률변수들로 가정되었고, LTD 분포는 복합분포로 유도되었다. BHO 접근방법에 대해서는 제2장에서 자세히 다루겠지만 우선 간단히 살펴보면, BHO 접근방법은 주문강도(Order Intensity), 주문크기(Order Size), 그리고 조달기간을 주요요소들로 고려하고 있다. 그리고 LTD 특성을 밝혀내는 수리적 분석과정에서 복잡성을 줄이기 위해 주요요소들 중 2가지 요소를 중간요소(예를 들면, DPUT (Demand Per Unit Time), 제2장에 있는 <Figure 2> 참조)로 통합한다.

LTD분포에 관한 대부분의 연구들이 이BHO 접근방법에 포함되는데, 이는 그렇게 놀랄 만한 일은 아니다. 왜냐하면, 복합분포를 수리적으로 유도하는 과정은 단지 2개의 확률요소만을 고려하더라도 매우 복잡하며 그 이상의 확률요소들을 고려한다는 것은 매우 도전적인 작업이기 때문이다. 여기서 우리는 다음과 같은 난관에 직면하게 된다. 즉, 실제에 가까운 LTD

이 논문은 2003년 울산대학교의 연구비에 의하여 연구되었음.

[†] 연락처 : 박창규 교수, 680-749 울산광역시 남구 무거동 산 29 울산대학교 경영대학, Fax : 052-247-7619, E-mail : ckparkuou@ulsan.ac.kr
2004년 3월 접수; 2004년 7월 수정본 접수; 2004년 11월 게재 확정.

분포를 모형화하는 작업은 무척 힘든 계산과정을 거쳐야 할 뿐만 아니라, 때론 수리적인 유도가 불가능한 경우도 종종 있다. 반면에 보다 간단한 모형은 유도과정은 수월하나 실제 상황을 묘사하기에 부적절한 면을 갖게 된다.

대개 우리는 간단한 모형을 실제상황의 근사치로서 큰 비판 없이 받아들인다. 하지만 한번쯤은 어떠한 상황에서 간단한 모형에 의해 유도된 LTD 분포가 적절한 성과를 발휘하는지 검토할 필요성은 충분히 있다. 본 논문의 목적은 LTD를 유도하는 BHO 접근방법을 비판하기 위한 것이 아니라 BHO 접근방법을 활용할 때 주의해야 할 사항을 제공하여 BHO 접근방법을 이용하려는 연구자나 실무자를 돕기 위한 것이다. 우선 본 논문은 LTD 분포를 유도하는 2가지 접근방법, 즉 BHO 접근방법과 본 논문의 접근방법을 이론적으로 검토하고 비교한다. 그런 다음, 위의 결과를 바탕으로 BHO 접근방법이 암묵적으로 가정한 사항을 밝혀내고, 어떠한 상황에서 BHO 접근방법이 적절한 성과를 발휘하는지 알아본다. 또한 다양한 상황에서의 비교실험을 통하여 조달기간수요에 대한 실험적 분석을 수행한다.

2. 접근방법

본 논문에서 고려하는 상황을 <Figure 1>과 같이 묘사할 수 있다. 고객의 주문은 무작위로 도착하고 주문 간의 간격시간은 서로 독립이라고 가정한다. 또한 각 주문의 크기(단위 수)도 무작위로 변하고 서로 독립이라고 가정한다. 그러면 LTD는 조달기간(Lead Time; LT) 동안에 요구되는 총 단위 수이다. 예를 들어, <Figure 1>은 LTD가 19인 경우를 보여준다.

$D(t)$ 를 일정기간 $(0, t)$ 동안의 누적수요라고 정의하면 $(0 \leq t)$ LTD는 $D(LT)$, $LT \geq 0$ 으로 묘사할 수 있다. 여기서 LT는 재고관리시스템에서 쓰이는 용어로 재보충기간, 즉 보충주문이 내려진 시각부터 공급자로부터 그 주문에 대한 보충을 받을 때까지의 시간이다.

LTD를 유도하는 접근방법은 <Figure 2>와 같이 나타낼 수 있고, 여기서는 2가지 접근방법을 보여주고 있다. 왼쪽에 있는 접근방법은 Bagchi *et al.*(1984)가 정형화한 BHO 접근방법이

다. 이 접근방법은 우선적으로 주문강도(Order Intensity; OI)와 주문크기(Order Size; OS)를 결합하여 단위 시간당 수요(Demand Per Unit Time; DPUT)를 유도한다. 여기서 OI는 시간당 주문의 수, OS는 각 주문의 크기, 그리고 DPUT는 단위 시간당 총 수요를 의미한다. 그런 다음, DPUT와 LT를 결합하여 LTD를 유도한다. (Bagchi *et al.*(1984)은 OI와 LT를 결합하여 유도한 조달기간주문강도(Lead Time Order Intensity)라는 개념을 이용한 다른 접근방법도 정형화하였지만 앞의 접근방법과 기본적으로 같고 문헌적으로 알려지지 않아서 본 논문에서는 생략한다.)

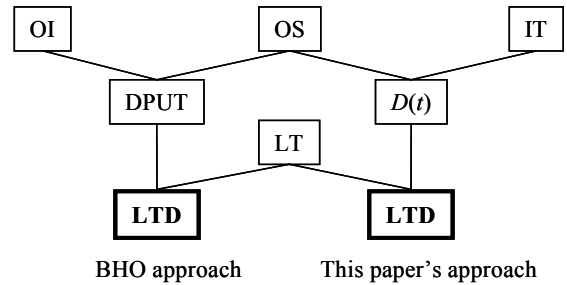


Figure 2. Approaches to lead time demand.

<Figure 2>의 오른쪽에 있는 접근방법은 본 논문에서 취하고 있는 접근방법이다. 이 접근방법은 우선 OS와 도착주문 간의 시간(Inter-arrival Time; IT)을 이용하여 $D(t)$ 를 유도한다. 여기서 IT는 연속적으로 도착하는 주문 간의 시간간격이다. 그런 다음, $D(t)$ 와 LT를 결합하여 LTD를 유도한다. 이 접근방법은 LTD를 유도하는 과정이 복잡하고 계산상의 어려움이 따르는 하지만, BHO 접근방법보다 본 논문에서 고려하는 상황을 좀더 잘 반영하고 있다고 볼 수 있다. 본 논문은 BHO 접근방법의 특성을 검토하기 위한 기준으로서 이 접근방법을 활용한다.

2.1 본 논문의 접근방법

이 접근방법은 OS와 IT의 정보를 이용하여 일정기간 $(0, t)$ 동안의 총 수요인 $D(t)$ 를 유도한다. 여기서 주문크기의 연속체

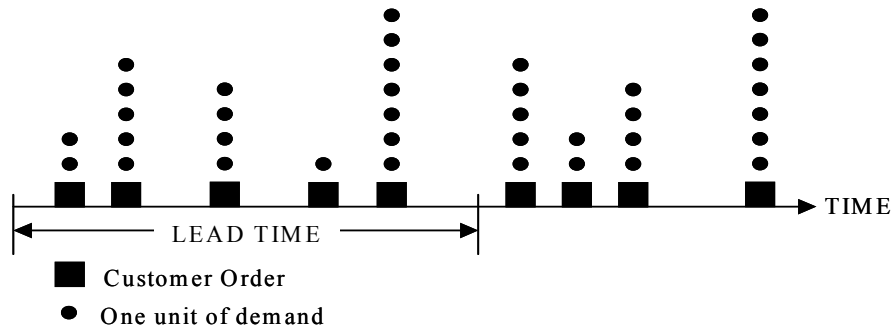


Figure 1. Realization of lead time demand.

$\{OS_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ 내의 OS_i 는 서로 독립이고, 동일한 분포(즉, 확률질량함수 $h(\cdot)$, 누적분포함수 $H(\cdot)$, 평균 μ_{OS} , 분산 σ_{OS}^2)를 따른다고 가정한다. 그러면 일정기간 $(0, t)$ 동안의 총 수요는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D(t) = OS_0 + OS_1 + \dots + OS_{N(t)} = \sum_{i=0}^{N(t)} OS_i \quad (1)$$

여기서 $N(t)$ 는 일정기간 $(0, t)$ 동안에 도착한 주문의 수이고 $N(0) = 0, D(0) = 0$.

주어진 시간 t 에서 $D(t)$ 의 누적분포함수를 $F(d; t)$ 라 정의하면, $d, t \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} F(d; t) &= \Pr\{D(t) \leq d\} = \Pr\left\{\sum_{i=0}^{N(t)} OS_i \leq d\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\left\{\sum_{i=0}^{N(t)} OS_i \leq d \mid N(t) = n\right\} \Pr\{N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\left\{\sum_{i=0}^n OS_i \leq d\right\} \Pr\{N(t) = n\} \quad (2) \end{aligned}$$

여기서 도착주문 간의 시간간격의 연속체 $\{IT_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ 내의 IT_i 는 서로 독립이고, 동일한 분포(즉, 확률밀도함수 $g(\cdot)$, 누적분포함수 $G(\cdot)$, 평균 μ_T , 분산 σ_T^2)를 따른다고 가정한다. 그러면 비음정수를 갖는 확률과정 $\{N(t), t \geq 0\}$ 는 일정기간 $(0, t)$ 동안에 도착한 연속적인 주문을 기록하는 재생과정(renewal process)이다.

이제, n 번째 주문이 도착할 때까지의 대기시간을 W_n 이라 하면,

$$W_n = \sum_{i=0}^n IT_i \quad n \geq 0 \quad (3)$$

여기서 $W_0 = 0$ 이고 $IT_0 = 0$.

대기시간과정 $\{W_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 과 재생과정 $\{N(t), t \geq 0\}$ 을 잇는 기본적인 관계는 다음과 같다(Taylor and Karlin, 1984).

$$N(t) \geq n \text{ if and only if } W_n \leq t$$

따라서 $n, t \geq 0$ 에 대해

$$\Pr\{N(t) \geq n\} = \Pr\{W_n \leq t\} = \Pr\left\{\sum_{i=0}^n IT_i \leq t\right\} = G_n(t) \quad (4)$$

여기서 $G_n(t)$ 는 $G(t)$ 의 n 차 convolution 이고, $t \geq 0$ 에 대해

$$G_n(t) = \int_0^{\infty} G_{n-1}(t-y) dG(y) = \int_0^t G_{n-1}(t-y) dG(y) \quad (5)$$

그리고 $G_0(t) = 1, G_1(t) = G(t)$.

결국 식 (4)로부터 $n, t \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} z(n; t) &= \Pr\{N(t) = n\} = \Pr\{N(t) \geq n\} \\ &\quad - \Pr\{N(t) \geq n+1\} = G_n(t) - G_{n+1}(t) \quad (6) \end{aligned}$$

식 (6)을 식 (2) 삽입하면, $d, t \geq 0$ 에 대해

$$F(d; t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(d) z(n; t) \quad (7)$$

여기서 $H_n(d)$ 는 $H(d)$ 의 n 차 convolution 이고, $d \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} H_n(d) &= \sum_{y=0}^{\infty} H_{n-1}(d-y) h(y) \\ &= \sum_{y=0}^d H_{n-1}(d-y) h(y) \quad (8) \end{aligned}$$

그리고 $H_0(d) = 1, H_1(d) = H(d)$.

식 (7)과 같이 묘사되는 $D(t)$ 의 누적분포함수는 기본적으로 식 (5)와 식 (8)에 의해서 결정된다. 여기서 식 (5)와 식 (8)을 직접 계산하여 $D(t)$ 의 상세한 특성을 밝히려 하면 너무 복잡한 계산과정을 거쳐야 하므로 복잡성을 조금이라도 줄이기 위해 본 논문은 변환과정을 통한 우회적인 접근을 시도한다. 이산형과 연속형을 갖는 일반적인 분포에 대한 변환과정을 Lemma 1과 Lemma 2에 각각 제시한다.

Lemma 1. 만일 $h(x), x = 0, 1, 2, \dots$ 가 이산형 확률질량함수라고 하면, $H_n(x)$ 는 $n \geq 1$ 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^x \tilde{h}_n(k) \quad (9)$$

여기서

$$\tilde{h}_n(k) = \sum_{\substack{j_0+\dots+j_k=n \\ j_1+2j_2+\dots+kj_k=k}} \frac{n!}{\prod_{l=0}^k j_l!} \prod_{l=0}^k k(l)^{j_l} \quad (10)$$

그리고 j_l 은 비음정수이다.

[증명] 이산형 Laplace 연산자 $L[u] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)s^k$ 를 적용하면 다음과 같은 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} L[H_n] &= L[H_{n-1} * h] = L[H_{n-1}]L[h] = L[1]L[h]^n \\ &= \frac{1}{1-s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k)s^k \right)^n = \frac{1}{1-s} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}_n(k)s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}_n(k) \frac{1}{1-s} s^k \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 *는 이산형 유한의 convolution 이고,

식 (10)과 같이 정의된 $\tilde{h}_n(k)$ 는 $\left(\sum_{j=0}^k h(j)s^j \right)$ 에서 s^j 항의 계수이다.

$\delta(x=0)$ 을 지시함수, 즉 $x=0$ 이면 1이고 다른 경우에는 0의 값을 갖는 함수라 하고, 역 Laplace 연산자 L^{-1} 를 식 (11)에 적용하면,

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}_n(k) L^{-1} \{ L[1]L[\delta(x-k=0)] \} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}_n(k) L^{-1} \{ 1 * \delta(x-k=0) \} (x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}_n(k) \sum_{l=0}^x \delta(l-k=0) = \sum_{k=0}^x \tilde{h}_n(k) \end{aligned} \quad (12)$$

Lemma 2. 만일 $g(t)$, $t \geq 0$ 가 연속형 확률밀도함수라 하고 $\int_0^a g(t)dt \equiv 1.0$ 이면,

$G_n(t)$ 는 $0 \leq t \leq a$ 에 대해 식 (13)과 같이 근사적으로 정의할 수 있다.

$$G_n(t) = t^n \sum_{k=0}^{nl} b_n(k) \frac{1}{(k+n)!} t^k \quad (13)$$

여기서 l 은 일정기간 $(0, a)$ 를 균등하게 나눈 시간간격의 수이고

$$b_n(k) = \sum_{\substack{j_0+\dots+j_k=n \\ j_1+2j_2+\dots+kj_k=k}} \frac{n!}{k!} \prod_{l=0}^k (l! a_l)^{j_l} \quad (14)$$

j_l 는 비음 정수

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^l \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_l & t_l^2 & \cdots & t_l^l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_l) \end{bmatrix}$$

$$t_i = i \frac{a}{l} \quad (0 \leq i \leq l)$$

[증명] 확률밀도함수 $g(t)$ 를 점 $(t_i, g(t_i))$, $t_i = i \frac{a}{l}$ ($0 \leq i \leq l$)에서 Lagrange interpolating polynomial $p_l(t)$ 로 근사시키면, 식 (5)의 $G_n(t)$ 는 다음과 같이 재정의할 수 있다.

$$G_n(t) = \int_0^t G_{n-1}(t-y) p_l(y) dy \quad (15)$$

식 (15)에 연속형 Laplace 연산자 $L[u] = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt$ 를 적용하면,

$$\begin{aligned} L[G_n] &= L[G_{n-1} * p_l] = L[G_{n-1}]L[p_l] = L[1]L[p_l]^n \\ &= \frac{1}{s} \left(\int_0^{\infty} p_l(t) e^{-st} dt \right)^n = \frac{1}{s} \left(\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^l a_k t^k e^{-st} dt \right)^n \\ &= \frac{1}{s} \left(\sum_{k=0}^l a_k \int_0^{\infty} t^k e^{-st} dt \right)^n = \frac{1}{s} \left(\sum_{k=0}^l a_k \frac{k!}{s^{k+1}} \right)^n \\ &= \frac{1}{s^{1+n}} \left(\sum_{k=0}^l a_k \frac{k!}{s^k} \right)^n \equiv \frac{1}{s^{1+n}} \sum_{k=0}^{nl} b_n(k) \frac{1}{s^k} \\ &= \sum_{k=0}^{nl} b_n(k) \frac{1}{s^{k+n+1}} = \sum_{k=0}^{nl} b_n(k) L[t^{k+n}] \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 식 (14)와 같이 정의된 $b_n(k)$ 는 $\left(\sum_{j=0}^k a_j \frac{j!}{s^j} \right)^n$ 에서 $\frac{1}{s^j}$ 의 계수이다.

끝으로, 식 (16)에 역 Laplace 연산자 L^{-1} 를 적용하면 식 (13)을 얻을 수 있다.

마지막으로 LTD는 $D(t)$ 와 LT를 결합시켜 얻는다. 여기서 LTD의 누적분포함수를 $L(d)$ 라 정의하고, LT는 평균 μ_{LT} 과 분산 σ_{LT}^2 를 갖는 확률밀도함수 $k(t)$ 를 따른다고 가정하면, $d \geq 0$ 에 대해

$$L(d) = \sum_{x=0}^d \int_0^{\infty} \Pr\{D(t) = x\} k(t) dt$$

$$= \sum_{x=0}^d \int [F(d;t) - F(d-1;t)]k(t)dt \quad (17)$$

2.2 BHO 접근방법

이 접근방법은 복합분포의 구성요소인 OS와 OI를 결합시켜 만든 DPUT의 복합적 성질(compound nature)을 암묵적으로 취급함으로써 LTD를 유도하는 과정에서 수리적 복잡성을 줄이고 있다. 주문강도 OI가 평균 μ_{OI} 과 분산 σ_{OI}^2 를 갖는 확률질량 함수 $p(\cdot)$ 를 따른다고 가정하면, 단위시간당 수요는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$DPUT = OS_0 + OS_1 + \dots + OS_{OI} = \sum_{i=0}^{OI} OS_i \quad (18)$$

그리고 관련된 확률분포는 다음과 같이 구해진다. 즉, $d \geq 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} \Pr\{DPUT \leq d\} &= \Pr\left\{ \sum_{i=0}^{OI} OS_i \leq d \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\left\{ \sum_{i=0}^{OI} OS_i \leq d \mid OI = n \right\} \Pr\{OI = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\left\{ \sum_{i=0}^n OS_i \leq d \right\} p(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(d) p(n) \end{aligned} \quad (19)$$

BHO 접근방법은 DPUT와 LT를 결합하여 LTD를 유도한다. 그러나 식 (19)에서도 알 수 있듯이, DPUT는 시간의 모수를 갖고 있지 않다. 따라서 BHO 접근방법은 일정기간 (0, t) 동안의 총 수요인 D(t)를 시간을 비례적으로 포함시켜 DPUT로부터 암묵적으로 유도한다. 다시 설명하면, DPUT는 단위시간당 수요이므로 D(t)는 DPUT에 시간을 비례시켜 유도할 수 있다고 가정한다.

따라서 $d \geq 0$ 이고 $t > 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} \Pr\{D(t) \leq d\} &= \Pr\{DPUT * t \leq d\} = \Pr\left\{DPUT \leq \frac{d}{t}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(\frac{d}{t}\right) p(n) \end{aligned} \quad (20)$$

식 (7)과 비교해 보면, BHO 접근방법은 DPUT의 복합적 성질을 무시함으로써 수리적 복잡성을 상당히 줄이고 있다는 사실을 식 (20)으로부터 알 수 있다. 마지막으로 LTD의 확률분포는 본 논문의 접근방법과 유사하게 식(17)을 이용하여 구할 수

있다.

3. 두 접근방법의 비교

BHO 접근방법에서 중간요소의 복합적 성질을 무시할 수밖에 없는 것은 수리적 해답을 얻기 위해 지불해야 할 대가라고 Bagchi *et al.*(1984) 등은 주장하고 있다. 그러나 지불해야 할 대가가 허용수준을 넘는다면, 우리는 다른 접근방법을 고려해야 할 것이다. 본 장에서는 제2장에서 기술한 2가지 접근방법을 비교하여 수요과정의 특성을 검토하고, 어떠한 상황에서 BHO 접근방법을 적절히 사용할 수 있는지 밝혀보고자 한다.

본 논문의 접근방법에서 식 (1)에 있는 OS_i 와 $N(t)$ 는 확률변수이므로 일정기간 (0, t) 동안의 총 수요인 D(t)는 확률변수들의 무작위 합(random sum)이다. 따라서 D(t)의 평균과 분산은 다음과 같이 유도할 수 있다(Taylor and Karlin, 1984).

$$\begin{aligned} E[D(t)] &= \mu_{OS} E[N(t)] \\ Var[D(t)] &= E[N(t)]\sigma_{OS}^2 + \mu_{OS}^2 Var[N(t)] \end{aligned} \quad (21)$$

마찬가지 방법으로, 식 (18)로부터 DPUT 역시 확률변수들의 무작위 합임을 알 수 있고, DPUT의 평균과 분산은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[DPUT] &= \mu_{OS} \mu_{OI} \\ Var[DPUT] &= \mu_{OI} \sigma_{OS}^2 + \mu_{OS}^2 \sigma_{OI}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

BHO 접근방법에서 D(t)는 DPUT에 시간을 비례시켜 유도할 수 있다고 가정하므로 D(t)의 평균과 분산은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[D(t)] &= \mu_{OS} \mu_{OI} t \\ Var[D(t)] &= (\mu_{OI} \sigma_{OS}^2 + \mu_{OS}^2 \sigma_{OI}^2) t \end{aligned} \quad (23)$$

본 논문은 수요의 변동성(Demand Variability)을 측정하기 위해서 분산 대 평균 비율(variance-to-mean ratio; VMR)을 이용한다. 비록 자주 사용되는 변동계수(coefficient of variation) 보다는 잘 알려져 있지는 않지만, VMR(또한, Index of Dispersion이라고도 불림)은 이산형 분포를 구분하는 데 유용하게 사용될 수 있다(Ord, 1973). 식 (23)에 따르면, BHO 접근방법은 수요의 VMR이 상수라는 가정에 기초를 두고 있음을 알 수 있다. 다시 말해서, 수요의 평균과 분산이 시간에 대해서 일정한 비율로 증가한다는 것이다. 이런 가정은 식 (21)에 있는 재생 과정 $\{N(t), t \geq 0\}$ 이 포아송 과정(Poisson Process)일 경우에 정

당화 될 수 있다.

그러나 다음과 같은 $N(t)$ 의 근사적 성격에 따르면(Taylor and Karlin, 1984),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mu_{IT}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Var[N(t)]}{t} = \frac{\sigma_{IT}^2}{\mu_{IT}^3} \quad (24)$$

식 (21)에 있는 $N(t)$ 의 근사적 평균과 분산은 각각 t/μ_{IT} 와 $t\sigma_{IT}^2/\mu_{IT}^3$ 으로 접근한다. 이 분석으로부터 우리는 IT가 어떠한 분포를 따르더라도 고려하는 기간이 충분히 크다면, 본 논문의 접근 방법과 BHO 접근방법은 $D(t)$ 에 대해 유사한 결과를 낳는다는 것을 알 수 있다.

지금까지의 이론적 검토에 비추어 볼 때, BHO 접근방법은 확률수요과정이 복합포아송과정(Compound Poisson Process)을 따를 경우에 가장 적절함을 알 수 있다. 그리고 다른 경우일 지라도, 근사치를 사용할 수 있도록 LT의 평균, μ_{LT} 이 충분히 크다면 BHO 접근방법을 사용할 수 있으리라 추측할 수 있다. 다음 장에서는 다양한 상황에서 비교실험을 수행하여 이러한 사실을 살펴보기로 한다.

4. 비교실험

본 장에서는 앞에서 살펴본 2가지 접근방법을 실험적으로 비교해 보기 위해 <Table 1>과 같은 다양한 상황에서 비교실험을 실시한 결과를 보여준다. IT로는 Uniform과 Exponential 분포를 고려하였고 OS로는 Uniform, Binomial, 그리고 Poisson 분포를 고려하였다. 그리고 BHO 접근방법이 LT의 기간에 어떻게 영향을 받는지 알아보기 위해서 LT의 분포로서 $\mu_{LT} = 3.0$ 과

Table 1. Comparison situation

	Comparison							
	1		2		3		4	
IT	Uniform		Exp		Uniform		Uniform	
	(1, 9)	(6, 14)	5	10	(1, 9)	(6, 14)	(1, 9)	(6, 14)
OS	Uniform		Uniform		Binomial		Poisson	
	(15, 25)		(15, 25)		N=20, p=0.7		10	
LT	Exp		Exp		Exp		Exp	
	3 & 10	5 & 20	3 & 10	5 & 20	3 & 10	5 & 20	3 & 10	5 & 20

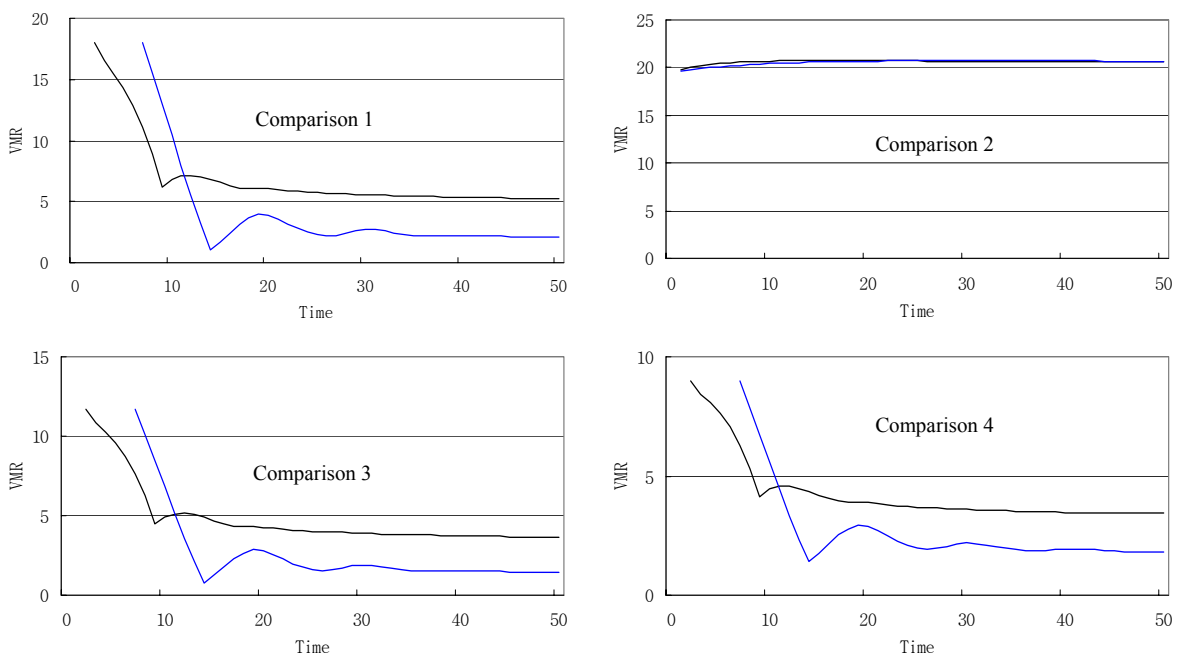


Figure 3. Variance-to-Mean Ratio.

5.0($< \mu_{IT}$)인 경우와 $\mu_{LT} = 10.0$ 과 $20.0(> \mu_{IT})$ 인 경우의 Exponential 분포를 고려하였다. 각 상황에서 일정기간(0, t) 동안의 총 수요인 $D(t)$ 의 VMR를 계산해 보면 <Figure 3>과 같이 $D(t)$ 의 VMR이 시간이 증가함에 따라 특정한 값으로 접근하는 것을 알 수 있다. 따라서 LT의 평균, μ_{LT} 이 충분히 크다면 본 논문의 접근방법과 BHO 접근방법은 $D(t)$ 에 대해 유사한 결과를 낼 것이라는 것을 추측할 수 있다.

본 장에서 고려한 실험상황에서 LTD 분포는 본 논문의 접근방법의 경우, 식 (17)을 이용하여 구할 수 있다. 하지만 BHO 접근방법의 경우, LTD 분포를 구하기 위해 OI에 대한 추가정보가 필요하다. 즉, 식(20)에 있는 $p(n)$ 을 유도하여야 한다. 비교 실험에서 $p(n)$ 을 수리적으로 유도하기는 무척 힘들다. 따라서 본 장에서는 감마분포를 $D(t)$ 에 대한 근사분포로 사용한다. 그 이유는 본 연구를 위해 수행한 별개의 실험에서 $D(t)$ 는 오른쪽으로 치우친 (skewed to the right) 형태를 보였고, 데이터 plotting은 시각적으로 타당함을 보여주었기 때문이다. 여기서 BHO 접근방법은 수요의 VMR이 상수라는 가정에 기초하고 있기 때문에(식 (23) 참조) 감마분포는 시간 t 의 함수인 모수 α 를 갖는다.

<Figure 4>는 <Table 1>의 Comparison 1인 경우에 두 접근방법으로부터 구한 LTD 분포를 비교하여 보여주고 있다. First Comparison은 IT의 분포가 Uniform(1.0,9.0), OS의 분포가 Uniform(15,25)이고 LT의 분포는 Exponential(3)과 Exponential(10)인 경우이고, Second Comparison은 IT의 분포가 Uniform(6.0,14.0), OS의 분포가 Uniform(15,25)이고 LT의 분포는 Exponential(5)과 Exponential(20)인 경우이다.

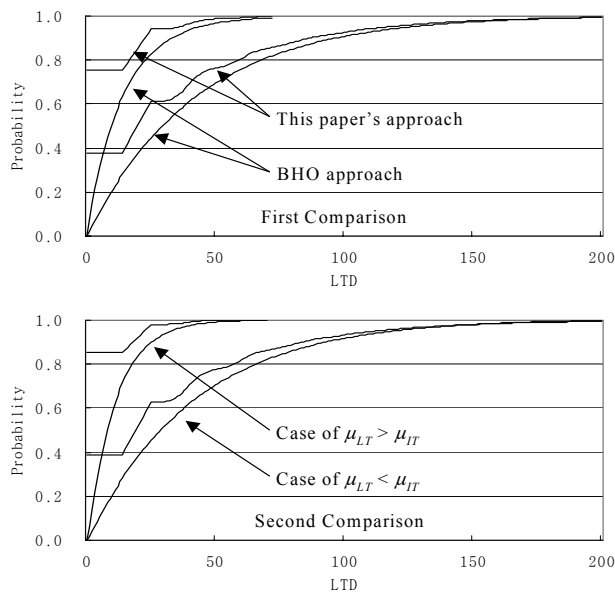


Figure 4. Comparison of LTD distribution(Comparison 1).

여기서는 한 실험결과에 대해서만 설명하지만 나머지도 유사하게 해석할 수 있다. First Comparison에서 각각 $\mu_{LT} = 3.0$ 인

경우와 $\mu_{LT} = 10.0$ 인 경우에 두 접근방법으로부터 구한 LTD 분포를 비교하여 보면, $\mu_{LT} < \mu_{IT}$ 인 경우에 BHO 접근방법으로 구한 근사적 평균 12 ($= \mu_{OS} * \mu_{LT} / \mu_{IT}$) 주변의 결과가 $\mu_{LT} > \mu_{IT}$ 인 경우에 근사적 평균 40 주변의 결과보다 더 나쁘다는 사실을 알 수 있다. 그리고 $\mu_{LT} \gg \mu_{IT}$ 함에 따라, BHO 접근방법은 보다 좋은 결과를 보여 주리라고도 추측할 수 있다.

<Table 1>의 나머지 Comparison의 결과를 <Figure 5>, <Figure 6> 그리고 <Figure 7>에 제시한다. 여기에서도 유사한 결과가 도출됨을 알 수 있다.

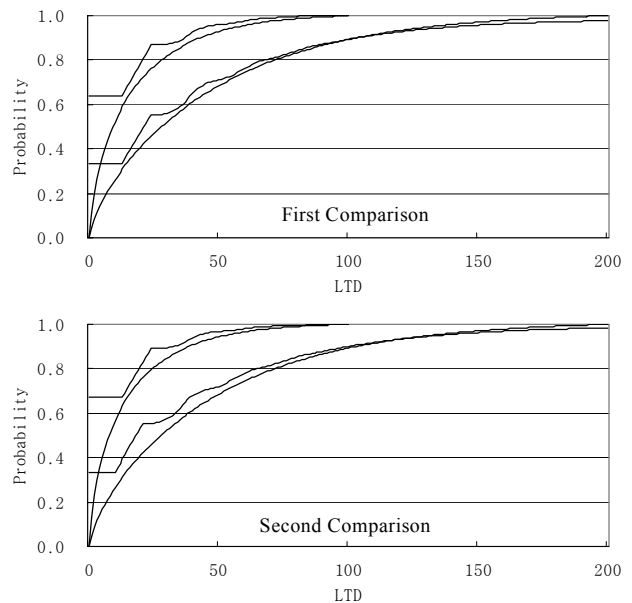


Figure 5. Comparison of LTD distribution(Comparison 2).

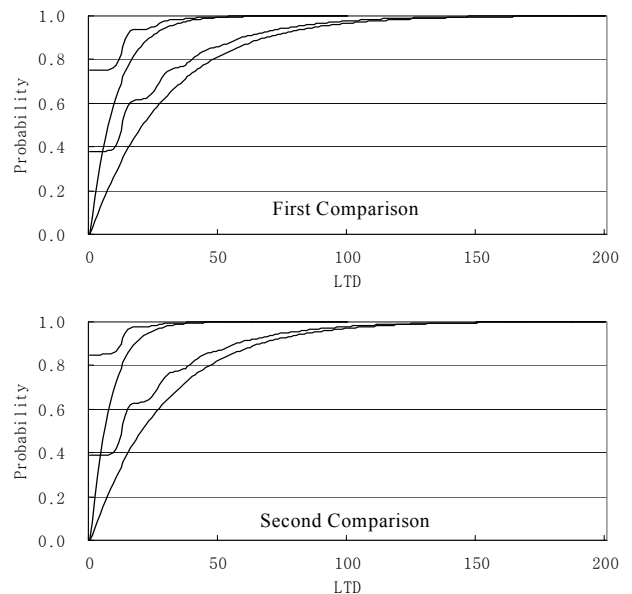


Figure 6. Comparison of LTD distribution(Comparison 3).

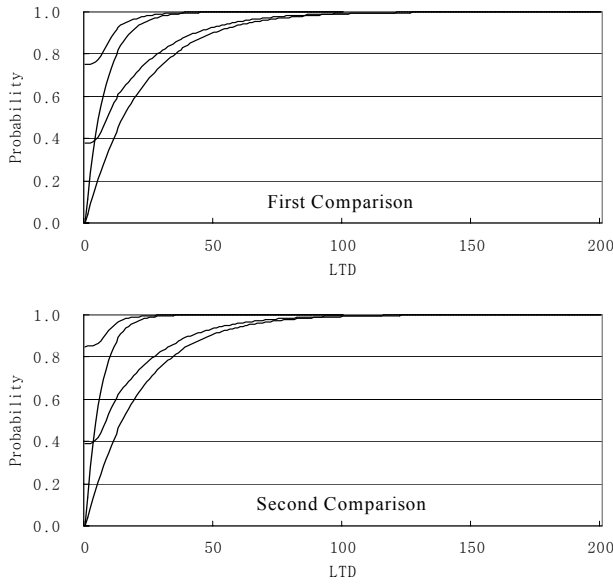


Figure 7. Comparison of LTD distribution(Comparison 4).

5. 결론

조달기간수요에 대한 분포를 유도하기 위해서는 수요와 조달 기간에 대한 분포를 동시에 고려하여야 하며 이는 아주 복잡하고 어려운 수리적 과정을 거쳐야 한다. 이러한 수리적 복잡성을 조금이라도 덜기 위해, 기존의 연구들은 복합분포를 구성하는 몇몇 요소들의 복합적 성질을 불가피하게 무시할 수밖에 없었다. 본 논문은 과거 연구들을 종합하여 Bagchi *et al.* (1984)가 제안한 BHO 접근방법을 이론적으로 분석하고, 이 BHO 접근방법이 암묵적으로 가정한 사항들을 명확하게 제시하였다.

그리고 BHO 접근방법과 본 논문에서 취한 접근방법의 비교를 통하여, 다음과 같은 사실을 알 수 있었다. (1) BHO 접근방법은 확률수요과정이 복합Poisson 과정을 따르는 상황에 가장 적합한 방법이다. (2) 다른 상황이라 할지라도, 근사치를 사용할 수 있도록 조달기간이 충분히 크다면 BHO 접근방법을 사용할 수 있으리라 추측할 수 있다. 하지만 비교실험에서 알 수 있듯이, 평균조달기간이 충분히 크지 않으면 BHO 접근방법에 의한 결과는 아주 의문시 된다 BHO 접근방법을 이용하려는 연구자나 실무자들은 이점에 특히 주의해야 할 것이다. 추후 과제로서 이러한 상황에 대한 해법을 제시할 수 있는 연구가 요구된다.

부록

제2장에서 일반적인 이산형과 연속형 분포에 대한 Lemma 1과 2를 제시했다. 하지만 Lemma 1과 2는 모든 가능한 분포를 다

룰 수 있도록 유도되었기 때문에 계산상에 많은 시간이 요구된다. 따라서 제4장의 비교실험에서 고려한 실험상황에서는 계산상의 노력을 줄이기 위해 본 부록에서 제시하는 이산형 및 연속형 Uniform 분포에 대한 Lemma A1과 A2 및 Binomial 분포에 대한 Lemma A3를 이용하였다. Exponential과 Poisson 분포에 대한 Convolution은 이미 많이 알려진 것이어서 생략한다.

Lemma A1. 만일 $h(x)$ 가 이산형 Uniform분포 ($a+1 \leq x \leq b$)를 따른다면, $H_n(x)$ 는 $n \geq 1$ 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$H_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{l=0}^x \prod_{i=0}^{n-1} (x-l-i) \delta(l-an-(b-a)j=0) \quad (A1)$$

여기서 $\delta(x=0)$ 는 지시함수, 즉 $x=0$ 이면 1이고, 다른 경우에는 0의 값을 갖는 함수이다.

[증명] 우선 다음의 사실을 주지한다

$$\begin{aligned} L[H_1] &= \left(\frac{1}{b-a} s^{a+1} + \frac{2}{b-a} s^{a+2} + \dots + \frac{b-a}{b-a} s^b \right) \\ &\quad + s^{b+1} + \dots = (1+s+s^2+s^3+\dots) \\ &= \frac{1}{b-a} (s^{a+1} + s^{a+2} + \dots + s^b) \\ &= \frac{1}{1-s} L[h] = L[1]L[h] \end{aligned} \quad (A2)$$

이제 이산형 Laplace 연산자 L 를 적용하고, 식 (A2)을 이용하면

$$\begin{aligned} L[H_n] &= L[H_{n-1} * h] = L[H_{n-1}]L[h] = L[1]L[h]^n \\ &= \frac{1}{1-s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k) s^k \right)^n = \frac{1}{1-s} \left(\sum_{k=a+1}^b \frac{1}{b-a} s^k \right)^n \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \frac{s^{(a+1)n} (1-s^{b-a})^n}{(1-s)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \frac{s^n}{(1-s)^{n+1}} s^{an} (1-s^{b-a})^n \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{s^n}{(1-s)^{n+1}} s^{an+(b-a)j} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{1}{n!} L[{}_k \mathbf{P}_n] \\ L[\delta(k-an-(b-a)j=0)] \quad (A3)$$

여기서 ${}_k \mathbf{P}_n = \prod_{j=0}^{n-1} (k-j)$ 마지막으로 식 (A3)에 역 Laplace 연산자 L^{-1} 를 적용하면 식(A1)을 얻을 수 있다.

Lemma A2. 만일 $g(t)$ 가 연속형 Uniform분포 ($0 \leq a \leq t \leq b$)를 따른다면, $G_n(t)$ 는 $n \geq 1$ 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$G_n(t) = \frac{1}{(a-b)^n} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} \tilde{G}_l(t) \quad (A4)$$

여기서

$$\tilde{G}_l(t) = \begin{cases} 0 & (b-a)l+an \leq t \\ (t-(b-a)l-an)^n & t \leq (b-a)l+an \end{cases}$$

[증명] 연속형 Laplace 연산자 L 을 적용하면

$$L[G_n] = L[G_{n-1} * g] = L[G_{n-1}]L[g] = L[1]L[g]^n \\ = \frac{1}{s} \left(\int_0^\infty g(t)e^{-st} dt \right)^n = \frac{1}{s} \left(\int_a^b \frac{1}{b-a} e^{-st} dt \right)^n \\ = \frac{1}{s} \frac{1}{(b-a)^n} \left(-\frac{1}{s} (e^{-sb} - e^{-sa}) \right)^n \\ = \frac{1}{(a-b)^n} \frac{1}{s^{n+1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (e^{-sb})^l (-e^{-sa})^{n-l} \\ = \frac{1}{(a-b)^n} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} \frac{e^{-s\{(b-a)l+an\}}}{s^{n+1}} \quad (A5)$$

이제 식 (A5)에 역 Laplace 연산자 L^{-1} 를 적용하면 식 (A4)을 얻을 수 있다.

Lemma A3. 만일 $h(x)$ 가 Binomial 분포, Binomial(N,p)를 따른다면, $H_n(x)$ 는 $n \geq 1$ 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$H_n(x) = (1-p)^{nN} \sum_{l=0}^{nN} {}_{nN} C_l \left(\frac{p}{1-p} \right)^l \sum_{k=0}^x \delta(k-l=0) \quad (A6)$$

$$\text{여기서 } {}_a C_b = \frac{a!}{b!(a-b)!},$$

$\delta(x=0)$ 는 지시함수, 즉 $x=0$ 이면 1이고, 다른 경우에는 0의 값을 갖는 함수이다.

[증명] 이산형 Laplace 연산자 $L[u] = \sum_{k=0}^\infty u(k)s^k$ 를 적용하면 다음과 같은 식 (A7)을 얻을 수 있다.

$$L[H_n] = L[H_{n-1} * h] = L[H_{n-1}]L[h] = L[1]L[h]^n \\ = \frac{1}{1-s} \left\{ \sum_{k=0}^\infty h(k)s^k \right\}^n = \frac{1}{1-s} \left\{ \sum_{k=0}^N {}_N C_k (1-p)^{N-k} s^k \right\}^n \\ = \frac{1}{1-s} (1-p)^{nN} \left\{ \sum_{k=0}^N {}_N C_k \left(\frac{ps}{1-p} \right)^k \right\}^n \\ = \frac{1}{1-s} (1-p)^{nN} \left\{ \left(1 + \frac{ps}{1-p} \right)^N \right\}^n \\ = \frac{1}{1-s} (1-p)^{nN} \left(1 + \frac{ps}{1-p} \right)^{nN} \\ = \frac{1}{1-s} (1-p)^{nN} \sum_{l=0}^{nN} {}_{nN} C_l \left(\frac{ps}{1-p} \right)^l \\ = (1-p)^{nN} \sum_{l=0}^{nN} {}_{nN} C_l \left(\frac{p}{1-p} \right)^l \frac{1}{1-s} s^l \\ = (1-p)^{nN} \sum_{l=0}^{nN} {}_{nN} C_l \left(\frac{p}{1-p} \right)^l L[1]L[\delta(k-l=0)] \quad (A7)$$

이제 역 Laplace 연산자 L^{-1} 를 식 (A7)에 적용하면 식 (A6)을 얻을 수 있다.

참고문헌

Bagchi, U., Hayya, J.C. and Ord, J.K. (1984), Modeling Demand During Lead Time, *Decision Sciences*, **15**, 157-176.
 Carlson, P.G. (1982), An Alternative Model for Lead Time Demand: Continuous-Review Inventory Systems, *Decision Sciences*, **13**, 120-128.
 Kumaran, M. and Achary, K.K. (1996), On Approximating Lead Time Demand Distributions Using the Generalized λ type Distribution, *Journal of the Operational Research Society*, **47**, 395-404.
 McFadden, F.R. (1972), On Lead Time Demand Distributions, *Decision Sciences*, **3**, 106-126.
 Ord, J.K. (1973), *Families of Frequency Distributions*, Charles Griffin & Co. Ltd., London.
 Taylor, H.M. and Karlin, S. (1984), *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, Inc., London.